

## **2**

### **Revisão Bibliográfica**

#### **2.1.**

##### **Introdução**

Análises determinísticas admitem que os valores dos parâmetros do solo são fixos e conhecidos. Entretanto, incertezas provenientes da impossibilidade de reprodução das condições de campo em laboratório, da perturbação do solo devida à instalação de instrumentos, das ocorrências geomecânicas não detectadas durante a campanha de sondagens, da variabilidade inerente ao maciço, entre outras, afetam de forma sistemática ou aleatória a previsão de fatores de segurança ou deformações em análises geotécnicas.

O estudo da influência dessas incertezas sobre os cálculos determinísticos, com a possibilidade da quantificação do risco de insucesso associado a um projeto geotécnico, desenvolveu-se durante as últimas décadas com base nas teorias de probabilidade e estatística.

Este capítulo apresenta, inicialmente, conceitos de probabilidade e estatística, e em seguida, são mostrados alguns avanços da aplicação desses conceitos em diversas áreas da geotecnia.

#### **2.2.**

##### **Conceitos de Probabilidade**

A análise probabilística consiste na previsão comportamental de uma determinada experiência. Entende-se por experiência um processo aleatório, em geral um processo físico, que é controlado total ou parcialmente por um mecanismo de casualidade, sorte ou azar (chance).

A característica de interesse de uma experiência que assume valores diferentes e não previsíveis como resposta é denominada de variável aleatória. A variável aleatória pode ser considerada discreta, quando assume apenas certos

valores específicos, ou contínua, quando pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo.

Em uma experiência, o conjunto de todas as respostas é denominado de espaço amostral. Em geral, o espaço amostral é dito discreto se possui um número contável de elementos. Se os elementos de um espaço amostral constituem um contínuo (por exemplo, todos os pontos de uma reta ou plano) o espaço amostral é dito contínuo. A caracterização de um espaço amostral em discreto ou contínuo é determinada através do tipo de variável aleatória em questão.

Qualquer subconjunto de um espaço amostral é definido como evento, enquanto que o conjunto de todas as observações realizadas é denominado de população.

### 2.2.1. Função de probabilidade

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua qualquer, o comportamento probabilístico do fenômeno aleatório pode ser descrito por uma função matemática conhecida por função densidade de probabilidade  $f(x)$ . Objetivamente, a função densidade de probabilidade descreve a forma da curva de distribuição da probabilidade de ocorrência de cada valor da variável aleatória. Dentre as formas mais usuais, podem ser citadas as distribuições normal ou gaussiana, lognormal, gama, qui-quadrado e  $t$  de Student, entre outras.

Para a estimativa da probabilidade de ocorrência da variável aleatória ( $X$ ) ser menor ou igual a um certo valor  $t$ , utiliza-se a função de distribuição  $F(t)$  definida por:

$$P[X \leq t] = F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad [2.1]$$

A estimativa da probabilidade de ocorrência da variável  $X$  em certo intervalo  $[a, b]$ , é dada por:

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx \quad [2.2]$$

Portanto, a probabilidade de ocorrência de  $X$  em um determinado intervalo é a área sob a função  $f(X)$  para esse intervalo. Na geotecnia, a probabilidade de ruptura em uma análise de equilíbrio limite é obtida calculando-se a área sob a função de probabilidade de um fator de segurança (FS), para valores de FS menores ou iguais a um. Essa área é ilustrada na figura 2.1.

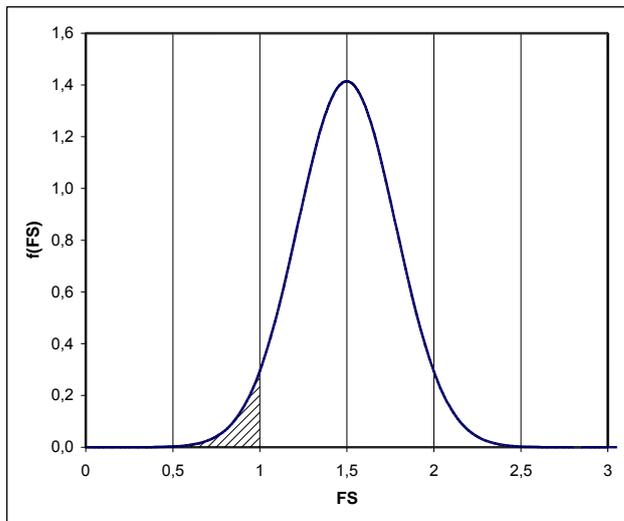


Figura 2.1. Área hachurada representando a probabilidade de  $FS \leq 1$

### 2.2.2. Momentos probabilísticos

Para um estudo detalhado da densidade de probabilidade, utilizam-se medidas estatísticas que descrevem a locação e a dispersão da distribuição. A locação é dada pela média  $\mu$  ou valor esperado  $E[X]$  da densidade de probabilidade da variável aleatória contínua  $X$  correspondente, definida por:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad [2.3]$$

Para estimativa da variação da densidade de probabilidade, utiliza-se o segundo momento sobre a média, variância, definida por:

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \quad [2.4]$$

Uma medição mais concreta da variabilidade da densidade probabilística é dada pelo desvio padrão. O desvio padrão é definido como a raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} \quad [2.5]$$

O terceiro momento é usado para descrever a simetria ou assimetria da distribuição, enquanto o quarto momento descreve a curtose ou “falta de pico” da densidade de probabilidade. O conhecimento da forma exata da densidade de probabilidade só é possível através do conhecimento de todos os momentos probabilísticos.

### 2.2.3. Algumas distribuições probabilísticas

Apresentam-se, a seguir, algumas distribuições probabilísticas amplamente utilizadas em análises de variáveis aleatórias contínuas.

#### 2.2.3.1. Distribuição normal

As origens da distribuição normal remontam a Gauss em seus trabalhos sobre erros de observações astronômicas, por volta de 1810, donde o nome de distribuição gaussiana para tal modelo.

A distribuição gaussiana caracteriza-se por uma simetria, que se aproxima de uma seção em corte de um sino (figura 2.2). A equação que descreve seu comportamento é:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad [2.6]$$

para  $x$  variando entre  $-\infty$  e  $+\infty$ .

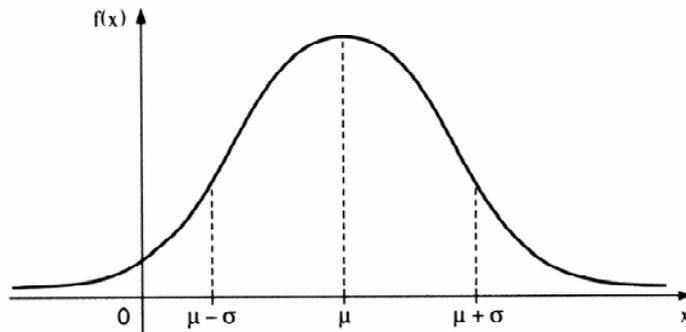


Figura 2.2. Gráfico de uma distribuição gaussiana com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$

Devido ao fato da equação 2.6 não poder ser integrada de uma forma fechada dentro de um intervalo qualquer, as probabilidades relacionadas à distribuição normal são obtidas a partir de integração numérica, sendo os resultados dispostos em forma de tabelas especiais padronizadas para uma densidade normal com média  $\mu = 0$  e desvio padrão  $\sigma = 1$  (apêndice 1).

Substituindo na equação 2.6 os valores de  $\mu$  e  $\sigma$  utilizados para padronização, temos uma distribuição padrão ou reduzida, cuja expressão é:

$$\phi(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \quad [2.7]$$

onde  $Z$  é uma variável aleatória padronizada definida por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad [2.8]$$

A utilização freqüente da distribuição normal é justificada pelo Teorema Central do Limite. Esse teorema diz que a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuições quaisquer é aproximadamente normal, desde que o número ( $n$ ) de termos da soma seja suficientemente grande. Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que  $n$  aumenta.

### 2.2.3.2. Distribuição lognormal

Sendo Y uma variável aleatória com distribuição gaussiana e  $\ln(X)=Y$ , a variável aleatória X possui densidade lognormal. A densidade lognormal ocorre, portanto, sempre que o logaritmo de uma variável aleatória for normalmente distribuído.

A densidade lognormal é encontrada tomando-se a exponencial de uma variável aleatória normal. Esta distribuição é caracterizada por possuir somente valores positivos. Sua forma é ilustrada na figura 2.3.

A equação que descreve o comportamento da função lognormal é:

$$f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(x) - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad [2.9]$$

para  $x > 0$ . Com os valores de média e variância determinados a partir das seguintes equações:

$$\mu = \ln(E[x]) - 0,5 \cdot \left[ \ln \left( 1 + \left( \frac{s}{E[x]} \right)^2 \right) \right] \quad [2.10]$$

$$\sigma^2 = \ln \left( 1 + \left( \frac{s}{E[x]} \right)^2 \right) \quad [2.11]$$

onde s e  $E[x]$  são respectivamente os valores de desvio padrão e média amostral.

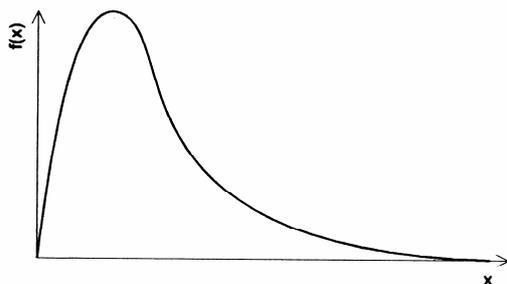


Figura 2.3. Gráfico de uma distribuição lognormal

### 2.2.3.3. Distribuição gama

Uma variável aleatória contínua  $X$ , assumindo valores positivos, tem uma distribuição gama com parâmetros  $\alpha \geq 1$  e  $\beta > 0$ , se sua função for a seguinte:

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad [2.12]$$

onde,  $\Gamma(\alpha)$  é a função gama, dada por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \alpha > 0 \quad [2.13]$$

A figura 2.4 ilustra a função densidade de probabilidade gama para  $\alpha=3$  e  $\beta=1$ . Um caso particular da distribuição gama, para  $\alpha=1$ , é a distribuição exponencial.

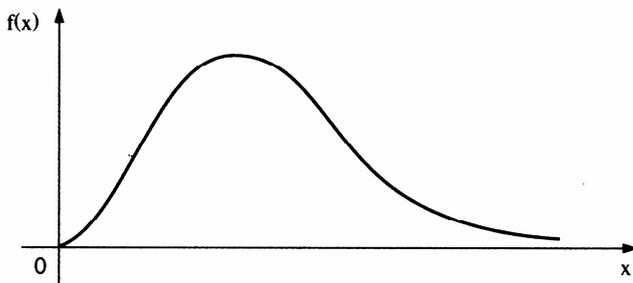


Figura 2.4. Gráfico de uma distribuição gama, com  $\alpha=3$  e  $\beta=1$

### 2.2.3.4. Distribuição qui-quadrado

Uma variável aleatória contínua  $Y$ , com valores positivos tem uma distribuição qui-quadrado com  $v$  graus de liberdade, se sua densidade for dada por:

$$f(y, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} y^{\nu/2-1} e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \quad [2.14]$$

A distribuição qui-quadrado se configura como um caso particular da distribuição gama, é obtida fazendo-se  $\alpha = \nu/2$  e  $\beta = 2$ , com  $\nu > 0$  inteiro. A figura 2.5 apresenta variações da função qui-quadrado, através dos gráficos a, b e c, correspondentes respectivamente, a distribuições com  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\nu = 3$ .

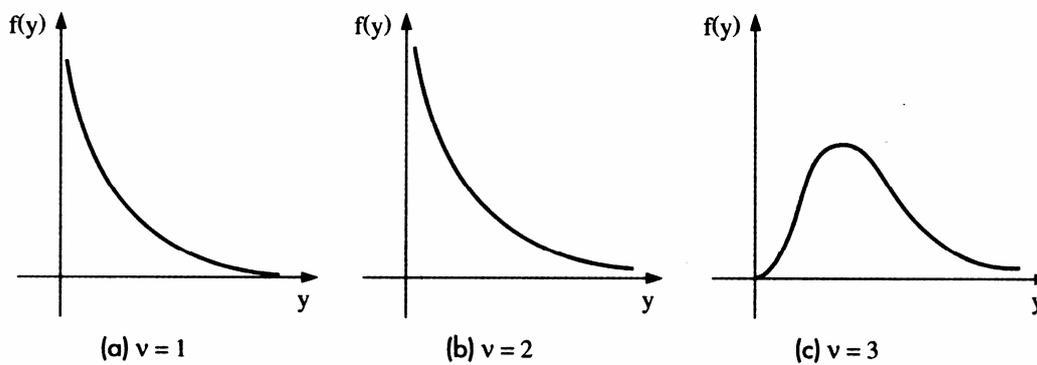


Figura 2.5. Gráficos de uma distribuição qui-quadrado

### 2.2.3.5. Distribuição t de Student

Seja  $Z$  uma variável aleatória normal padronizada e  $Y$  uma variável aleatória independente. Então, a variável aleatória  $t = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$ , de Student, tem densidade definida por:

$$f(t; \nu) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} (1+t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}, -\infty < t < \infty \quad [2.15]$$

A distribuição t de Student é importante em inferências sobre médias populacionais. A figura 2.6 mostra que o gráfico da densidade de t aproxima-se bastante de uma normal ( $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$ ) quando  $\nu$  é grande.

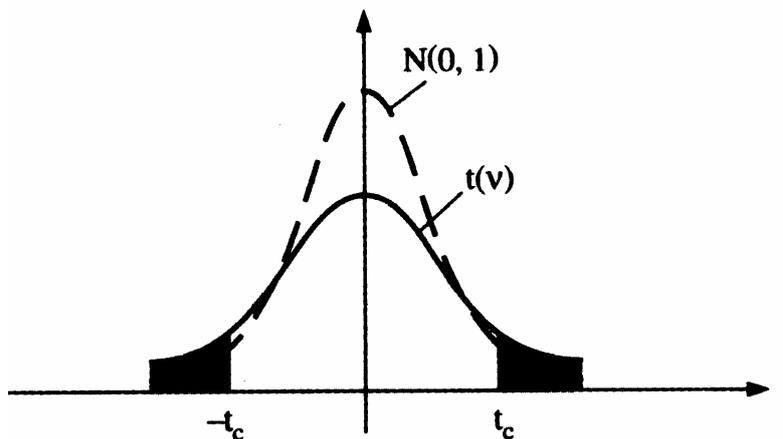


Figura 2.6. Comparação entre a distribuição t de Student e a distribuição normal padrão

### 2.3. Análise estatística

O tratamento estatístico está relacionado à análise de uma coleção de observações, denominada amostra ou conjunto amostral, que visa caracterizar um fenômeno aleatório de interesse e não prever o comportamento do fenômeno em si (análise probabilística).

O tratamento do conjunto amostral pode ser realizado a partir de análise gráfica ou aritmética. A análise gráfica da amostra compreende a classificação da variável aleatória segundo a sua frequência de valores assumidos e a montagem de um gráfico frequência  $\times$  valor, denominado histograma (figura 2.7). A análise aritmética da amostra é realizada através da determinação de parâmetros estatísticos que visam caracterizar a distribuição.

#### 2.3.1. Análise gráfica da amostra

Dado um histograma, o comportamento de uma variável aleatória  $X$  em uma amostra pode ser caracterizado pela sua função de frequência  $t(x)$ . A função de frequência é entendida como a função matemática que descreve a frequência de valores assumidos pela variável aleatória no âmbito amostral, ou seja, é a função que melhor caracteriza a forma do histograma da variável aleatória. A função de frequência é análoga à função de densidade de probabilidade  $f(x)$  da população correspondente, embora estas funções sejam conceitualmente diferentes.

A população da variável aleatória possui uma função densidade de probabilidade definida, mas caso sejam realizadas diversas amostragens desta mesma população, pode-se encontrar diversas funções de frequência diferentes entre si.

Em um histograma pode-se usar uma função de frequência absoluta ou relativa. A função de frequência absoluta mostra diretamente o número ou a porcentagem de recorrência de uma variável aleatória em um determinado intervalo. A função de frequência relativa, também chamada de densidade de frequência, é obtida dividindo-se a frequência absoluta pela amplitude do intervalo da variável aleatória em análise.

Portanto, no caso de utilizar-se a função de frequência relativa, a frequência absoluta de uma variável aleatória em um determinado intervalo é obtida a partir do cálculo da área do retângulo, cuja base é a amplitude do intervalo e a altura é a função de frequência relativa.

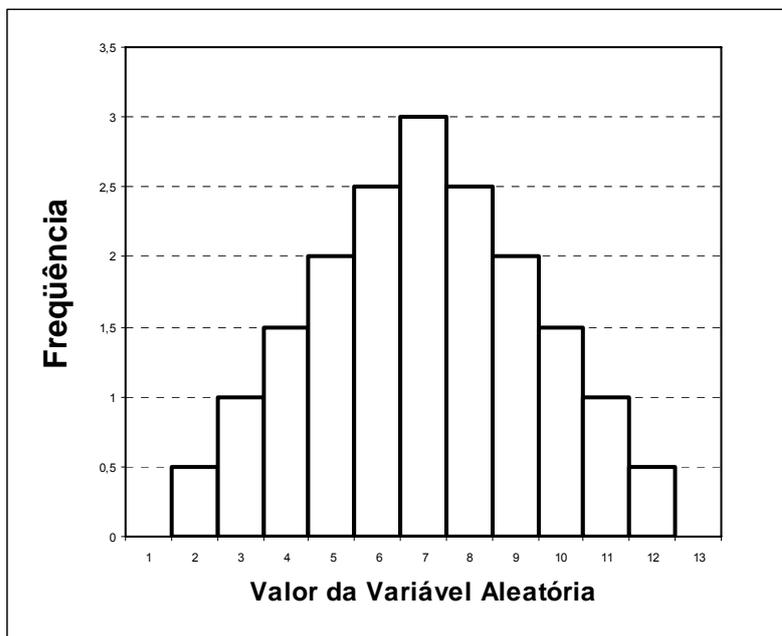


Figura 2.7. Exemplo de um histograma de uma variável aleatória

### 2.3.2. Análise aritmética da amostra

Os parâmetros mais comumente utilizados são a média amostral (média aritmética) e a variância amostral. A média amostral de uma variável aleatória  $X$  é definida por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [2.16]$$

Deve-se atentar para a diferença entre a média amostral ( $\bar{x}$ ) e a média da distribuição de probabilidade ( $\mu$ ). Enquanto a primeira relaciona os valores de um determinado conjunto de observações, a segunda indica a média de toda a população do fenômeno aleatório.

A variância amostral relaciona-se com os quadrados dos desvios da variável  $x$  em relação à média  $\bar{x}$ , sendo definida por:

$$s^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad [2.17]$$

O desvio padrão amostral é definido como a raiz quadrada da variância. Em termos matemáticos temos:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad [2.18]$$

Outro parâmetro muito utilizado é o coeficiente de variação da amostra,  $Cv(x)$ , o qual representa o desvio padrão amostral como percentagem da média, conforme indicado na seguinte expressão:

$$Cv(x) = \frac{s(x)}{\bar{x}} \quad [2.19]$$

### 2.3.3.

#### Obtenção de dados estatísticos para análises probabilísticas em estudos geotécnicos

Para a aplicação de métodos probabilísticos em estudos geotécnicos, são necessários os valores estatísticos de média e variância dos parâmetros do solo, selecionados como variáveis aleatórias.

No caso do peso específico, por exemplo, as equações 2.16 e 2.17 podem ser aplicadas para os cálculos de média e variância deste parâmetro. No caso do intercepto efetivo de coesão ( $c'$ ) e da tangente do ângulo de atrito efetivo ( $tg\phi'$ ), têm-se tratamentos estatísticos diferentes que dependem da forma com a qual estes parâmetros foram obtidos.

No caso da obtenção de  $c'$  e  $tg\phi'$  a partir de ensaios de cisalhamento direto, os valores médios são obtidos através de regressão linear dos pares ( $\sigma'$  e  $\tau$ ) de  $N$  ensaios disponíveis, sendo  $\sigma'$  a tensão efetiva normal ao plano de ruptura e  $\tau$  a tensão cisalhante de ruptura. As variâncias  $V[c']$  e  $V[tg\phi']$  segundo Neter et al (1982) são dadas por:

$$V[c'] = V[\tau] \left[ \frac{1}{N} + \frac{E[\sigma']}{\sum_{i=1}^N (\sigma'_i - E[\sigma'])^2} \right] \quad [2.20]$$

$$V[tg\phi'] = \frac{V[\tau]}{\sum_{i=1}^N (\sigma'_i - E[\sigma'])^2} \quad [2.21]$$

$$V[\tau] = \frac{\sum_{i=1}^N (\tau_i - \tau_{est})^2}{N - 2} \quad [2.22]$$

onde:

$E[\sigma']$  = média dos valores  $\sigma'_i$

$\tau_{est}$  = valor de  $\tau$  obtido a partir da reta dos mínimos quadrados para cada valor de  $\sigma'$

No caso da obtenção de  $c'$  e  $tg\phi'$  a partir de ensaios triaxiais, a representação por pontos é feita no espaço  $p'$ - $q$ , onde  $p'$  e  $q$  são respectivamente a semi-soma entre tensões efetivas principais maior e menor e a semi-diferença entre as tensões principais, totais ou efetivas, maior e menor (Lambe e Whitman, 1969). A reta de regressão linear dos pontos ( $p'$ ,  $q$ ) obtidos nos ensaios é definida pelo intercepto  $a'$  e inclinação  $\alpha'$ . Analogamente aos ensaios de cisalhamento direto, estes valores são os próprios valores médios  $E[a']$  e  $E[tg\alpha']$ . As variâncias  $V[a']$  e  $V[tg\alpha']$  são obtidas das equações 2.20 e 2.21 trocando-se  $\sigma'$  e  $\tau$  por  $p'$  e  $q$ , respectivamente. Para a determinação de  $V[c']$  e  $V[tg\phi']$  deve-se retornar ao espaço  $\sigma$ - $\tau$  através das seguintes relações descritas por Lima (1991):

$$E[c'] = \frac{E[a']}{(1 - E[tg\alpha']^2)^{1/2}} \quad [2.23]$$

$$E[tg\phi'] = \frac{E[tg\alpha']}{(1 - E[tg\alpha']^2)^{1/2}} \quad [2.24]$$

$$V[c'] = \frac{1}{(1 - E[tg\alpha']^2)} \left[ \frac{(a \cdot E[tg\alpha'])^2}{(1 - E[tg\alpha']^2)} V[tg\alpha'] + V[a'] \right] \quad [2.25]$$

$$V[tg\phi'] = \frac{V[tg\alpha']}{(1 - E[tg\alpha']^2)^3} \quad [2.26]$$

Quando não se dispõem de dados para realizarem-se as análises descritas acima e apenas são conhecidos os valores médios dos parâmetros, é possível estimarem-se os desvios padrão e conseqüentemente as variâncias a partir de coeficientes de variação existentes na literatura, conforme a equação 2.19. A tabela 2.1 apresenta alguns valores máximos e mínimos de coeficientes de variação para os respectivos parâmetros geotécnicos.

Tabela 2.1. Coeficientes de variação de parâmetros geotécnicos

Parâmetro	Coeficiente de variação (%)		Referência
	Mínimo	Máximo	
Peso específico ( $\gamma$ )	3	7	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Ângulo de atrito efetivo ( $\phi'$ )	2	13	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Resistência não drenada ( $S_u$ )	13	40	Harr (1984), Kulhawy (1992), Duncan (1999), Lacasse e Nadim (1997)
Razão de resistência não drenada ( $S_u/\sigma'_v$ )	5	15	Duncan (1999), Lacasse e Nadim (1997)
Índice de compressão ( $C_c$ )	10	37	Duncan (1999), Harr (1984), Kulhawy (1992)
Tensão de pré-adensamento ( $\sigma'_p$ )	10	35	Harr (1984), Duncan (1999), Lacasse e Nadim (1997)
Coeficiente de permeabilidade de argilas saturadas ( $k$ )	68	90	Duncan (1999), Harr (1984)
Coeficiente de permeabilidade de argilas não saturadas ( $k$ )	130	240	Harr (1984), Benson et al. (1999)
Coeficiente de adensamento vertical ( $cv$ )	33	68	Duncan (1999)
Número de golpes do SPT ( $N$ )	15	45	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Resistência de ponta do CPT elétrico ( $q_c$ )	5	15	Kulhawy (1992)
Resistência de ponta do CPT mecânico ( $q_c$ )	15	37	Harr (1984), Kulhawy (1992)
Resistência do ensaio dilatométrico ( $q_{DMT}$ )	5	15	Kulhawy (1992)
Resistência não drenada do ensaio de palheta ( $S_u$ )	10	20	Kulhawy (1992)
Peso específico de solos residuais ( $\gamma$ )	1,5	9,4	Guedes (1997)
Intercepto efetivo de coesão de solo residual gnaissico jovem ( $c'$ )	13,4	18,4	Guedes (1997)
Tangente do ângulo de atrito efetivo de solos residuais ( $tg\phi'$ )	2,4	16,1	Guedes (1997)
Peso específico de argilas sedimentares ( $\gamma$ )	2	7	Guedes (1997)
Tangente do ângulo de atrito efetivo de argilas sedimentares ( $tg\phi'$ )	3	6	Guedes (1997)
Intercepto efetivo de coesão de argilas sedimentares ( $c'$ )	8	14	Guedes (1997)
Peso específico de solo residual gnaissico jovem ( $\gamma$ )	1	4	Guedes (1997)

### 2.3.4.

#### Correções da variância devidas à variabilidade espacial do solo

A variância obtida com base em ensaios realizados com pequena distância entre amostras é denominada pontual e pode representar uma heterogeneidade maior do que a real.

A heterogeneidade do solo que realmente atua em uma análise geotécnica é correspondente à variância média do parâmetro de interesse ao longo da distância total de campo envolvida nesta análise. Esta variância é dita espacial. Para distâncias totais pequenas, as variâncias pontual e espacial são próximas, porém para longas distâncias totais, as oscilações de valores do parâmetro tendem a se compensar e a variância espacial torna-se menor que a pontual.

Para a correção da variância pontual utiliza-se uma razão entre desvios padrão, dada por:

$$\Gamma = \frac{\sigma_{(e)}}{\sigma_{(p)}} \quad [2.27]$$

onde:  $\sigma_{(e)}$  é o desvio padrão espacial e  $\sigma_{(p)}$  o desvio padrão pontual. Elevando-se a equação 2.27 ao quadrado, obtém-se:

$$\Gamma^2 = \frac{\sigma_{(e)}^2}{\sigma_{(p)}^2} \therefore \sigma_{(e)}^2 = \Gamma^2 \sigma_{(p)}^2 \quad [2.28]$$

onde:  $\sigma_{(e)}^2$  é a variância espacial e  $\sigma_{(p)}^2$  a variância pontual. Portanto,  $\Gamma^2$  é a função de variância necessária para corrigir a variância pontual. Segundo Vanmarke (1977-A), essa função de variância torna-se inversamente proporcional ao comprimento total considerado, assumindo a seguinte configuração para um caso unidimensional:

$$\Gamma^2 = \frac{\delta}{\Delta z} \quad [2.29]$$

onde:  $\delta$  é a distância de autocorrelação ou escala de flutuação do parâmetro do solo e  $\Delta z$  é o comprimento total considerado em uma dada direção. Se  $\Delta z \leq \delta$ , a função de variância é igual a 1, ou seja, a variância pontual é igual à espacial. De acordo com Vanmarcke (1977-A), a estimativa da escala de flutuação  $\delta$  pode ser feita a partir de um conjunto de observações equidistantes, ao longo de uma determinada direção, conforme os seguintes procedimentos:

- I. Cálculo da média e desvio padrão do conjunto de dados;
- II. Cálculo das médias espaciais de conjuntos de 2 pontos adjacentes e do desvio padrão destas médias;
- III. Obtenção de  $\Gamma(2)$  (função de variância para dois pontos) a partir da equação [2.27];
- IV. Repetir os procedimentos I e II para conjuntos de 3,4,...,n pontos, obtendo-se assim  $\Gamma(3)$ ,  $\Gamma(4)$ ,...,  $\Gamma(n)$ .
- V. Construir o gráfico  $\Gamma(n)$  x n. A curva obtida deverá se aproximar da teórica, que é dada por:

$$\Gamma(n) = \sqrt{\frac{\delta}{n \cdot \Delta z}} \quad [2.30]$$

- VI. Para um valor de n, cujo o valor teórico de  $\Gamma(n)$  se aproxime do experimental, estima-se a escala de flutuação:

$$\delta = n \cdot \Gamma_{(n)}^2 \cdot \Delta z \quad [2.31]$$

Existem poucos registros de valores de escala de flutuação na literatura. A tabela 2.2 mostra alguns valores. Segundo Guedes (1997), a estimativa de  $\delta$  é trabalhosa, porém não é muito variável. Portanto, se existirem informações sobre o seu valor para o solo de uma determinada região, é provável que, para o mesmo solo em outra região, este valor possa ser adotado.

Tabela 2.2. Valores de escala de flutuação

Fonte	Solo	Direção	Parâmetro	$\delta$ (m)
Alonso (1976)	Areia	Vertical	Resistência de ponta (ensaio CPT)	2,2
		Vertical	Razão de atrito (ensaio CPT)	1,3
	Argila	Vertical	Resistência de ponta (ensaio CPT)	1,1
	Silte argiloso	-	Teor de umidade	12,7
		-	Fração argila	8,7
		-	Fração silte	6,5
		-	Peso específico	7,9
		-	Índice de vazios	10,5
	Cascalho	-	Limite de liquidez	8,7
	Vanmarcke (1977)	Argila	Vertical	Porosidade
Areia		Vertical	Resistência de ponta (ensaio CPT)	1,2
		Vertical	Teor de umidade	2,7
		Vertical	Índice de vazios	3,0
		Vertical	$N_{SPT}$	2,4
Horizontal		Índice de compressibilidade	55,0	
Argila		Superfície de ruptura horizontal	Resistência não drenada	5,0
	Resistência não drenada		46,0	

### 2.3.5. Inferência estatística

Os conceitos de probabilidade apresentados no início deste capítulo mostram que, modelos teóricos, identificados por parâmetros, são utilizados para representar o comportamento da população de uma determinada variável aleatória. Com base nos conceitos de estatística, tem-se a obtenção do comportamento de uma variável aleatória a partir da observação de uma amostra.

Neste item são apresentados argumentos estatísticos para que sejam feitas afirmações sobre as características de uma população, com base em informações dadas por amostras. Portanto, a inferência estatística visa o uso de uma amostra para concluir sobre o todo.

A condição para que seja válida a aplicação da teoria probabilística a uma amostra, é que esta seja aleatória. Uma amostra de tamanho  $n$  obtida a partir de uma população de tamanho  $N$ , é dita aleatória se cada subconjunto de  $n$  elementos tiver a mesma probabilidade de ser selecionado.

A partir do Teorema Central do Limite, demonstra-se que tomando várias amostras de uma população normalmente distribuída, estas possuem valores médios diferentes. A variável aleatória média amostral ( $\bar{X}$ ) é, neste caso, normalmente distribuída, desde que o número de elementos da amostra seja suficientemente grande (por exemplo,  $n > 30$  elementos). Neste caso os limites máximo e mínimo da média da população ( $\mu$ ) são:

$$\mu_{máx,mín} = \bar{X} \pm Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad [2.32]$$

Para pequenas amostras ( $n < 30$ ), utiliza-se a distribuição t de Student para inferências sobre parâmetros populacionais. Desta forma, os limites máximo e mínimo para a média da população são:

$$\mu_{máx,mín} = \bar{X} \pm t_{\alpha} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad [2.33]$$

onde:  $t_{\alpha}$  = é o valor obtido através da função de Student, representada pela equação [2.15], para um nível de confiança  $\alpha$ .

A partir da equação a seguir, resultante de uma manipulação algébrica da equação 2.33, é possível obter-se o número mínimo de elementos ( $n$ ) que deve possuir uma amostra para que sejam obtidos valores de média e variância com determinada acurácia.

$$\frac{\mu - \bar{X}}{s} = \left| \frac{t_{\alpha}}{\sqrt{n}} \right| \quad [2.34]$$

Sendo  $\Delta$  a acurácia exigida no projeto, a condição  $\mu - \bar{X} < \Delta$  tem que ser satisfeita. Desta forma, tem-se:

$$\frac{\mu - \bar{X}}{s} < \frac{\Delta}{s} \therefore \left| \frac{t_{\alpha}}{\sqrt{n}} \right| < \frac{\Delta}{s} \quad [2.35]$$

Com base na equação 2.35, são definidos os seguintes passos para a obtenção do número mínimo de elementos para uma amostra:

- I. Inicialmente são escolhidos os valores de acurácia  $\Delta$  e nível de confiança  $\alpha$ .
- II. Estima-se o desvio padrão ( $s$ ), com base em  $n$  valores de uma amostra para a área investigada ou através de coeficientes de variação disponíveis na literatura. A primeira alternativa tem a vantagem de ser específica;
- III. Com o argumento  $\Delta/s$  é possível entrar na tabela 2.3 e determinar-se o número

mínimo de elementos para a condição  $\left| \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \right| < \frac{\Delta}{s}$ .

Tabela 2.3. Valores de  $\tau = \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}$  em função de  $n$  e  $\alpha$

$\tau$				$\tau$			
n	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	n	$\alpha = 90\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
1	-	-	-	18	0,410	0,497	0,683
2	4,465	8,985	45,013	19	0,398	0,482	0,660
3	1,686	2,484	5,730	20	0,387	0,468	0,640
4	1,177	1,591	2,920	21	0,376	0,455	0,621
5	0,953	1,241	2,059	22	0,367	0,443	0,604
6	0,823	1,050	1,646	23	0,358	0,432	0,558
7	0,734	0,925	1,401	24	0,350	0,422	0,573
8	0,670	0,836	1,237	25	0,342	0,413	0,559
9	0,620	0,769	1,118	26	0,335	0,404	0,547
10	0,580	0,715	1,028	27	0,328	0,396	0,535
11	0,546	0,672	0,955	28	0,322	0,388	0,524
12	0,518	0,635	0,897	29	0,316	0,380	0,513
13	0,494	0,604	0,847	30	0,310	0,373	0,503
14	0,473	0,577	0,805	40	0,266	0,315	0,412
15	0,455	0,554	0,769	60	0,216	0,256	0,344
16	0,438	0,533	0,737	120	0,151	0,180	0,239
17	0,423	0,514	0,708	$\infty$	0	0	0

## 2.4. Métodos Probabilísticos

Apresentam-se, a seguir, três métodos probabilísticos frequentemente utilizados no meio geotécnico. Os dois primeiros métodos, do Segundo Momento de Primeira Ordem e das Estimativas Pontuais, são ditos indiretos ou aproximados pelo segundo momento, pois assumem uma distribuição probabilística para uma variável aleatória dependente, denominada “função de desempenho”, sendo que, sua média e seu desvio padrão são obtidos a partir das médias e desvios padrão das variáveis independentes.

O terceiro método, denominado de simulação de Monte Carlo, é um método direto, pois a distribuição da variável aleatória dependente é obtida a partir da geração de um determinado número de valores para as variáveis aleatórias independentes.

### 2.4.1. Método do Segundo Momento de Primeira Ordem

Em geral, os métodos probabilísticos utilizam técnicas para avaliação aproximada somente dos dois primeiros momentos. Os demais momentos, relativos a simetria e curtose da distribuição, são usualmente desprezados. Por este fato, essas metodologias são classificadas como “aproximadas pelo segundo momento”. Entre as técnicas de aproximação pelo segundo momento, destaca-se a de aproximação da função de desempenho por série de Taylor, designada de segundo momento de primeira ordem.

Sendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os parâmetros ou variáveis envolvidas no cálculo de uma função de desempenho  $G(X)$ , consideradas independentes entre si, os valores médios do vetor  $\bar{X}$  e da função de desempenho  $G(\bar{X})$  são expressos por:

$$\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \quad [2.36]$$

$$G(\bar{X}) = G(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad [2.37]$$

onde o termo  $\bar{x}_i$  indica o valor médio de  $x_i$ .

Desenvolvendo a função de desempenho sob a forma de série de Taylor em torno do valor médio  $\bar{X}$ , obtém-se:

$$G(X) = G(\bar{X}) + \frac{\dot{G}(\bar{X})}{1!}(X - \bar{X})^1 + \frac{\ddot{G}(\bar{X})}{2!}(X - \bar{X})^2 + \dots \quad [2.38]$$

onde  $\dot{G}(\bar{X})$  e  $\ddot{G}(\bar{X})$  são a primeira e segunda derivadas da função de desempenho.

Truncando a série na derivada de primeira ordem e manipulando algébricamente a equação 2.38 obtém-se:

$$G(X) - G(\bar{X}) = \dot{G}(\bar{X})(X - \bar{X}) \quad [2.39]$$

Observa-se, na equação 2.39, que o membro à esquerda da equação indica o desvio do valor da função de desempenho aferida em  $X$  e em relação ao valor médio. Elevando-se ambos os membros da equação 2.39 ao quadrado, obtém-se uma aproximação da variância da função de desempenho. Matematicamente tem-se:

$$V[G(x)] = (\dot{G}(X))^2 \cdot V(X) \quad [2.40]$$

Com a função de desempenho representada por um fator de segurança  $FS$ , a variância da variável fator de segurança recai em um somatório do produto entre os quadrados das derivadas parciais da função  $FS$  em relação a cada parâmetro e suas respectivas variâncias, ou seja:

$$V[FS] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial FS}{\partial x_i} \right]^2 \cdot V[x_i] \quad [2.41]$$

Com a função de desempenho representada por uma estimativa de recalque  $\rho$ , observa-se que a variância da variável aleatória recalque pode ser expressa da seguinte forma:

$$V[\rho] = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right]^2 \cdot V[x_i] \quad [2.42]$$

Portanto, com os valores de média e variância, a probabilidade da função de desempenho situar-se em um dado intervalo é obtida de acordo com a função densidade de probabilidade adotada.

#### 2.4.2. Método das Estimativas Pontuais

O Método das Estimativas Pontuais consiste na estimativa dos dois primeiros momentos da distribuição da função de desempenho  $G(X)$ , a partir de uma função geradora de momentos. Tal função é obtida dividindo-se o processo determinístico em  $2^n$  análises, onde  $n$  é o número de variáveis independentes  $X_i$ . Os valores de tais variáveis aleatórias independentes, acrescidos ou reduzidos de seus desvios padrão, são combinados de todas as formas possíveis, gerando valores para a função de desempenho. Tais valores alimentam a função geradora de momentos.

Rosenblueth (1975) demonstrou que, no caso da função de desempenho  $G(X)$  ser dependente de duas variáveis ( $n = 2$ ), a função geradora de momentos para o cálculo do valor médio da função de desempenho é dada por:

$$G(\bar{X}) = p_{++}G(X)_{++} + p_{+-}G(X)_{+-} + p_{-+}G(X)_{-+} + p_{--}G(X)_{--} \quad [2.43]$$

onde:

$p_{++}$  = probabilidade de ocorrência simultânea dos valores das duas variáveis serem acrescidos de seus desvios padrão;

$p_{+-}$  e  $p_{-+}$  = probabilidade de ocorrência simultânea de uma variável ser acrescida e a outra subtraída, de seus respectivos desvios padrão;

$p_{..}$  = probabilidade de ocorrência simultânea dos valores das duas variáveis serem subtraídas de seus desvios padrão;

$G(X)_{++}$  = valor da função de desempenho considerando os valores das duas variáveis acrescidos de seus desvios padrão;

$G(X)_{+-}$  e  $G(X)_{-+}$  = valor da função de desempenho considerando a ocorrência simultânea de uma variável acrescida e a outra subtraída, de seus respectivos desvios padrão;

$G(X)_{--}$  = valor da função de desempenho considerando os valores das duas variáveis subtraídos de seus desvios padrão.

Para o cálculo da variância, tem-se a seguinte equação:

$$V[G(x)] = p_{++}G(X)^2_{++} + p_{+-}G(X)^2_{+-} + p_{-+}G(X)^2_{-+} + p_{--}G(X)^2_{--} - [G(\bar{X})]^2 \quad [2.44]$$

No caso das duas variáveis aleatórias independentes possuírem distribuições simétricas, as probabilidades  $p_{++}$ ,  $p_{+-}$ ,  $p_{-+}$  e  $p_{--}$  serão todas iguais a 1/4.

A probabilidade da função de desempenho situar-se em um dado intervalo é obtida de forma idêntica à descrita para o método do Segundo Momento de Primeira Ordem.

### 2.4.3. Simulação de Monte Carlo

A Simulação de Monte Carlo consiste na geração aleatória de um determinado número,  $N$ , de valores para as variáveis aleatórias independentes. Com estes valores são realizadas  $N$  análises determinísticas com base em uma determinada função de desempenho  $G(X)$  dependente. O conjunto dos valores obtidos através da função  $G(X)$  é tratado como amostra de uma população e, desta forma, os valores de média e desvio padrão da função de desempenho são obtidos, respectivamente, a partir das seguintes equações:

$$G(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n \frac{G(X)_i}{N} \quad [2.45]$$

$$V[G(X)] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n [G(X)_i - G(\bar{X})]^2 \quad [2.46]$$

A geração dos valores das variáveis independentes pode ser feita por meio de softwares e tem como dados os seus valores médios, os seus desvios padrão e a sua forma de distribuição.

A Simulação de Monte Carlo é uma técnica de amostragem e, por essa razão, seus resultados estão sujeitos a erros. À medida que o número de elementos da amostra de  $G(X)$  aumenta, os erros vão diminuindo e a solução se torna exata quando este número tende ao infinito. Por isso em geral, a Simulação de Monte Carlo exige um número grande de análises determinísticas para chegar-se a uma solução adequada.

## 2.5. Confiabilidade

A relação entre os estados que limitam o sucesso e o insucesso para uma análise de equilíbrio limite, é definida como a diferença entre as densidades de probabilidade da capacidade de resistência ( $R$ ) e da demanda de solicitação ( $S$ ). Matematicamente tem-se:

$$G(X) = R - S \quad [2.47]$$

onde  $G(X)$  é uma função que descreve o desempenho da diferença  $R - S$ , e  $X$  é o vetor de parâmetros necessários para cálculo de  $G(X)$ . A função de desempenho pode ser subdividida em uma região segura ( $G(X) > 0$ ) e uma região instável ( $G(X) < 0$ ). A interseção das duas regiões ( $G(X) = 0$ ) delimita a superfície de estado limite para o sistema  $R - S$ .

Devido à dificuldade de definição das distribuições da capacidade de resistência e da demanda de solicitação, desenvolveram-se formulações que utilizam um índice de confiabilidade, designado por  $\beta$ , no qual considera-se

implicitamente o desempenho de  $G(X)$ . Esta confiabilidade é classificada como relativa, cuja proposta baseia-se no fato de não ser necessário o conhecimento prévio do comportamento absoluto ou global da função de desempenho para estimativa da segurança.

As primeiras medições de confiabilidade foram obtidas através de um índice definido por:

$$\beta = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad [2.48]$$

onde  $\mu_G$  e  $\sigma_G$  denotam o valor médio e o desvio padrão da função de desempenho. O uso da equação 2.48 como quantificação da confiabilidade é baseado no seguinte desenvolvimento:

$$P_f = P[G(X) \leq 0] \quad [2.49]$$

$$P_f = P\left[\frac{G(X) - \mu_G}{\sigma_G} \leq \frac{-\mu_G}{\sigma_G}\right] \quad [2.50]$$

$$P_f = P[Z \leq -\beta] \quad [2.51]$$

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\beta} \phi(Z) dZ \quad [2.52]$$

$$P_f = \phi(-\beta) \quad [2.53]$$

onde  $P_f$  é a probabilidade de ruptura,  $Z$  é uma variável padronizada,  $\phi(Z)$  e  $\phi(-\beta)$  as funções densidade de probabilidade e distribuição acumulada aferidas em  $Z$ .

Neste formato, todas as variáveis aleatórias são transformadas para um espaço de parâmetros  $Z$  padronizados pelas médias de uma transformação

ortogonal na qual:  $E[Z_i] = 0$  e  $V[Z_i] = 1$

Hasofer e Lind (1974) definem o índice de confiabilidade  $\beta$  como sendo a distância mínima entre a origem e a superfície de estado limite que define a ruptura ou o insucesso do sistema no espaço transformado dos parâmetros  $Z$ . Partindo da equação 2.48, o índice  $\beta$  é definido como:

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sigma[R - S]} \quad [2.54]$$

onde  $\bar{R}$  e  $\bar{S}$  denotam os valores médios das distribuições de capacidade de resistência e da demanda de solicitação. O desvio padrão  $\sigma[R - S]$  é, matematicamente, igual a:

$$\sigma[R - S] = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad [2.55]$$

Rearranjando a equação 2.54 para facilidade de compreensão, tem-se:

$$\beta = \frac{\frac{\bar{R}}{\bar{S}} - 1}{\frac{\sigma[R - S]}{\bar{S}}} = \frac{\frac{\bar{R}}{\bar{S}} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma_R^2}{\bar{S}^2} + \frac{\sigma_S^2}{\bar{S}^2}}} = \frac{\frac{\bar{R}}{\bar{S}} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma_R^2 \cdot \bar{R}^2}{\bar{S}^2 \cdot \bar{R}^2} + \frac{\sigma_S^2}{\bar{S}^2}}} \quad [2.56]$$

Definindo-se fator de segurança central  $F\bar{S}$  como sendo a razão entre as médias da capacidade resistiva e da capacidade solicitante ( $F\bar{S} = \bar{R} / \bar{S}$ ), o índice de confiabilidade definido pela equação 2.48 pode ser escrito como:

$$\beta = \frac{F\bar{S} - 1}{\sqrt{F\bar{S}^2 \cdot Cv^2(R) + Cv^2(S)}} \quad [2.59]$$

onde  $Cv(R)$  e  $Cv(S)$  são os coeficientes de variação de  $R$  e  $S$  respectivamente.

Morlá Catalán e Cornell (1976), admitindo distribuição gaussiana para  $FS$ , utilizam um índice de confiabilidade obtido a partir das seguintes considerações algébricas:

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sigma_R} \quad [2.60]$$

$$\beta = \frac{\bar{R}/\bar{S} - 1}{\sigma_R/\bar{S}} \quad [2.61]$$

$$\beta = \frac{F\bar{S} - 1}{\sigma_{FS}} \quad [2.62]$$

Observa-se que, nesta formulação, o desvio padrão do fator de segurança é igual à razão  $\sigma_R/\bar{S}$ .

Chowdhury (1984, 1985, 1994), Chowdhury et al (1997), Christian et al (1992) e Sandroni e Sayão (1992) utilizam, em suas análises, índices de confiabilidade com a mesma definição dada pela equação 2.62.

De uma maneira geral, pode-se dizer que o índice  $\beta$  definido pela equação 2.62 quantifica a segurança através do número de desvios padrão do fator de segurança,  $\sigma_{FS}$ , que separa a média do valor que define a ruptura ( $FS=1$ ).

## 2.6. Risco admissível

O valor da probabilidade de insucesso admissível deve refletir a importância de um projeto. Por exemplo, para um mesmo conjunto de dados, deve-se recomendar que o talude de jusante de uma barragem de terra, sob condições de fluxo permanente, apresente uma probabilidade de ruptura inferior a recomendada para um talude de uma estrada de acesso ao canteiro de obras desta mesma barragem.

Whitmann (1984) apresenta através da figura 2.8 uma avaliação sobre o risco praticado em alguns projetos de engenharia civil. Os resultados da figura fornecem indicações sobre o risco usualmente aceito e, conseqüentemente, um limite superior do risco admissível para cada caso.

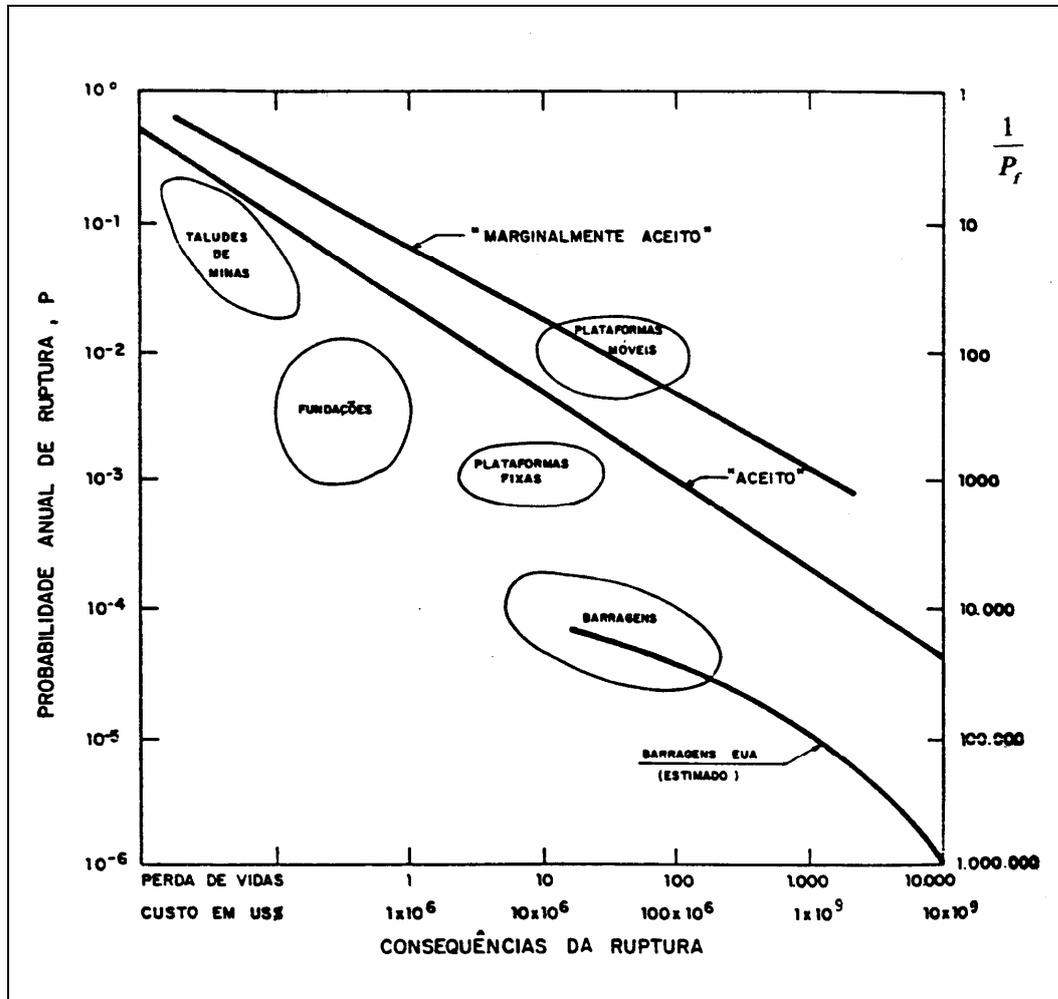


Figura 2.8. Valores usuais de probabilidade e conseqüências de ruptura, Whitman (1984)

## 2.7. Aplicações de probabilidade e estatística na geotecnia

Apresentam-se, a seguir, alguns avanços da aplicação de probabilidade e estatística em análises geotécnicas.

### 2.7.1. Distribuições estatísticas de parâmetros geotécnicos

Lumb (1966) observou que, para quatro tipos diferentes de solos da região de Hong Kong, as distribuições dos limites de Atterberg, da resistência não drenada e dos parâmetros de resistência de Mohr-Coulomb se aproximam da distribuição gaussiana. Com relação aos parâmetros de compressibilidade, Lumb (1966) baseou-se em uma correlação empírica entre coeficiente de compressibilidade ( $C_c$ ) e limite de liquidez, e concluiu que  $C_c$  se comporta como uma variável aleatória normal. O coeficiente de adensamento ( $c_v$ ), segundo o autor, sendo um produto de variáveis aleatórias, tende a possuir uma distribuição lognormal.

Hooper e Butler (1966), trabalhando com resultados de ensaios triaxiais em amostras indeformadas da argila de Londres, observaram que a variável aleatória resistência ao cisalhamento possui comportamento muito próximo de uma distribuição normal.

Lumb (1970), utilizando amostras indeformadas e compactadas de solos residuais de granito, concluiu que a distribuição beta é a que melhor descreve o comportamento global dos parâmetros de resistência ( $c'$  e  $tg\phi'$ ) destes solos.

Matsuo e Kuroda (1974), a partir de resultados de ensaios em diferentes solos argilosos do Japão, concluem que a resistência não drenada, os pesos específicos total e seco e o teor de umidade podem ser considerados variáveis aleatórias gaussianas.

Garzonio (1989) observou que os índices físicos de argilas do plioceno da região de Ancona, na Itália, aparentam ter uma distribuição normal. Entretanto, o autor não observou uma forma definida para as distribuições dos parâmetros de resistência destes solos.

### 2.7.2.

#### Probabilidade e estatística em análises de aterro sobre argila mole

Guedes (1997) avaliou a aplicação dos métodos probabilísticos do Segundo Momento, das Estimativas Pontuais e Simulação de Monte Carlo em uma análise não drenada de estabilidade de um quebra-mar sobre argila mole, com as seguintes conclusões:

- A variabilidade dos pesos específicos influenciou significativamente a probabilidade de ruptura;
- A parcela de variância do fator de segurança correspondente à resistência não drenada representou cerca de 65% da variância total;
- Baixas probabilidades de ruptura foram acompanhadas por fatores de segurança elevados.

Duncan (1999) estudou o efeito de incertezas em previsões de recalques, com base na solicitação de uma camada de argila mole, por uma tensão de 24 kPa, gerada por um aterro. O recalque médio previsto foi de 0,326m, com um desvio padrão de 0,067m e um coeficiente de variação de 21%. Tomando como exemplo um recalque admissível de 0,522m, 60% superior ao recalque médio, o autor obteve uma probabilidade de 1%, associada ao risco do recalque ser inadmissível.

### 2.7.3.

#### Probabilidade e estatística em análises de fundações superficiais

Duncan (1999) apresentou um exemplo de uma sapata quadrada com 2,44m de lado, tensão de 240kPa, embutida 1,22m e apoiada em uma areia com  $\bar{N}_{60} = 25$ . Utilizando a equação empírica de Burland e Burbidge (1985), Duncan (1999) obteve um recalque médio de 8mm e, considerando um coeficiente de variação de 67% para o recalque, estimou uma probabilidade de insucesso de 2%, a partir de uma distribuição lognormal, associada ao risco do recalque previsto ser superior a 24mm.

Ribeiro (2000) estudou a probabilidade de ruptura de um solo residual jovem de gnaiss solicitado por sapatas circulares. As sapatas, com 400mm, 800mm e 1600mm de diâmetro, foram submetidas a provas de carga realizadas

por Campos (1980), conforme mostra a figura 2.9. Os valores de média e variância dos parâmetros de resistência foram obtidos a partir de resultados de ensaios de cisalhamento direto e triaxiais convencionais, executados por Maccarini (1980). Com base no método probabilístico do Segundo Momento e adotando uma distribuição normal para FS, Ribeiro (2000) concluiu que:

- As probabilidades de ruptura foram fortemente influenciadas pelas variâncias dos parâmetros de resistência;
- As probabilidades de ruptura obtidas com a utilização de capacidades de carga previstas pela teoria de Meyerhof (1963, com  $N_\gamma$  da teoria de Brinch Hansen, 1970) apresentaram-se ligeiramente inferiores às obtidas com base nas capacidades de carga de Terzaghi (1948).

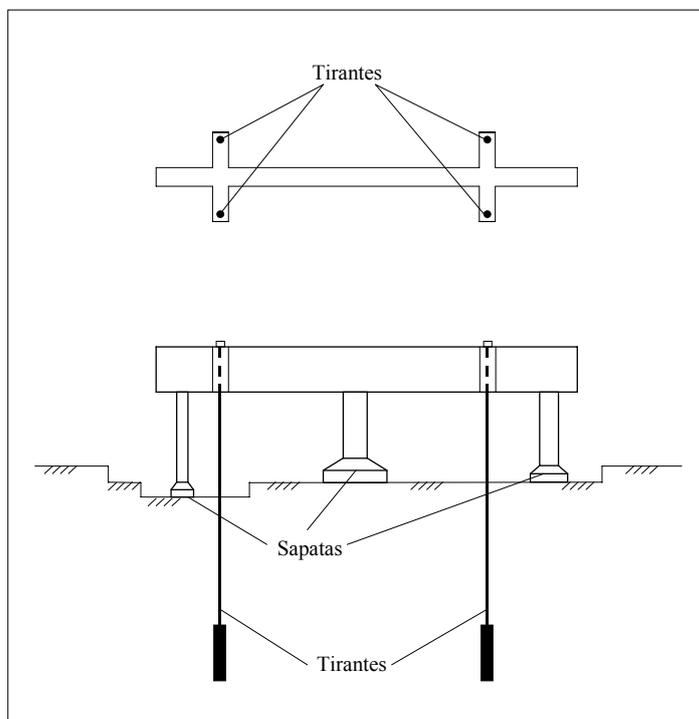


Figura 2.9. Esquema das provas de carga, Campos (1980)

Com o intuito de apresentar uma forma de estimarem-se probabilidades associadas a recalques de fundações superficiais, Ribeiro (2000) analisou o desempenho das sapatas mostradas na figura 2.9, adotando um crescimento linear para o módulo de elasticidade com a profundidade, embasado nos resultados de ensaios pressiométricos realizados por Brandt (1978). Com a utilização do método probabilístico do Segundo Momento e do método determinístico de Schmertmann et al (1978), Ribeiro (2000) concluiu que o intercepto do módulo de elasticidade

na superfície do terreno foi o parâmetro de maior influência na composição das variâncias dos recalques, sendo pouco significantes a taxa de crescimento do módulo de elasticidade com a profundidade e o peso específico do solo.

Fenton e Griffiths (2002) analisaram, inicialmente, recalques de uma sapata isolada apoiada na superfície de uma camada de solo elástico-linear com uma distribuição lognormal para o módulo de elasticidade. Utilizando a Simulação de Monte Carlo com 2000 previsões de recalques, através do método dos elementos finitos, Fenton e Griffiths (2002) concluíram que a forma do histograma de freqüência dos recalques se aproxima de uma distribuição lognormal, conforme a figura 2.10. Em seguida, os autores analisaram recalques diferenciais entre duas sapatas apoiadas no mesmo meio elástico-linear descrito anteriormente, e neste caso concluíram que o recalque diferencial tem uma distribuição complexa, que se comporta de forma errática em relação à distribuição lognormal.

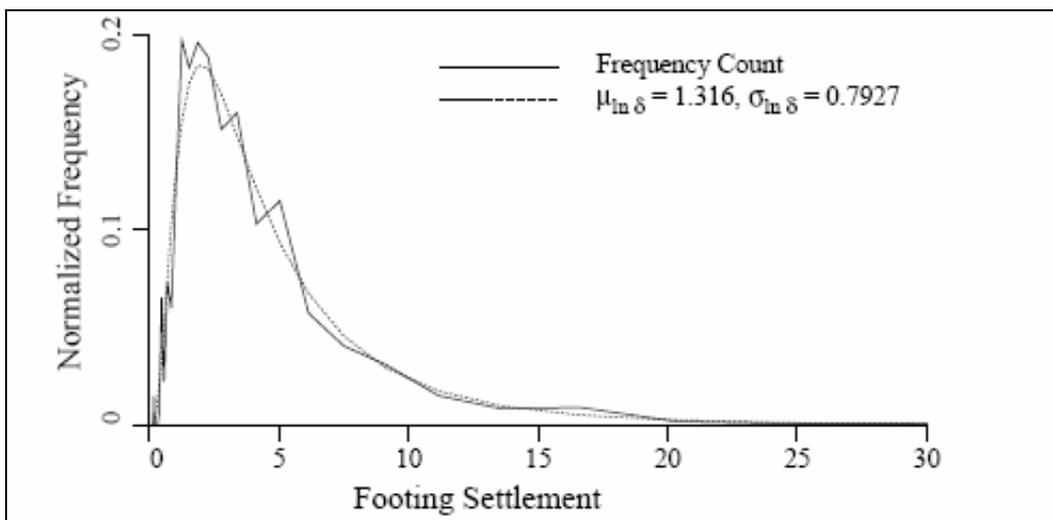


Figura 2.10. Comparação entre histograma e distribuição lognormal, Fenton e Griffiths (2002)

#### 2.7.4.

#### Probabilidade e estatística em análises de fundações profundas

Visando a utilização da probabilidade de ruína como critério para definir o fator de segurança a ser usado na previsão da carga admissível de fundações por estacas, Aoki et al. (2002) analisaram cargas últimas determinadas com base em provas de carga e em um método empírico, para estacas tubadas de ponta fechada, executadas no cais de Alamoia, em Santos-SP. Admitindo uma probabilidade de

ruína aceitável de 1:1000 e uma distribuição normal para cargas solicitantes e resistentes, Aoki et al. (2002) concluíram que a fixação arbitrária de fatores de segurança globais de 1,6 e 2,0, conforme indica a norma NBR-6122, conduziram a probabilidades de ruína inaceitáveis.

Com o objetivo de obter uma relação entre o comprimento de estacas e a variabilidade da capacidade de carga, Bilfinger e Hachich (2006) apresentaram um estudo de mais de 500 provas de carga dinâmicas em estacas pré-moldadas de concreto e concluíram que, quanto menor o comprimento das estacas, maior é a variabilidade da capacidade de carga.

### 2.7.5. Probabilidade e estatística em análises de estabilidade de muro de arrimo

Duncan (1999) apresentou uma estimativa de probabilidade de deslizamento de um muro de arrimo com 4,58m de altura e terrapleno composto de silte arenoso. Considerando uma ausência do nível d'água no terrapleno, os valores de média e coeficiente de variação do fator de segurança referente ao deslizamento do muro foram respectivamente iguais a 1,5 e 17%, com conseqüente probabilidade de deslizamento de 1%, obtida para uma distribuição lognormal de FS.

Falabella (2006) desenvolveu estudos probabilísticos para o muro de arrimo mostrado na figura 2.11.

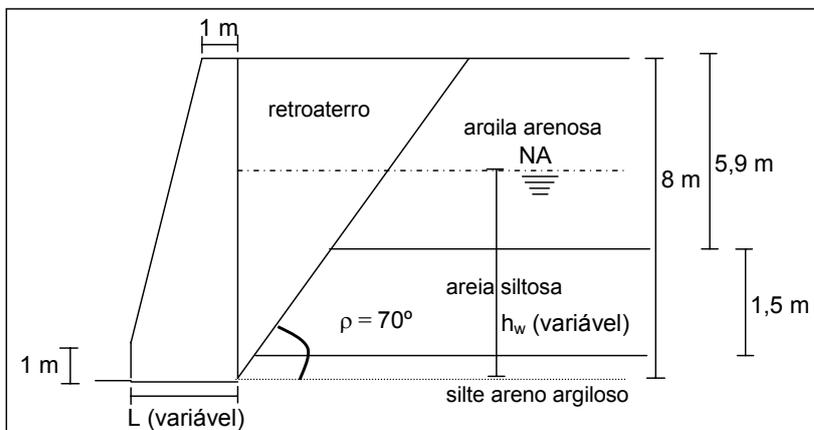


Figura 2.11. Esquema de muro de arrimo para análise probabilística, Falabella (2006)

Variando a largura da base do muro e a posição do nível d'água foram feitas análises probabilísticas pelos métodos do Segundo Momento e das Estimativas Pontuais. Com base nessas análises, para verificação da estabilidade do muro em relação ao tombamento, ao deslizamento e à ruptura do solo de fundação, Falabella (2006) concluiu que:

- Os índices de confiabilidade referentes ao deslizamento e ao tombamento aumentaram com o aumento da base do muro e diminuíram com a altura do nível d'água, sendo que os maiores índices de confiabilidade foram obtidos pelo método das Estimativas Pontuais;
- A confiabilidade referente à ruptura do solo de fundação diminuiu com a altura do nível d'água, mas sofreu pouca influência quanto à variação da base do muro. Neste caso os valores obtidos pelos métodos do Segundo Momento e das Estimativas Pontuais foram próximos.

### 2.7.6. Probabilidade e estatística em análises de estabilidade de taludes

Sandroni e Sayão (1992) apresentaram procedimentos para a previsão da probabilidade de ruptura de um talude de mineração a céu aberto com 200m de altura e 34° de inclinação, ilustrado na figura 2.12.

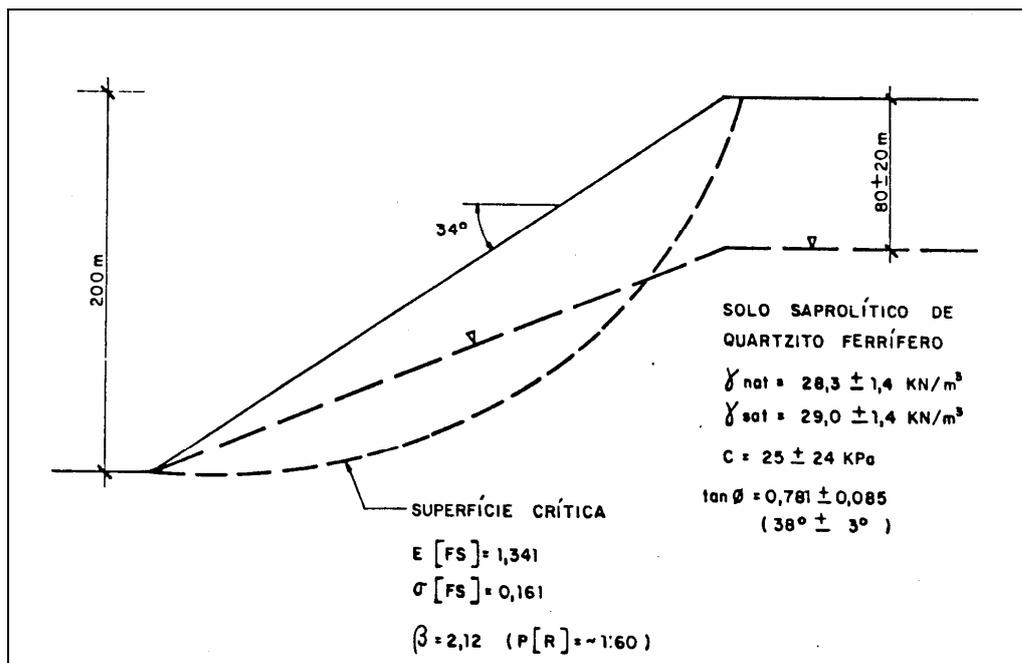


Figura 2.12. Seção típica do talude, Sandroni e Sayão (1992)

Inicialmente, com base nos parâmetros geotécnicos médios, foi obtido um fator de segurança determinístico igual a 1,341. Em seguida, a variância do fator de segurança foi estimada através do método do Segundo Momento de Primeira Ordem, onde foram considerados como variáveis aleatórias os parâmetros efetivos de resistência, os pesos específicos acima e abaixo do nível d'água e a piezometria. Finalmente, adotando uma distribuição normal para o fator de segurança, Sandroni e Sayão (1992) obtiveram uma probabilidade de ruptura igual a 1:60 e apresentaram as seguintes conclusões:

- A probabilidade de ruptura é função das incertezas consideradas em seu cálculo. Se acaso fossem considerados apenas os parâmetros geotécnicos como variáveis e um valor fixo para a piezometria, ter-se-ia uma probabilidade de ruptura inferior à obtida.
- A principal decisão de projeto, no contexto do procedimento exposto nesse trabalho, é estabelecer o valor aceitável da probabilidade de ruptura. É preciso acumular experiência no uso do procedimento descrito. Seria interessante a reanálise de projetos existentes para a obtenção de valores de probabilidade de ruptura a eles associados. O acúmulo de experiência com base em análises de probabilidade se revelará mais sólido do que com base apenas em valores de fatores de segurança.
- No caso do exemplo, que se restringe ao ambiente de uma mina de grande porte na qual muitos taludes foram executados e umas poucas rupturas foram observadas, pode-se estabelecer um critério específico. As retro-análises das rupturas indicam valores de probabilidade de ruptura na faixa de 1:4 a 1:20. Análises de diversos taludes estáveis produziram valores de probabilidades de ruptura entre 1:30 e 1:100 (ou menos). No caso decidiu-se considerar um valor aceitável de probabilidade de ruptura menor que 1:50.

Bergado et al (1993) fizeram seis retro-análises de rupturas de um talude de aterro, adjacente a um canal de irrigação, apoiado em uma camada de argila mole. No momento da ruptura, o fator de segurança médio era igual a 1,07 com uma probabilidade de ruptura de 63% (1:1,6). Os autores concluíram que a superfície crítica de ruptura representada pelo fator de segurança mínimo não coincide com a superfície crítica associada a uma probabilidade de ruptura máxima. Verificou-se que a superfície real de ruptura ocorreu entre as duas superfícies críticas.

Analisando o comportamento da probabilidade de ruptura em relação ao método determinístico adotado, para o talude de jusante da barragem de Santa Branca, Dell'Avanzi (1995) concluiu que a utilização de métodos de estabilidade mais rigorosos corresponde a menores valores de probabilidade de ruptura.

Utilizando o método determinístico de Bishop Simplificado (1955) e os métodos probabilísticos do Segundo Momento de Primeira Ordem, das Estimativas Pontuais e Simulação de Monte Carlo, Guedes (1997) executou análises probabilísticas considerando, separadamente, variações de altura e inclinação de taludes de mineração sob condições drenadas. As principais conclusões do trabalho de Guedes (1997) foram:

- A probabilidade de ruptura é praticamente independente da distribuição probabilística de FS, normal ou lognormal, para valores de probabilidade de ruptura maiores que 6% (1:17);
- Os fatores de segurança médios obtidos pelos três métodos probabilísticos foram muito próximos;
- De uma forma geral, os valores de probabilidades de ruptura obtidos pelos três métodos probabilísticos foram próximos. Deste modo, o método do Segundo Momento torna-se vantajoso em relação aos demais, devido à facilidade de utilização;
- A influência dos pesos específicos no cálculo da probabilidade de ruptura é desprezível. Os parâmetros de resistência tiveram influência significativa em todas as análises probabilísticas realizadas.

Farias e Assis (1998) apresentaram análises probabilísticas de dois taludes: um baixo, típico de obras rodoviárias em solo, no qual predominava o efeito da coesão; outro alto, típico de mineração em rocha, no qual predominava o efeito do ângulo de atrito. Através dos métodos probabilísticos do Segundo Momento e das Estimativas Pontuais e dos métodos determinísticos de Fellenius, Bishop, Janbu e Morgenstern & Price, Farias e Assis (1998) concluíram:

- A escolha do método determinístico influencia de forma significativa o valor da probabilidade de ruptura;

- Pequenas diferenças nos valores médios de FS podem induzir grandes diferenças nos valores de probabilidade de ruptura;
- Os métodos de Fellenius e Janbu subestimaram os fatores de segurança consistentemente e superestimaram as probabilidades de ruptura se comparados aos métodos de Bishop e Morgenstern & Price. Estes dois últimos apresentaram valores praticamente iguais;
- Para os dois casos analisados a probabilidade de ruptura pelo método das estimativas pontuais foi maior, principalmente para o talude de mineração;
- O método do Segundo Momento tem a vantagem de quantificar a influência relativa de cada parâmetro, além de exigir em princípio menos análises. No entanto pode fornecer valores de probabilidade de ruptura abaixo das fornecidas pelo método das Estimativas Pontuais. Neste sentido os dois podem se completar;
- Diante da crescente disponibilidade de programas e microcomputadores eficientes, o custo computacional de análises probabilísticas é muito pequeno, se comparado com as informações adicionais que podem fornecer. O único empecilho atual a uma maior utilização de prática destes métodos se justifica pela falta de valores de referência de probabilidade de ruptura, para se fixar critérios de projeto.

Duncan (1999) fez uma retro-análise de probabilidade de ruptura para um deslizamento de talude submerso, de 30m de altura e 600m de comprimento em planta, localizado na área portuária da cidade de São Francisco, Califórnia. Esse talude, formado de argila siltosa orgânica normalmente adensada, foi escavado com 48,8° de inclinação. Em 20 de agosto de 1970, após escavação ao longo de 150m em planta, ocorreram deslizamentos num trecho de 135m. A figura 2.13 mostra a seção transversal do talude, antes e após o deslizamento.

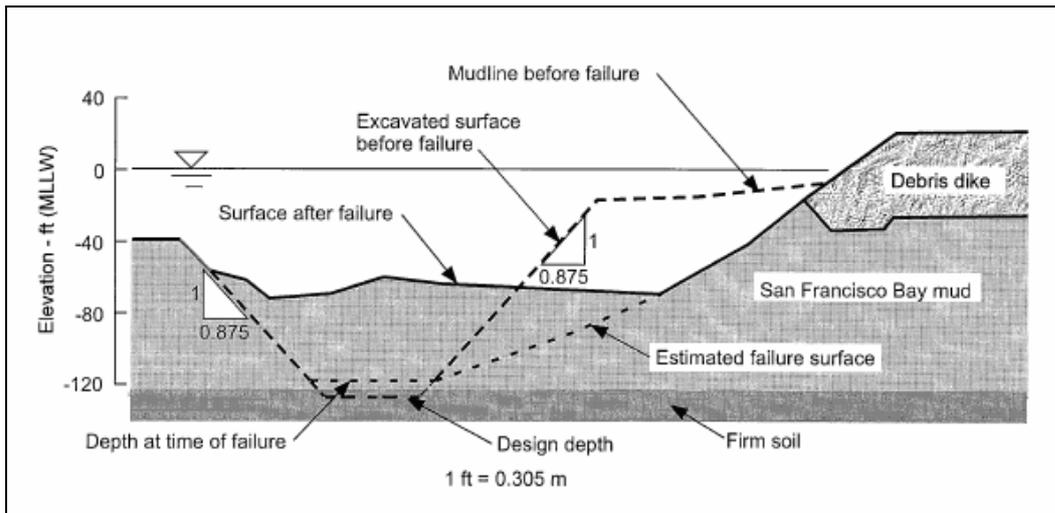


Figura 2.13. Seção transversal do talude submerso, antes e após o deslizamento, Duncan (1999)

Antes da ruptura o talude se apresentava com um fator de segurança igual a 1,17, um coeficiente de variação de 16% e uma conseqüente probabilidade de ruptura de 18%, para uma distribuição lognormal. A magnitude da probabilidade de ruptura se aproximou da fração longitudinal de ruptura (22,5%), ou seja, com 135m de extensão para um comprimento total de 600m. Com base nesses resultados, Duncan (1999) concluiu que uma probabilidade de ruptura de 18% é inaceitável.

Falabella (2006) estudou a probabilidade de ruptura do talude de jusante da barragem de Curuá-Uma, ilustrada na figura 2.14, para diversos níveis d'água no reservatório de montante.

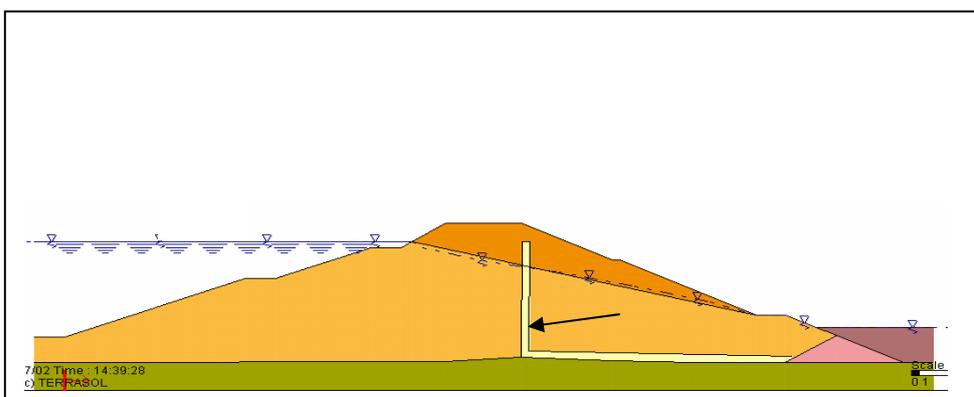


Figura 2.14. Seção transversal da barragem de Curuá-Uma, Falabella (2006)

Utilizando os métodos probabilísticos do Segundo Momento e das Estimativas Pontuais, Falabella (2006) conclui que os valores de probabilidade de ruptura encontrados pelo método do Segundo Momento foram maiores do que os valores obtidos pelo método das Estimativas Pontuais. A diferença foi maior para as cotas mais baixas do nível do reservatório. As maiores probabilidades de ruptura obtidas pelo método do Segundo Momento podem ser justificadas pelos menores valores médios dos fatores de segurança. Além disso, nota-se uma maior variância do fator de segurança calculada através do Método do Segundo Momento.