

2.1.Geometria

A diagram of a cross-shaped hole in a plate. A horizontal dashed line represents the centerline, with a coordinate system (x, r) centered at the intersection. The horizontal arms of the cross have a total width of L_0 . The vertical arms have a total height of $2R_0$. The horizontal distance from the centerline to the outer edge of the horizontal arms is L . The vertical distance from the centerline to the outer edge of the vertical arms is R . A thick black arrow on the left points to the right, indicating the direction of flow.

Como o escoamento é considerado axissimétrico, o domínio computacional vai da entrada ($x = 0$) à saída do tubo ($x = 2L+L_0$), e da linha de simetria ($r = 0$) até a parede do tubo ($r = R_0$).

Para o escoamento modelado, as seguintes hipóteses simplificadoras foram adotadas:

- Escoamento isocórico, laminar, permanente e axissimétrico;
- Efeitos de inércia desprezíveis;

- Propriedades independentes da temperatura; e
- Dissipação viscosa desprezível.

Com estas hipóteses simplificadoras as equações de conservação de massa e quantidade de movimento se reduzem, respectivamente à:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = 0 \quad (2.2)$$

Em notação diferencial as equações acima ficam

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xr} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.2b)$$

onde v é o vetor velocidade, τ é o tensor das tensões, p a pressão e $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Com as hipóteses simplificadoras e o perfil geométrico definidos, as seguintes condições de contorno são assumidas (considerando n e t , respectivamente, os vetores localmente, normal e tangente à superfície analisada):

- Não deslizamento e impermeabilidade em superfícies sólidas:

$$\vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

- Simetria na linha central:

$$n \cdot (\nabla \vec{v}) \cdot t = 0 \quad (2.4)$$

$$\vec{v} \cdot n = 0 \quad (2.5)$$

Devido a simulação ser avaliada a Reynolds nulo e em regime permanente, pode-se considerar uma velocidade de entrada constante. Esta velocidade de entrada leva a um escoamento completamente desenvolvido imediatamente na entrada, já que o comprimento de desenvolvimento é dado por:

$$L/D = 0,06Re \quad (2.6)$$

Logo, como Re é nulo, o comprimento de entrada é zero.

2.3.Equações Constitutivas

Para modelar o campo de tensões, será analisada a equação de Souza Mendes. Como esta equação faz referência a equação SMD [7] e Oldroyd-B [5], será realizada uma explicação inicial para estes dois modelos.

2.3.1.SMD

Esta equação, formulada por Souza Mendes e Dutra, modela o comportamento dos fluidos viscoplásticos, apresentando excelente concordância com dados experimentais para diferentes fluidos [7].

Existem outras equações mais tradicionais que modelam os fluidos viscoplásticos, como *Herschel-Bulkley*, *Carreau* e *Papanastasiou* [5,2], porém o modelo SMD é uma função contínua com derivada também contínua, e por isso é mais indicado para simulações numéricas.

A equação SMD é mostrada na equação 2.7 e seu comportamento é mostrado na figura 2.2:

$$\tau = \left(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0} \right)} \right) (\tau_0 + k \dot{\gamma}^n) \quad (2.7)$$

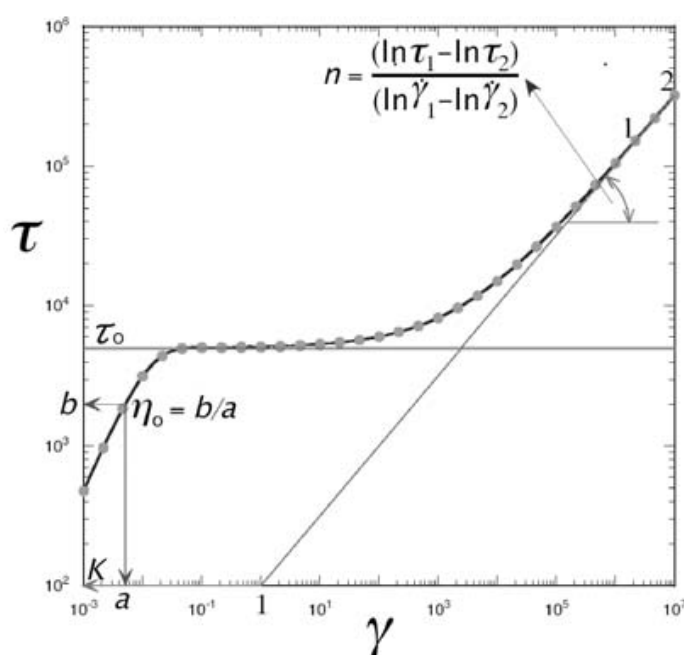


Figura 2.2: Tensão em função da taxa de deformação no modelo SMD.

A equação SMD também pode ser apresentada na forma de viscosidade em função da taxa de deformação, já que, para materiais viscoplásticos, a relação da tensão com a viscosidade é dada por:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (2.8)$$

Utilizando esta relação e a função SMD dada anteriormente tem-se:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} \right) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) \quad (2.9)$$

Nesta equação são definidas as seguintes variáveis:

- η_0 - viscosidade a taxa de cisalhamento zero: viscosidade constante quando a taxa de deformação aproxima-se de zero;
- τ_0 - tensão de escoamento: tensão em que o fluido tem o decaimento da sua viscosidade, apresentando a transição do escoamento entre *yielded* e *unyielded*;
- k - índice de consistência: É a intersecção entre a reta de prolongamento da curva na seção *power-law* e a reta vertical que passa pela taxa de deformação igual a um. Devido a esta característica, k pode ser usado na adequação de dados pela curva quando se usa o método dos quadrados mínimos.
- n - índice de *power-law*: Representa a inclinação da curva na região *power-law*. À medida que n tende a zero, esta equação se aproxima do caso de Bingham.

2.3.2. Oldroyd-B

Esta equação apresenta em sua formulação considerações para efeitos viscoelásticos, assim, o cálculo da tensão leva em consideração deformações em momentos anteriores ao ponto analisado. Desta forma, a tensão considera instantes de tempos anteriores ao instante analisado e alterações na geometria

do escoamento anterior ao local analisado. A equação de Oldroyd-B é mostrada a seguir:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \ddot{\boldsymbol{\tau}} = \eta_0 (\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda_2 \ddot{\boldsymbol{\gamma}}) \quad (2.10)$$

onde $\ddot{\boldsymbol{\tau}}$ e $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$ representam a derivada convectada [5] no tempo para a tensão e taxa de cisalhamento respectivamente.

A viscosidade η_0 é constante neste modelo viscoelástico. As constantes λ_1 e λ_2 são, respectivamente, chamadas de tempo de relaxação e tempo de retardo. Ambos os tempos estão relacionados com a elasticidade do fluido, sendo que o tempo de relaxação relaciona a dependência do fluido com taxas de deformações anteriores ($\dot{\boldsymbol{\gamma}}$) e o tempo de retardo relaciona a dependência do fluido com as derivadas convectadas das taxas de deformações anteriores ($\ddot{\boldsymbol{\gamma}}$).

A equação de Oldroyd-B analisada representa uma relação quasi-linear entre a tensão ($\boldsymbol{\tau}$) e a taxa de deformação ($\dot{\boldsymbol{\gamma}}$). Esta relação quasi-linear é assim definida quando, ao invés de se usar a derivada parcial temporal ($\partial/\partial t$), utiliza-se a derivada convectada (equações 2.11a e 2.11b).

$$\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} - \left[(\nabla \vec{V})^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \vec{V}) \right] \quad (2.11a)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{D\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{Dt} - \left[(\nabla \vec{V})^T \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot (\nabla \vec{V}) \right] \quad (2.11b)$$

A equação de Oldroyd-B mostrada, mesmo em escoamentos puramente cisalhantes, apresenta diferença das tensões normais, o que não é verificado e escoamentos puramente cisalhantes de fluidos newtonianos. Como visto na Introdução, a diferença das tensões normais é dada pela equação 1.6. No caso específico do modelo Oldroyd-B, o primeiro coeficiente da tensão normal, Ψ_1 é dado pela equação 2.12.

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = -\Psi_1 \dot{\gamma}_{xy}^2 \quad (1.6)$$

$$\Psi_1 = 2\eta_0(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (2.12)$$

A presença de tensões normais resulta em efeitos no escoamento de grande importância na indústria. Os principais efeitos decorrentes das tensões normais são os efeitos *Weissenberg*, *normal force pump* e *die swell* [5,8]. Este último efeito apresenta importância específica na produção de tubos e chapas de material polimérico, por exemplo.

Outra característica presente em materiais viscoelásticos é a existência de uma viscosidade extensional, como, por exemplo, um escoamento extensional biaxial, mostrado na figura 2.3. No escoamento mostrado, não há cisalhamento, apenas o alongamento do fluido em dois eixos, x e y por exemplo, e encurtamento no eixo z.

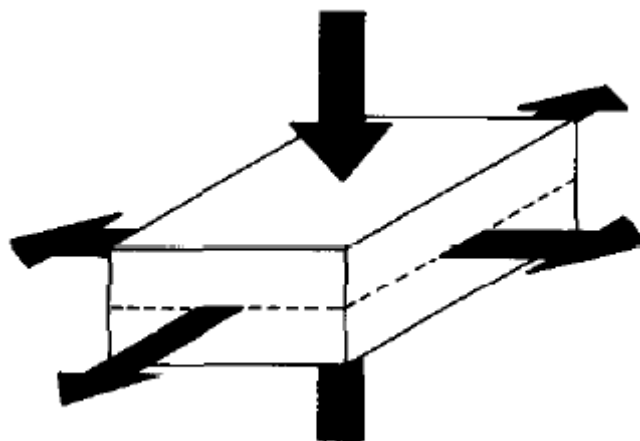


Figura 2.3: escoamento extensional biaxial

A importância do escoamento elongacional surge na indústria quando o fluido passa por uma mudança brusca em sua geometria, onde o comportamento do escoamento não pode ser previsto apenas pela análise da viscosidade proveniente do cisalhamento.

2.3.3.Souza Mendes

A equação de Souza Mendes é uma modificação da equação SMD apresentada anteriormente, introduzindo um outro patamar de viscosidade a altas taxas de deformação e dois patamares de elasticidade, um na região de baixas taxas de deformação e outro na região de elevadas taxas de deformação. O novo modelo é então descrito como um modelo elasto-viscoplástico.

Inicialmente, considerando a equação SMD (viscosidade em função da taxa de deformação), foi adicionado um patamar mínimo para a viscosidade

definido como η_∞ , havendo ainda uma transição exponencial entre a região *power-law* e o patamar η_∞ .

Para se adicionar a elasticidade partiu-se do modelo de Oldroyd-B, com a diferença que os termos constantes (η , λ_1 e λ_2) agora são funções não constantes. Neste modelo, a viscosidade deriva da equação SMD e os tempos de relaxamento e retardo possuem decaimento exponencial entre dois patamares constantes.

A equação proposta é apresentada a seguir:

$$\tau + \lambda_1(\dot{\gamma})\ddot{\tau} = \eta(\dot{\gamma})(\dot{\gamma} + \lambda_2(\dot{\gamma})\ddot{\gamma}) \quad (2.13a)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k \dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right] \quad (2.13b)$$

$$\lambda_1(\dot{\gamma}) = (\lambda_{01} - \lambda_{\infty 1}) e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} + \lambda_{\infty 1} \quad (2.13c)$$

$$\lambda_2(\dot{\gamma}) = (\lambda_{02} - \lambda_{\infty 2}) e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} + \lambda_{\infty 2} \quad (2.13d)$$

Na equação anterior as variáveis que já existiam na equação SMD continuam tendo o mesmo significado. As demais variáveis são:

- η_∞ - viscosidade a taxa de cisalhamento infinito: viscosidade constante quando a taxa de deformação torna-se suficientemente grande;
- $\lambda_{01}, \lambda_{\infty 1}$ - tempo de relaxação: o primeiro surge a baixas taxas de deformação, enquanto o segundo se sobrepõe em elevadas taxas de deformação;
- $\lambda_{02}, \lambda_{\infty 2}$ - tempo de retardo: o primeiro surge a baixas taxas de deformação, enquanto o segundo se sobrepõe em elevadas taxas de deformação.

Assim como na equação de Oldroyd-B, este modelo contempla o tempo de relaxação e o tempo de retardo, mas agora estes tempos são funções da taxa de deformação. As propriedades elásticas continuam sendo funções dos tempos de

relaxação e retardo. E as propriedades plásticas são consideradas pela modelagem da viscosidade como função da taxa de deformação.

Ao se analisar equação de Souza Mendes, pode-se verificar a existência de três regiões principais. A primeira surge quando o escoamento apresenta baixas taxas de deformação. Nesta região, o fluido apresenta uma viscosidade elevada η_0 (Figura 2.4) e os tempos de relaxação λ_{01} e retardo λ_{02} , todos constantes, ou seja, para baixas taxas de deformação o fluido se reduz para a equação de Oldroyd-B, com constantes η_0 , λ_{01} e λ_{02} . Isto pode ser verificado quando se toma o limite da taxa de deformação aproximando-se de zero ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$), como mostrado no tópico Análise da Equação de Souza Mendes.

A mesma análise pode ser realizada quando a taxa de deformação tende a infinito ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$), mas agora a viscosidade e os tempos de relaxação e retardo são respectivamente η_∞ , $\lambda_{\infty 1}$ e $\lambda_{\infty 2}$, também constantes. Novamente a equação de Souza Mendes se reduz para a equação de Oldroyd-B, porém pode-se notar que as duas equações de Oldroyd-B possuem viscosidade, tempo de relaxação e tempo de retardo diferente do mostrado anteriormente.

Por fim, da análise da equação da viscosidade, verifica-se que há uma seção de transição entre os dois patamares de viscosidade constante (η_0 e η_∞), como verificado na figura 2.4.

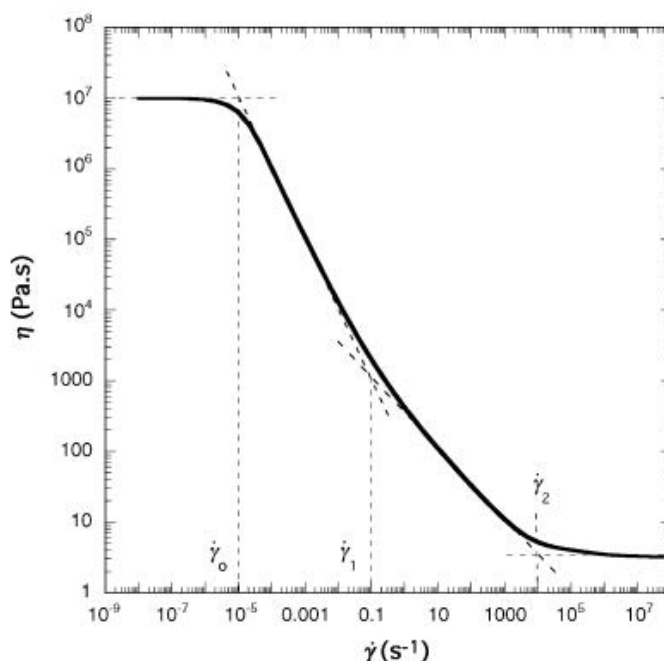


Figura 2.4: Função viscosidade no modelo Souza Mendes

Esta transição entre as viscosidades constantes, inicialmente, é dada por um decaimento exponencial (região entre $\dot{\gamma}_0$ e $\dot{\gamma}_1$), passando para um decaimento *power-law* (região entre $\dot{\gamma}_1$ e $\dot{\gamma}_2$).

Já na função de tempo de relaxação e tempo de retardo, a região de transição é dada apenas exponencialmente.

Cabe ainda observar que se o tempo de retardo for nulo para qualquer que seja a taxa de deformação ($\lambda_2(\dot{\gamma}) = 0$), a equação de Souza Mendes passa a representar duas equações de Maxwell, com uma região de transição entre elas, ao invés de duas equações de Oldroyd-B.

Da mesma forma, se o tempo de retardo for dado por $\lambda_2(\dot{\gamma}) = (\lambda_{02})e^{-\left(\frac{\eta_0\dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}$, ou seja, com $\lambda_{\infty 2} = 0$, a equação de Souza Mendes representa uma equação de Oldroyd-B para taxas de deformações pequenas e uma equação de Maxwell para taxas de deformações elevadas.

2.3.3.1. Análise da equação de Souza Mendes

Nesta seção será mostrada como a equação de Souza Mendes se comporta quando a taxa de deformação aproxima-se dos limites em zero e infinito.

$$\tau + \lambda_1(\dot{\gamma})\ddot{\tau} = \eta(\dot{\gamma})\left(\dot{\gamma} + \lambda_2(\dot{\gamma})\ddot{\gamma}\right) \quad (2.13a)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \left(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0\dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}\right)\left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1}\right) + \eta_{\infty}\left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_{\infty}}{k\dot{\gamma}^{n-1}}\right)}\right] \quad (2.13b)$$

$$\lambda_1(\dot{\gamma}) = (\lambda_{01} - \lambda_{\infty 1})e^{-\left(\frac{\eta_0\dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} + \lambda_{\infty 1} \quad (2.13c)$$

$$\lambda_2(\dot{\gamma}) = (\lambda_{02} - \lambda_{\infty 2})e^{-\left(\frac{\eta_0\dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} + \lambda_{\infty 2} \quad (2.13d)$$

2.3.3.1.1. Limite da viscosidade quando a taxa de deformação tende a zero ($\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma})$)

$$\eta(\dot{\gamma}) = (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k \dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right] \quad (2.13b)$$

Para tomar o limite da função viscosidade tendendo a zero é melhor dividir a equação em duas partes que correspondem às suas parcelas que se somam:

- Primeira parte: $(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right)$;
- Segunda parte: $\eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k \dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right]$.

Cabe aqui ressaltar que o índice n da equação é derivado do modelo *power-law* para a viscosidade, que representa um decaimento da viscosidade à medida que a taxa de deformação aumenta. Assim, n é uma constante no intervalo entre zero e um.

Começando pela segunda parte, em que a análise é mais simples, tem-se:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k \dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right] = \eta_\infty [1 - 1] = 0;$$

Já na primeira parte, para simplificar a análise, se denominará cada sub-parce do produto com uma letra:

- $A = (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)})$;
- $B = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right)$

Assim, tem-se:

Analisando a sub-parce A:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} A = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) = 1 - 1 = 0, \text{ logo}$$

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} A = 0.$$

Analisando a sub-parce B:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} B = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_0 + k \dot{\gamma}^n}{\dot{\gamma}} \right) = \left(\frac{\tau_0 + 0}{0} \right) = \left(\frac{\tau_0}{0} \right) = \infty, \text{ logo}$$

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} B = \infty.$$

Assim, a primeira parte, definida como o produto $A \times B$ fica $0 \times \infty$, tratando-se de uma indeterminação.

Como a primeira parte pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)})(\tau_0 + k\dot{\gamma}^n)}{\dot{\gamma}}$$

pode-se usar a regra de L'Hôpital [6] para se eliminar a indeterminação.

Desta forma:

$$\frac{\frac{\partial \left[(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)})(\tau_0 + k\dot{\gamma}^n) \right]}{\partial \dot{\gamma}}}{\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \dot{\gamma}}} = \frac{\left(\frac{\eta_0}{\tau_0} e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)} \right)(\tau_0 + k\dot{\gamma}^n) + (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)})(kn\dot{\gamma}^{n-1})}{1}$$

Fazendo o limite para a taxa de deformação tendendo a zero:

$$\left(\frac{\eta_0}{\tau_0} \right)(\tau_0) + (1 - 1)(0) = \eta_0$$

Assim, considerando-se as duas partes da função viscosidade obtém-se $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}) = \eta_0$.

2.3.3.1.2. Limite da viscosidade quando a taxa de deformação tende a infinito ($\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma})$)

$$\eta(\dot{\gamma}) = (1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1} \right) + \eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k\dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right] \quad (2.13b)$$

A análise vai ser similar a feita para o limite tendendo a zero, ou seja, a equação será dividida em duas partes que correspondem as suas parcelas que se somam:

- Primeira parte: $(1 - e^{-\left(\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^{n-1} \right)$;
- Segunda parte: $\eta_\infty \left[1 - e^{-\left(\frac{\eta_\infty}{k\dot{\gamma}^{n-1}}\right)} \right]$.

Começando pela segunda parte tem-se:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta_{\infty} \left[1 - e^{\left(-\frac{\eta_{\infty}}{k \dot{\gamma}^{n-1}} \right)} \right];$$

como $n < 1$, logo $n-1 < 0$, assim, o termo do expoente da fórmula anterior tende a menos infinito:

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \left(-\frac{\eta_{\infty}}{k \dot{\gamma}^{n-1}} \right) = -\infty, \text{ e o limite da segunda parte fica}$$

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta_{\infty} \left[1 - e^{\left(-\frac{\eta_{\infty}}{k \dot{\gamma}^{n-1}} \right)} \right] = \eta_{\infty} [1 - e^{-\infty}] = \eta_{\infty}$$

Na primeira parte o limite fica

$$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} (1 - e^{\left(-\frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0} \right)}) \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) = (1 - e^{-\infty})(0 + 0) = (1)(0) = 0.$$

Juntando os dois resultados, obtém-se: $\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow \infty} \eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty}$

2.4. Adimensionalização

O procedimento de adimensionalização das equações foi baseado na forma proposta por Souza Mendes [3] como uma alternativa de incluir apenas propriedades reológicas para o escoamento. Desta forma, os grupos reológicos adimensionais tornam-se constantes, independentemente da vazão imposta sobre o escoamento. As equações adimensionais ficam como mostradas a seguir.

2.4.1. SMD adimensionalizado

A adimensionalização do modelo SMD, como mostrado no trabalho de P.R. de Souza Mendes, M.F. Naccache, P.R. Vargas, F.H. Marchesini [1], é dado por:

$$\eta^*(\dot{\gamma}^*) = (1 - e^{-(J+1)\dot{\gamma}^*}) \left(\frac{1}{\dot{\gamma}^*} + \dot{\gamma}^{*n-1} \right) \quad (2.14)$$

onde

$$\tau^* = \frac{\tau}{\tau_0} \quad (2.14a)$$

$$\dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (2.14b)$$

$$\tau_0 = \eta_0 \dot{\gamma}_0 \quad (2.14c)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_0}{k} \right)^{1/n} \quad (2.14d)$$

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \quad (2.14e)$$

As principais alterações na forma da adimensionalização foram:

- Deborah reológico deixa de ser dependente da velocidade ($De = \lambda v_c / L$) e passa a depender apenas da taxa de deformação e da elasticidade;
- Surgimento da constante J (*Jump number*) que caracteriza o tamanho da região de decaimento *power-law*.

2.4.2. Oldroyd-B

A adimensionalização desta equação foi obtida considerando como parâmetros característicos τ_0 para tensão e $\dot{\gamma}_0$ para a taxa de deformação.

$$\boldsymbol{\tau}^* + De_{r1} \check{\boldsymbol{\tau}}^* = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^* + De_{r2} \check{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}^* \quad (2.15)$$

onde

$$\tau_0 = \eta_0 \dot{\gamma}_0 \quad (2.15a)$$

$$\boldsymbol{\tau}^* = \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_0} \quad (2.14a)$$

$$\check{\boldsymbol{\tau}}^* = \frac{\check{\boldsymbol{\tau}}}{\tau_0 \dot{\gamma}_0} \quad (2.15b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^* = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{\dot{\gamma}_0} \quad (2.15c)$$

$$\check{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}^* = \frac{\check{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}{(\dot{\gamma}_0)^2} \quad (2.15d)$$

$$De_{r1} = \dot{\gamma}_0 \lambda_1 \quad (2.15e)$$

$$De_{r2} = \dot{\gamma}_0 \lambda_2 \quad (2.15f)$$

2.4.3.Souza Mendes

A adimensionalização desta equação tem como parâmetros característicos τ_0 para tensão e $\dot{\gamma}_1$ para a taxa de deformação. Diferentemente da equação de Oldroyd-B, em que a viscosidade era constante, aqui, $\dot{\gamma}_0$ representa a mudança da função viscosidade de η_0 para um decaimento exponencial. Na figura 2.4 anteriormente mostrada, verifica-se que aumentando o valor de $\dot{\gamma}$ encontra-se o ponto de transição da viscosidade entre o decaimento exponencial e o decaimento *power-law* definido no $\dot{\gamma}_1$. Ao se continuar aumentando o valor de $\dot{\gamma}$ encontra-se o ponto de transição da viscosidade entre o decaimento *power-law* e a viscosidade em η_∞ , que ocorre em $\dot{\gamma}_2$.

A forma final da equação de Souza Mendes adimensionalizada é mostrada a seguir:

$$\tau^* + \text{De}_1(\dot{\gamma}^*)\check{\tau}^* = \eta^*(\dot{\gamma}^*)(\dot{\gamma}^* + \text{De}_2(\dot{\gamma}^*)\check{\check{\gamma}}^*) \quad (2.16)$$

$$\eta^*(\dot{\gamma}^*) = (1 - e^{-(J+1)\dot{\gamma}^*})\left(\frac{1}{\dot{\gamma}_*} + \dot{\gamma}^{*n-1}\right) + \eta_\infty^* \left[1 - e^{-\eta_\infty^* \dot{\gamma}^{*1-n}}\right] \quad (2.16a)$$

$$\text{De}_{r1}(\dot{\gamma}^*) = (\text{De}_{01} - \text{De}_{\infty 1})e^{-(J+1)\dot{\gamma}^*} + \text{De}_{\infty 1} \quad (2.16b)$$

$$\text{De}_{r2}(\dot{\gamma}^*) = (\text{De}_{02} - \text{De}_{\infty 2})e^{-(J+1)\dot{\gamma}^*} + \text{De}_{\infty 2} \quad (2.16c)$$

onde

$$\tau^* = \frac{\tau}{\tau_0} \quad (2.15a)$$

$$\check{\tau}^* = \frac{\check{\tau}}{\tau_0 \dot{\gamma}_1} \quad (2.16d)$$

$$\dot{\gamma}^* = \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_1} \quad (2.14b)$$

$$\check{\check{\gamma}}^* = \frac{\check{\check{\gamma}}}{(\dot{\gamma}_1)^2} \quad (2.16e)$$

$$\tau_0 = \eta_0 \dot{\gamma}_0 \quad (2.15a)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \left(\frac{\tau_0}{k}\right)^{1/n} \quad (2.16f)$$

$$\dot{\gamma}_2 = \left(\frac{k}{\eta_\infty}\right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.16g)$$

$$J = \frac{\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_0}{\dot{\gamma}_0} \quad (2.14e)$$

$$\eta_{\infty}^* = \left(\frac{\dot{\gamma}_1}{\dot{\gamma}_2} \right)^{1-n} \quad (2.16h)$$

$$De_{01} = \dot{\gamma}_1 \lambda_{01} \quad (2.16i)$$

$$De_{\infty 1} = \dot{\gamma}_1 \lambda_{\infty 1} \quad (2.16j)$$

$$De_{02} = \dot{\gamma}_1 \lambda_{02} \quad (2.16k)$$

$$De_{\infty 2} = \dot{\gamma}_1 \lambda_{\infty 2} \quad (2.16l)$$

As principais alterações na forma da adimensionalização foram citadas na adimensionalização do modelo SMD.