

2

Transformada inversa numérica de Laplace

Neste capítulo damos uma breve descrição da transformada de Laplace e a transformada inversa de Laplace, dando ênfase aos métodos numéricos para calcular a transformada inversa de Laplace. Para isto, descrevemos de forma sucinta alguns métodos numéricos propostos por alguns autores.

2.1

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um operador linear $\mathcal{L}$ pertencente à família das integrais de transformação. Seja $f(t)$ uma função não periódica e definida para todo $t \geq 0$; define-se a *transformada de Laplace de $f(t)$* como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad \text{onde } s = a + i\omega. \quad (2-1)$$

A transformada de Laplace da função $f(t)$ (dependente de t) é geralmente denotada por:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (2-2)$$

Observe que a transformada de Laplace é dependente da variável s . As vezes, em lugar de $F(s)$ também escreve-se $\bar{f}(s)$.

Diz-se que a transformada de Laplace de $f(t)$, *existe* quando a integral (2-1) converge para algum valor de s . Para a existência da transformada de Laplace é suficiente que satisfaça a seguinte proposição:

Se $f(t)$ é uma função contínua em trechos para $t \geq 0$ e além disso $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t \geq T$, onde $M, c > 0$ e $T > 0$ são constantes, então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Para fazermos uso da técnica da transformada de Laplace na solução das equações diferenciais ordinárias ou parciais com valores iniciais os seguintes passos são usuais:

1. Usar a equação (2-1) para transformar o problema inicial (em função de t), para um problema bem mais simples (em função de s).

2. Resolver esse problema simples e encontrar $F(s)$
3. Finalmente, recuperar a função desejada $f(t)$ mediante a transformada inversa de Laplace

Uma outra propriedade importante ao aplicarmos a transformada de Laplace é a seguinte: Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $f^n(t)$ é a n -ésima derivada de f , então

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \quad (2-3)$$

sempre que $f(t), f'(t), \dots, f^{n-1}(t)$ sejam contínuas para $0 \leq t \leq N$ e de ordem exponencial para $t > N$ com $f^{(n)}$ sendo seccionalmente contínua para $0 \leq t \leq N$.

2.2

Transformada inversa de Laplace

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ então escrevemos como $\mathcal{L}^{-1}$ a função que transforma $F(s)$ em $f(t)$. Ou seja,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \quad (2-4)$$

e dizemos que $f(t)$ é a *transformada inversa de Laplace de $F(s)$* .

A transformada inversa de Laplace é definida formalmente pela seguinte integral de inversão:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2-5)$$

onde a é uma constante maior que qualquer ponto singular de $F(s)$, $f(t) = 0$ para $t < 0$. Este resultado é conhecido como fórmula de inversão complexa, ou também como fórmula integral de Bromwich e fornece um método direto para obter a transformada inversa de Laplace de uma função dada $F(s)$. Vejamos isto na seguinte seção.

2.3

Teorema de inversão de Bromwich

Seja $f(t)$ uma função continuamente derivável com $|f(t)| < Ke^{\gamma t}$ onde K e γ são constantes positivas. Se definimos $F(s)$ como

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > \gamma \quad (2-6)$$

então

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} F(s) ds, \quad \text{onde } c > \gamma. \quad (2-7)$$

A equação (2-7) também pode ser expressa como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (2-8)$$

Demonstração. Definimos $I = I(T, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} F(s) ds$. Logo

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} \left(\int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(u) \left(\int_{c-iT}^{c+iT} e^{s(t-u)} ds \right) du \end{aligned} \quad (2-9)$$

A mudança na ordem de integração é possível graças à convergência uniforme. Integrando em s segue que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(u) \frac{e^{(\gamma+iT)(t-u)} - e^{(\gamma-iT)(t-u)}}{t-u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{\gamma(t-u)} f(u) \frac{\text{sen } T(t-u)}{t-u} du \end{aligned} \quad (2-10)$$

mudando a variável $u = t + \theta$ e substituindo $\psi(\theta) = e^{-\gamma\theta} f(t + \theta)$ na integral (2-10) temos

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^\infty \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta \quad (2-11)$$

dividimos a integral (2-11) em duas parcelas, uma primeira I_1 correspondente à integração no intervalo $[0, \infty[$ e uma segunda I_2 correspondente à integração no intervalo $[-t, 0]$. Ou seja $I = I_1 + I_2$.

Escrevendo πI_1 da forma conveniente temos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta &= \psi(0) \int_0^\delta \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta + \int_0^\delta \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\theta} \text{sen } T\theta d\theta \\ &\quad + \int_\delta^X \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta + \int_X^\infty \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2-12)$$

escolhendo δ muito pequeno e X muito grande. Temos que

$$\left| \int_0^\delta \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\theta} \text{sen } T\theta d\theta \right| < \epsilon \quad (2-13)$$

$$\left| \int_X^\infty \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta \right| < \epsilon \quad (2-14)$$

considerando a integral $\int_\delta^X$, após a integração por partes e considerando que cada termo envolve $1/T$ e sendo a integral limitada, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\delta^X \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta &= -\frac{\cos T\theta}{T\theta} \psi(\theta) \Big|_\delta^X + \frac{1}{T} \int_\delta^X \cos T\theta \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\psi(\theta)}{\theta} \right) d\theta \\ &= O(1/T) \end{aligned} \quad (2-15)$$

Seguindo de modo análogo para a integral $\int_X^\delta$, fazendo a mudança de variável $\phi = T\theta$ obtemos

$$\begin{aligned} \psi(0) \int_0^\delta \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta &= \psi(0) \int_0^{T\delta} \frac{\text{sen } \phi}{\phi} d\phi \\ &= \psi(0) \frac{\pi}{2} + O(1/T) \end{aligned} \quad (2-16)$$

somando os resultados obtidos acima e fazendo $T \rightarrow \infty$ obtemos

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^\infty \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta = \frac{1}{2} \psi(0) = \frac{1}{2} f(t) \quad (2-17)$$

Expressamos πI_2 de forma análoga à equação (2-12). Para a parcela da $\int_{-t}^0$ obtemos o igualdade

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta &= \int_{-t}^{-\delta} \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta + \psi(0) \int_{-\delta}^0 \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta \\ &+ \int_{-\delta}^0 \frac{\psi(\theta) - \psi(0)}{\theta} \text{sen } T\theta d\theta \end{aligned} \quad (2-18)$$

A partir de um argumento similar segue que

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-t}^0 \psi(\theta) \frac{\text{sen } T\theta}{\theta} d\theta = \frac{1}{2} f(t) \quad (2-19)$$

Fazendo $T \rightarrow \infty$ na equação (2-9) obtemos (2-7) e denotamos como $\bar{I}$.

Somando as duas parcelas da integral $\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ segue que $\bar{I} = f(t)$ como queríamos demonstrar. ■

2.4

Métodos de transformada inversa numérica de Laplace

2.4.1

Método de Bellman-Kalaba-Lockett (1966)

O método proposto para inverter a transformada de Laplace, consiste em reduzir primeiro o intervalo infinito de integração $[0, \infty)$ a um intervalo finito $[0, 1]$, por meio de uma substituição de variáveis. Posteriormente emprega-se a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de n -pontos para reduzir o problema de inversão a um sistema de n equações lineares algébricas.

Lembrando que a transformada de Laplace de uma função é

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (2-20)$$

fazendo a mudança de variável $u = e^{-t}$ em (2-20) segue que

$$F(s) = \int_0^1 u^{s-1} f(-\ln u) du. \quad (2-21)$$

Aplicando a fórmula da quadratura de Gauss-Legendre, a equação (2-21) é discretizada da seguinte forma

$$F(s) \approx \sum_{i=1}^N w_i u_i^{s-1} f(-\ln u_i) \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (2-22)$$

onde u_i , para $i = 1, 2, \dots, N$, são as raízes obtidas do polinômio de Legendre P_N^* de grau N , w_i são os pesos correspondentes.

Se s assume N valores, por exemplo, $s = 1, 2, \dots, N$, então um sistema de N equações lineares é obtido com N valores desconhecidos de $f(-\ln u_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, N$. A solução desse sistema pode ser explicitamente resolvido tomando a forma

$$f(t_i) \approx \sum_{k=1}^N a_{ik}^{(N)} F(k) \quad \text{onde} \quad t_i = -\ln u_i \quad (2-23)$$

A equação (2-23) é a fórmula de inversão dada em (Bellman-1966), os coeficientes $a_{ik}^{(N)}$ são tabulados para diferentes valores de N .

2.4.2

Método de R. Piessens (1968)

É uma extensão do método de Bellman-Kalaba-Lockett (Bellman-1966), que tem como fórmula de inversão a equação (2-23). O inconveniente desse método é que só pode ser utilizado num número restrito de pontos.

Para evitar essa dificuldade, o método propõe fazer uma mudança de escala da variável t , com este propósito, propõe a seguinte extensão de (2-23):

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^N \varphi_k^{(N)}(e^{-t}) F(k) \quad (2-24)$$

onde $\varphi_k^{(N)}$ é um polinômio de grau $N - 1$.

A equação (2-24) é obtida a partir da equação (2-25) que é uma função de interpolação generalizada de Lagrange da transformada de Laplace nos pontos $s = 1, 2, \dots, N$.

$$F(s) \approx \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{N-k} (k + N - 1)!}{[(k - 1)!]^2 (N - k)!} \frac{\prod_{m=1, m \neq k}^N (s - m)}{\prod_{m=0}^{N-1} (s + m)} F(k) \quad (2-25)$$

Invertendo a equação (2-25) obtemos a fórmula de inversão da transformada de Laplace (2-24). Onde

$$\varphi_k^{(N)}(e^{-t}) = \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^{k+m+1} \frac{(N + k - 1)! (N + m)! e^{-mt}}{[(K - 1)!]^2 (N - k)! (m!)^2 (N - 1 - m)! (k + m)!} \quad (2-26)$$

2.4.3

Método de Dubner-Abate (1968)

O método desenvolvido por Dubner e Abate, para inverter a transformada de Laplace, relaciona a integral de Fourier à transformada de Fourier de cosenos.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $h(t) = 0$ para $t < 0$. A partir da função h definimos as funções periódicas pares $g_n(t)$ (de período $2T$, veja a figura 2.1), para cada $n = 0, 1, 2, \dots$ como:

$$g_n(t) = \begin{cases} h(2nT - t), & \text{para } t \in [(n-1)T, nT] \\ h(t), & \text{para } t \in [nT, (n+1)T] \end{cases} \quad (2-27)$$

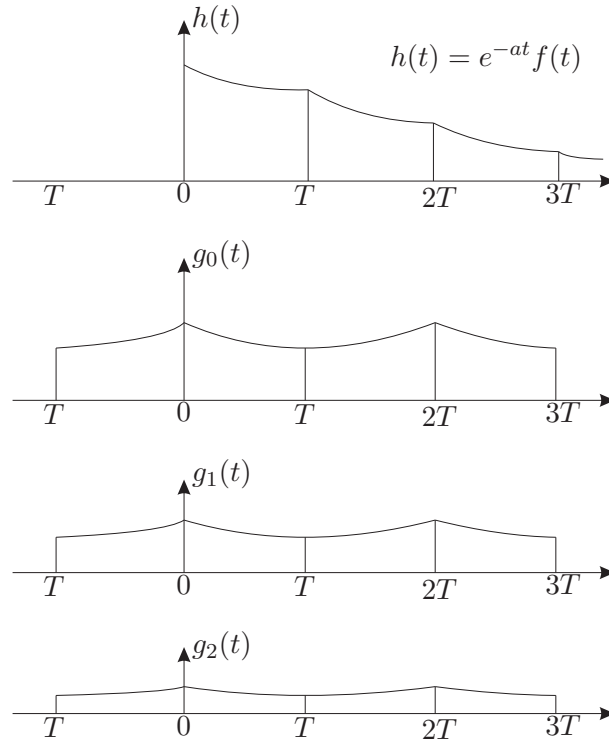


Figura 2.1: Funções $h(t)$ e $g_n(t)$

Para obter uma representação em série de Fourier para cada $g_n(t)$ reescrevemos (2-27) de tal forma que as $g_n(t)$ estejam definidas no intervalo $(-T, T)$.

Assim, para cada $n = 0, 2, 4, \dots$ temos

$$g_n(t) = \begin{cases} h(nT - t), & -T \leq t \leq 0 \\ h(nT + t), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2-28)$$

e para cada $n = 1, 3, 5, \dots$ temos

$$g_n(t) = \begin{cases} h((n+1)T + t), & -T \leq t \leq 0 \\ h((n+1)T - t), & 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (2-29)$$

Logo, a representação de Fourier em termos de co-senos de $g_n(t)$ é dado por

$$g_n(t) = \frac{A_{n,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos \frac{k\pi t}{T} \quad (2-30)$$

para cada $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^T h(nT + x) \cos \frac{k\pi x}{T} dx \quad \text{para } n = 0, 2, 4, \dots \quad (2-31)$$

e

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_0^T h((n+1)T - x) \cos \frac{k\pi x}{T} dx \quad \text{para } n = 1, 3, 5, \dots \quad (2-32)$$

Após uma mudança de variável em (2-31) e (2-32) segue que

$$A_{n,k} = \frac{2}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} h(t) \cos \frac{k\pi t}{T} dt \quad (2-33)$$

Em (2-30), somando em termos de n obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{2}{T} \left[\frac{A(w_0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A(w_k) \cos \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (2-34)$$

onde $A(w_k) = \int_0^{\infty} h(t) \cos \frac{k\pi t}{T} dt$ e $A(w_k)$ é uma transformada de Fourier em termos de co-senos. Se introduzimos o seguinte fator de atenuação

$$h(t) = e^{-at} f(t) \quad (2-35)$$

realmente $A(w_k)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$ com a variável de transformação sendo dado por $s = a + \frac{k\pi}{T}i$. Ou seja $A(w_k) = \text{Re}\{F(s)\}$.

Portanto, da equação (2-34) segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \text{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}\left\{F\left(a + \frac{k\pi}{T}i\right)\right\} \cos \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (2-36)$$

onde ambos lados da equação são multiplicados pelo fator de atenuação e^{at} .

Note que (2-36) é já uma aproximação de $f(t)$ em $(0, T)$, ou seja $f(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t)$.

A partir de (2-28) e (2-29) pode-se determinar $\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t)$ em $(0, T)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(2nT + t) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} h(2nT - t) \quad (2-37)$$

Usando o fator de atenuação (2-35) e separando adequadamente podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t) = f(t) + \varepsilon \quad (2-38)$$

onde o erro ε é dado por

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2aTn} [f(2nT + t) + e^{2ct} f(2nT - t)] \quad (2-39)$$

Denotando $\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{at} g_n(t)$, então

$$\tilde{f}(t) = f(t) + \varepsilon \quad (2-40)$$

Dubner e Abate em (Dubner-Abate-1968) mostram que ε pode ser feito suficientemente pequeno apenas para $t \leq T/2$. Portanto concluem que no intervalo $(0, T/2)$ uma aproximação da transformada inversa de Laplace pode ser achada, com o grau de exatidão que desejarmos, pela fórmula

$$\tilde{f}(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} \text{Re}\{F(a)\} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{Re}\{F(a + \frac{k\pi}{T}i)\} \cos \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (2-41)$$

2.4.4

Método de Kenny Crump (1970)

O método de Kenny Crump é uma generalização do método de Dubner e Abate, lembre que esse método aproxima a transformada inversa por meio de séries de Fourier em termos de co-senos, pois considera a parte real $\text{Re}\{F(s)\}$. Entretanto, o método de Crump considera (além das séries de Fourier em co-senos) séries de Fourier em termos em senos, de tal forma que o erro seja menor ao obtido por Dubner e Abate. Para tal propósito considera a parte imaginária $\text{Im}\{F(s)\}$.

No desenvolvimento deste método obtemos a série de Fourier para uma função $g_0(t)$, que é periódica com período $2T$ e igual a $f(t)e^{-at}$ num intervalo $(0, 2T)$. Os coeficientes da série podem ser aproximados usando $F(s)$. Com a finalidade que a série de Fourier tenha convergência à $g_0(t)$ em pontos de

descontinuidade vamos impor a condição $f(t) = \{f(t+) + f(t-)\}/2$ para todo t onde $f(t)$ é descontínua. Para $n = 0, 1, 2, \dots$, define-se $g_n(t)$ para $-\infty < t < \infty$, por $g_n(t) = f(t)e^{-at}$, $2nT \leq t \leq 2(n+1)T$, com a condição de ser periódica com período $2T$. A representação da série de Fourier de cada $g_n(t)$ é dado por

$$g_n(t) = \frac{1}{2}A_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{n,k} \cos \frac{k\pi t}{T} + B_{n,k} \sin \frac{k\pi t}{T} \right\} \quad (2-42)$$

onde os coeficientes de Fourier são

$$A_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} f(t) \cos(k\pi t/T) dt \quad (2-43)$$

$$B_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} f(t) \sin(k\pi t/T) dt \quad (2-44)$$

Em (2-42) somando com respeito aos n e observando que

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos(k\pi t/T) dt = \operatorname{Re}\{F(a + ik\pi/T)\} \quad (2-45)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin(k\pi t/T) dt = -\operatorname{Im}\{F(a + ik\pi/T)\} \quad (2-46)$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \frac{1}{2T} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re}\{F(a + \frac{k\pi}{T}i)\} \cos \frac{k\pi t}{T} - \operatorname{Im}\{F(a + \frac{k\pi}{T}i)\} \sin \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (2-47)$$

Como $g_0(t) = f(t)e^{-at}$ para $t \in (0, 2T)$, a partir de (2-47) obtemos uma aproximação $\tilde{f}(t)$ da transformada inversa $f(t)$ dada por

$$\tilde{f}(t) = \frac{e^{at}}{2T} \operatorname{Re}\{F(a)\} + \frac{e^{at}}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re}\{F(a + \frac{k\pi}{T}i)\} \cos \frac{k\pi t}{T} - \operatorname{Im}\{F(a + \frac{k\pi}{T}i)\} \sin \frac{k\pi t}{T} \right] \quad (2-48)$$

Ou seja $f(t) = \tilde{f}(t) - \varepsilon$, onde

$$\varepsilon = e^{-2nat} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nat} f(2nT + t) \quad (2-49)$$

2.4.5

Método de Gaver-Stehfest (1970)

O algoritmo desenvolvido por H. Stehfest (Stehfest-1970) é baseado no trabalho de D. P. Gaver (Gaver-1966) (quem utiliza uma linguagem inteiramente probabilística), Gaver considera a *esperança matemática* $\bar{f}_n$ da inversa $f(t)$ de $F(s)$,

$$\bar{f}_n = \int_0^\infty f(t)g_n(a, t)dt = a \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i F((n+i)a). \quad (2-50)$$

Ou, o que é o mesmo, *valor esperado* de $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ com respeito à função de probabilidade

$$g_n(a, t) = a \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} (1 - e^{-at})^n e^{-nat}, \quad a > 0 \quad (2-51)$$

onde $g_n(a, t)$ tem as seguintes propriedades

1. $\int_0^\infty g_n(a, t)dt = 1$
2. Valor modal de $g_n(a, t) = \frac{\ln 2}{a}$
3. e variância $\text{var}(t) = 1/a^2 \sum_{i=0}^n 1/(n+i)^2$

As quais implicam que $\bar{f}_n$ converge para $f(\frac{\ln 2}{a})$ quando $n \rightarrow \infty$. $\bar{f}_n$ tem expansão assintótica (vide (Stehfest-1970))

$$\bar{f}_n \sim f\left(\frac{\ln 2}{a}\right) + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \dots \quad (2-52)$$

Para um número N de valores de F , uma melhor aproximação para $f(\frac{\ln 2}{a})$ do que $\bar{f}_{n-1}$ é possível. Por combinação linear de $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{N/2}$ e requerendo

$$\sum_{i=1}^K x_i(K) \frac{1}{(N/2 + 1 - i)^k} = \delta_{k0}; \quad k = 0, 1, \dots, K-1; \quad K \leq N/2 \quad (2-53)$$

segue que

$$x_i(K) = \frac{(-1)^{i-1}}{K!} \binom{K}{i} i(N/2 + 1 - i)^{K-1} \quad (2-54)$$

portanto

$$\sum_{i=1}^K x_i(K) \bar{f}_{(N/2)+1-i} = f\left(\frac{\ln 2}{a}\right) + (-1)^{K+1} \alpha \frac{(N/2 - K)!}{(N/2)!} + o\left(\frac{(N/2 - K)!}{(N/2)!}\right). \quad (2-55)$$

Substituindo $K = N/2$, $a = \frac{\ln 2}{T}$ e utilizando (2-50) obtemos a expressão que produz um valor aproximado f_a da transformada inversa a partir da transformada de Laplace $F(s)$, em $s = T$.

$$f_a = \frac{\ln 2}{T} \sum_{i=1}^N V_i F\left(\frac{\ln 2}{T} i\right)$$

com

$$V_i = (-1)^{(N/2)+1} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min\{i, N/2\}} \frac{k^{N/2} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-1)!}$$