

5

Atividades Finais

5.1. O jogo *Tantrix*, simetrias e arcos em concordância

5.1.1. Sobre o *Tantrix*

Tantrix é um jogo de conexão que pode ser jogado isoladamente (Browne, 2005) ou em grupo com até 4 jogadores. Seu criador é Mike McManaway, um ex-estudante de geologia da Nova Zelândia. Desde 1987 o jogo passou por várias modificações até chegar à configuração atual que contém 56 peças numeradas, confeccionadas em plástico. Cada peça tem a forma de um hexágono regular com três “caminhos” que interligam seus lados. Pelo fato de dois caminhos de uma mesma peça nunca possuírem a mesma cor, cada item é composto por apenas três cores sem contar a do fundo. No que se refere ao aspecto cromático, nenhuma das 56 peças é idêntica, existindo, contudo, apenas quatro diferentes configurações de desenho (figura 103).

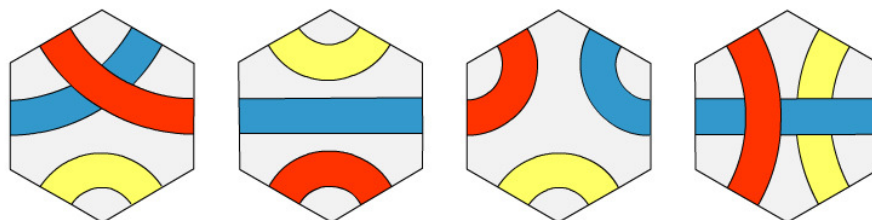


Figura 103 - Desenhos das peças do *Tantrix*

O *Tantrix* tem como principal regra a proibição de que duas peças, quando adjacentes, compartilhem caminhos de cores distintas. Ou seja, uma passagem azul só pode fazer fronteira com outra azul, uma amarela com outra amarela e uma vermelha com outra vermelha (figura 104). Os desafios envolvem a montagem de trajetos abertos ou voltas completas com um número crescente de peças.

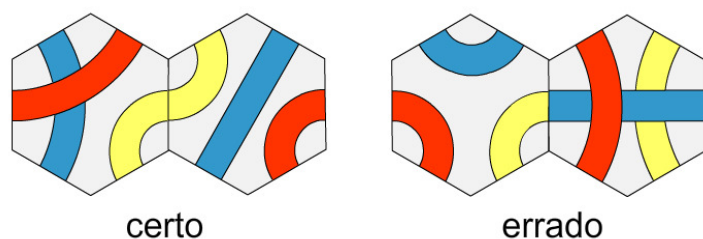


Figura 104 - Regra de vizinhança do *Tantrix*

Para o ensino de desenho geométrico, o manuseio do *Tantrix* é de grande valor. As regras do jogo são simples e o material serve de apoio para a exploração de vários conceitos geométricos, dentre os quais os mais evidentes parecem ser: o preenchimento do plano por hexágonos regulares; a concordância entre reta e arco e entre dois arcos; e a simetria axial e central.

5.1.2. Voltas completas

Em seu modo mais simples, o *Tantrix* é jogado isoladamente como um quebra-cabeça. Neste caso, o objetivo é construir voltas completas de diversas formas e tamanhos a partir de três peças. Ao término de cada montagem, uma nova peça é adicionada, o circuito anterior é desfeito e outro deve ser descoberto, aumentando o grau de dificuldade. Entretanto, se as peças possuem 3 cores, qual deverá ser a cor da volta? Não será preciso adivinhá-la, pois ela sempre vem especificada no verso da última peça do grupo. Por exemplo, o verso da peça 5 contém o algarismo 5 na cor vermelha. Consequentemente, a volta completa com esse número de peças será vermelha (figura 105). Quando o número de peças aumenta, impõe-se outra regra, a que não permite a presença de espaços vazios internos (figura 106).

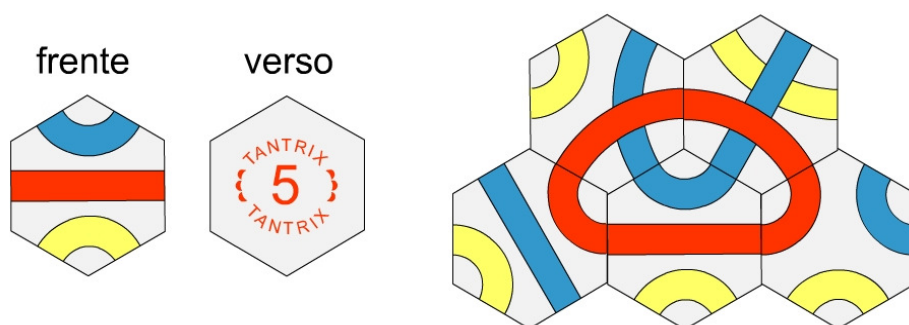


Figura 105 - Critério para saber qual será a cor da volta completa

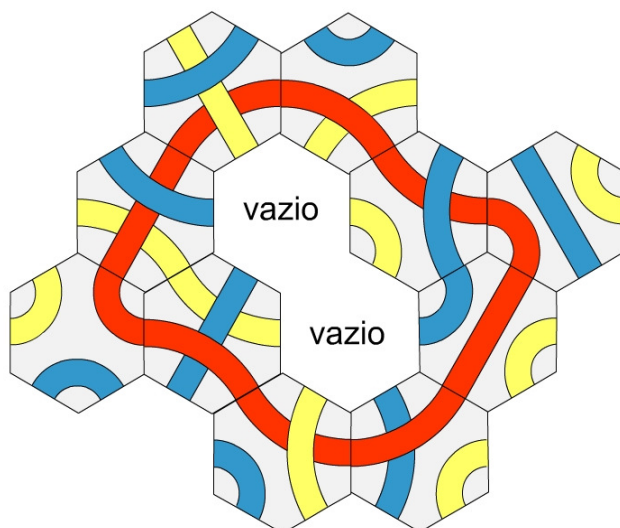


Figura 106 - Uma montagem inválida por apresentar lacunas

Para reduzir o tempo de montagem, algumas estratégias mostram-se úteis. A primeira delas consiste em descobrir uma volta completa da cor principal sem se preocupar com as combinações de cores dos outros caminhos. Após adivinhar uma solução para o circuito, determinadas peças podem ser rotacionadas e / ou trocadas de posição, de modo a combinar as cores sem a necessidade de alterar o traçado original. A figura 107 traz um exemplo deste tipo de situação. O desafio que se apresenta é saber quais peças precisam ser rotacionadas ou trocadas. Para evitar a abordagem totalmente baseada no ensaio e erro, dois fatores devem ser levados em consideração:

- 1 - Peças que possuem um trajeto reto da cor do circuito são fortes candidatas a sofrer rotações de 180°, conforme ilustrado na figura 108.
- 2 - Toda peça possui três passagens internas, uma de cada cor, interligando dois lados. Isto implica em que uma peça nunca poderá ser encaixada numa lacuna onde existem três ou mais fronteiras de mesma cor. No exemplo ilustrado na figura 109, percebe-se que uma das rotações anteriores acabou causando este tipo de problema. Antes de realizar as permutações mais simples, tais casos precisam ser resolvidos.

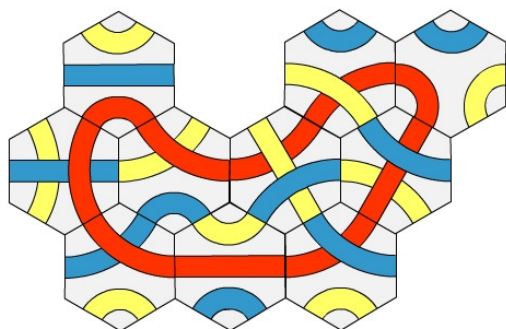


Figura 107 - Incompatibilidade de cores em caminhos secundários

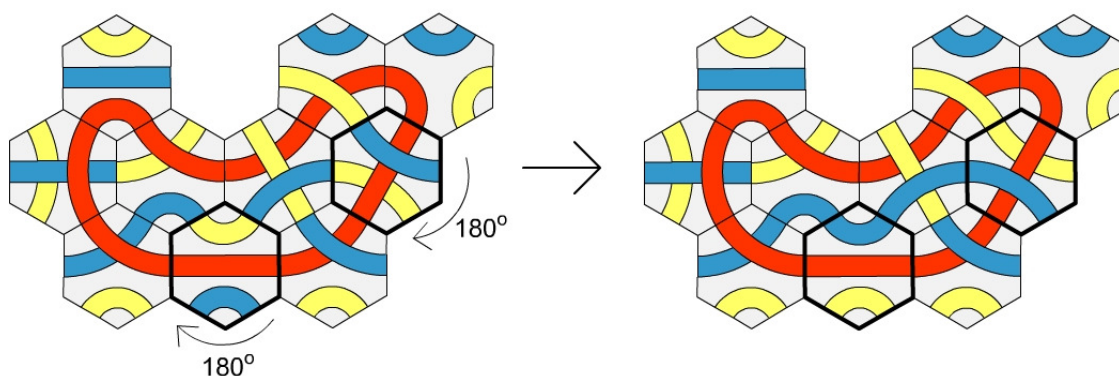


Figura 108 - Rotações de 180° de duas peças

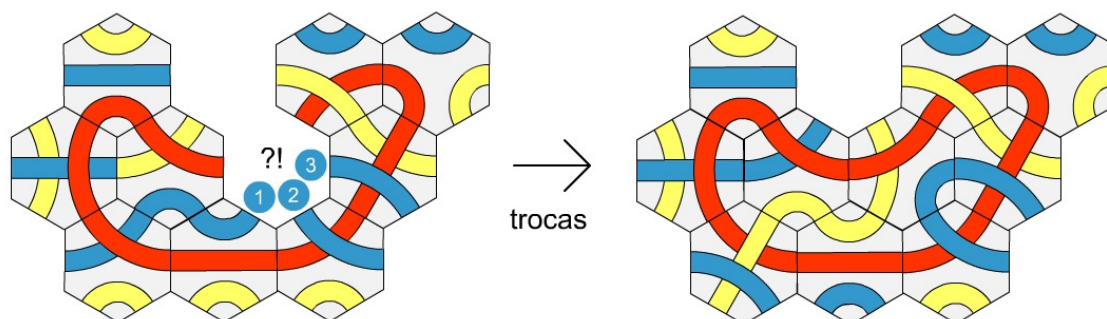


Figura 109 - Incoerência, troca de peças e solução final

5.1.3. Soluções simétricas e assimétricas

Em sala de aula, o *Tantrix* parece constituir um material concreto bastante apropriado para a exploração das características das transformações pontuais de reflexão (simetria axial) e meio-giro (simetria central). Por experiência própria, tenho percebido que uma quantidade expressiva de estudantes de graduação em design tende a confundir estes dois tipos de transformação. Com o *Tantrix*, é possível confirmar tal fenômeno com um teste muito simples, descrito a seguir.

Numa situação hipotética, o professor entrega ao aluno apenas as 7 primeiras peças do quebra-cabeça. Neste caso, só existe uma solução viável para o traçado do circuito fechado; porém ainda resta a possibilidade de se refletir o percurso pela permutação de algumas partes. Quando o aluno descobrir uma montagem para a volta completa, o professor deverá apresentar sua imagem refletida e solicitar a reprodução com as mesmas peças. Se o estudante resolver rotacionar todo o conjunto previamente obtido pela amplitude de 180° , ficará evidente que ele não distingue uma transformação da outra (figura 110).

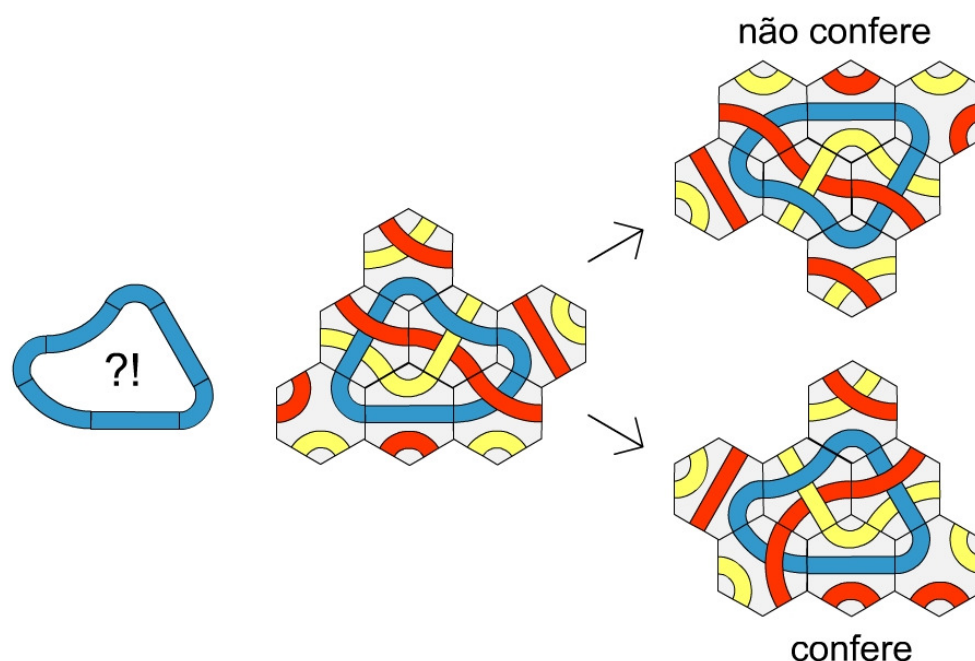


Figura 110 - A impossibilidade do meio-giro para obter a imagem refletida

É importante chamar a atenção para o fato de que algumas figuras, ao serem rotacionadas de 180° ou refletidas por um eixo específico, não parecem ser modificadas. Este talvez seja um dos principais motivos que levam os aprendizes a confundirem a simetria axial com a central. A peça 5, ilustrada na figura 111, possui um desenho com dupla simetria axial. Este pode ser refletido no eixo horizontal ou rotacionado de 180° , mas os resultados não diferem da figura de origem. Contudo, um pequeno círculo, posicionado na região esquerda superior do desenho, esclarece a questão, sendo observadas variações.

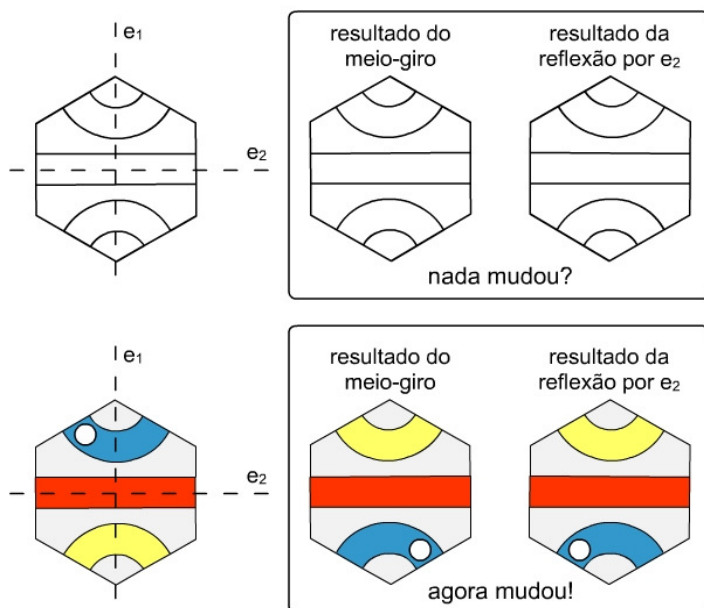


Figura 111 - Figura que parece não ter sido modificada após transformações

A partir de 8 peças, as voltas completas passam a ter mais de um traçado possível. Quanto maior for o número de peças, maior será o número de arranjos válidos, contudo nem sempre os desenhos das voltas apresentarão simetria, seja por reflexão e/ou rotação. Para exemplificar, a figura 112 apresenta três arranjos com as oito primeiras peças:

- Solução A - É assimétrica.
- Solução B - Possui simetria axial.
- Solução C - Possui simetria central (e também dupla simetria axial).

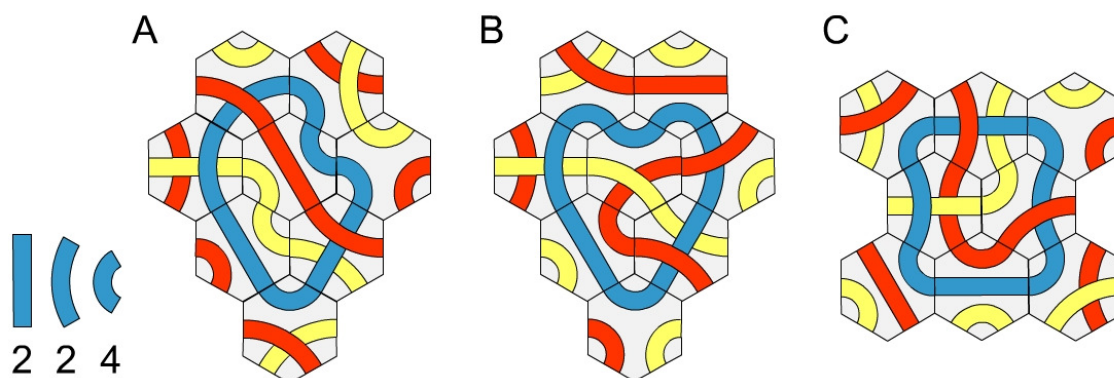


Figura 112 - Três soluções do quebra-cabeça com 8 peças

Toda volta completa é composta por fragmentos que se enquadram em alguma dessas categorias, aqui denominadas como: 1 - caminho reto; 2 - curva maior e 3 - curva menor. No exemplo fornecido, cada arranjo possui dois caminhos retos, duas curvas maiores e quatro menores. Tendo em vista que só existem números pares de peças de cada tipo, qual das três soluções deverá ser a mais imediata? Julgo ser a C, pois para encontrá-la basta dividir o número de peças de cada tipo por 2 e tentar buscar um trajeto que possa corresponder a uma das metades do percurso. A outra metade precisa ser congruente e rotacionada de 180° em relação à primeira (figura 113).

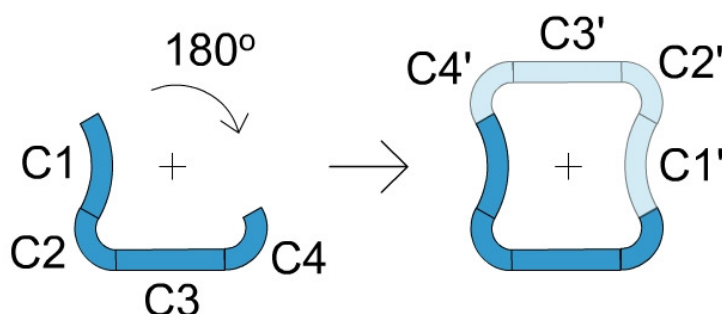


Figura 113 - Método para determinar soluções por rotação de 180°

Com 14 peças, podem ser obtidas várias soluções diferentes, dentre as quais algumas são mostradas na figura 114. Neste momento, algumas perguntas podem ser levantadas: Quais são as soluções mais parecidas? Uma figura pode ser derivada de outra? Quais são as simétricas? E as assimétricas? Por que as curvas são sempre conectadas “de modo suave”, sem inflexões ou fraturas? Como as voltas podem ser reproduzidas com os instrumentos de desenho? O próximo item investiga as respostas das duas últimas perguntas.

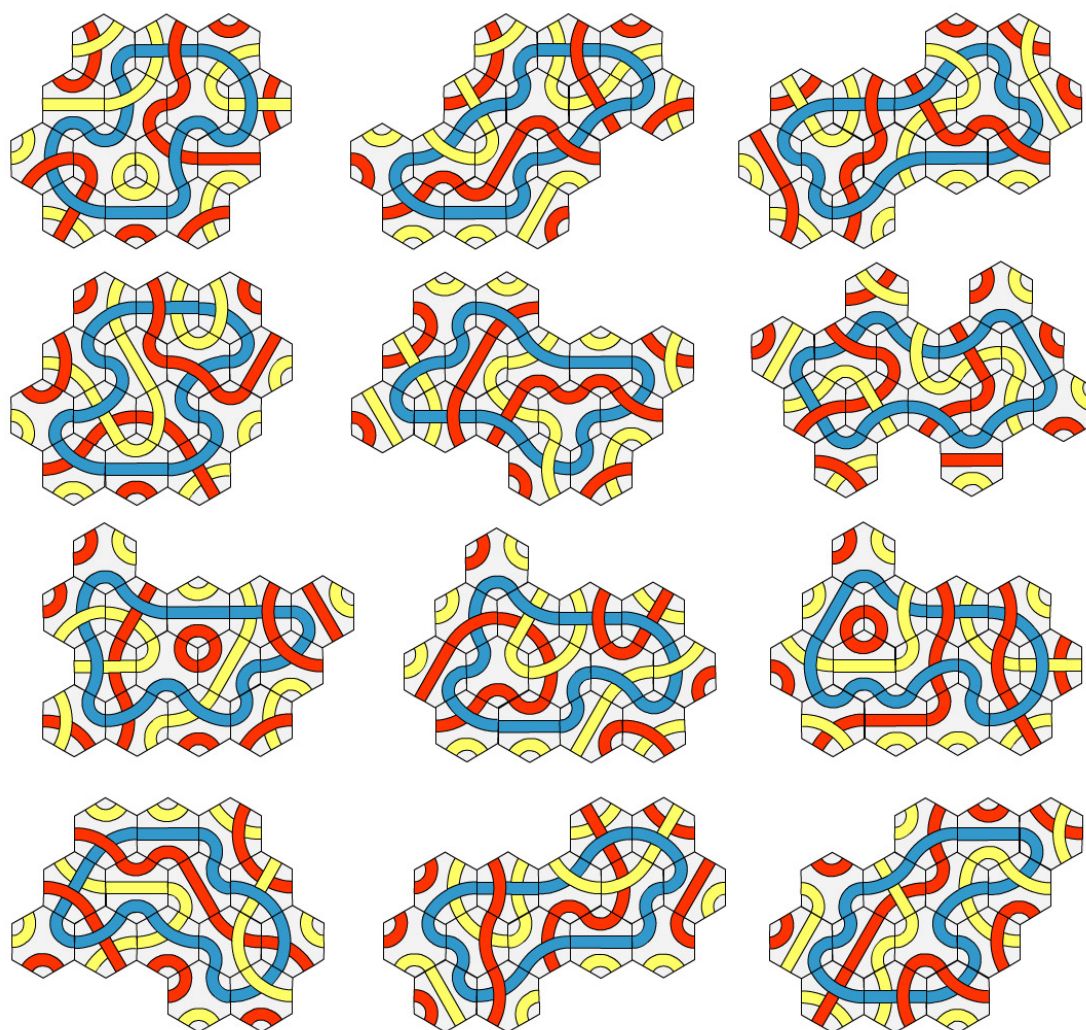


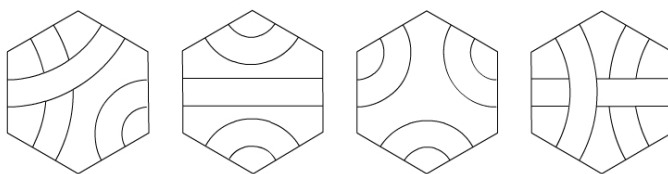
Figura 114 - Doze arranjos válidos com 14 peças

5.1.4. Concordância de arcos

As montagens do *Tantrix* fornecem vários exemplos de concordância entre reta e arco e entre dois arcos como consequências das condições básicas de tangência. Para auxiliar a descoberta destas condições pelos alunos, o presente item sugere uma sequência didática, guiada pelo professor.

A primeira providência é observar o contorno das peças. Todas têm a forma de um hexágono regular. Além disso, elas possuem caminhos internos de três tipos, já provisoriamente denominados de: 1 - caminho reto; 2 - curva maior e 3 - curva menor. Se cada caminho tiver sua espessura reduzida a uma linha, podem ser usados nomes mais precisos: 1 - segmento de reta; 2 - arco de círculo maior e 3 - arco de círculo menor. A figura 115 ilustra estes elementos.

Desenhos das peças:



Análise das partes:

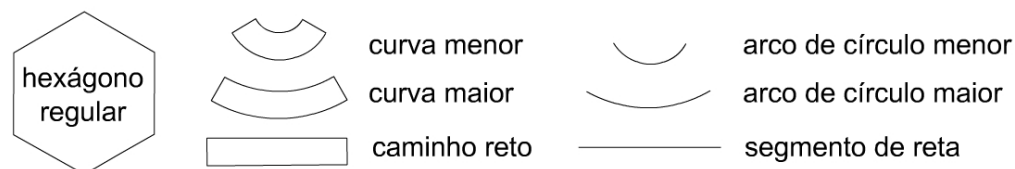


Figura 115 - Análise das partes das peças

A segunda providência é determinar a localização exata dos centros dos arcos de círculo. Isso pode ser feito com o auxílio das peças, pois mesmo as montagens mais elementares já trazem pistas visuais que facilitam a execução da tarefa (figura 116). O centro do arco menor corresponde a um dos vértices da peça que o contém. Já o do arco maior está localizado no centro de outro hexágono regular, adjacente ao primeiro.

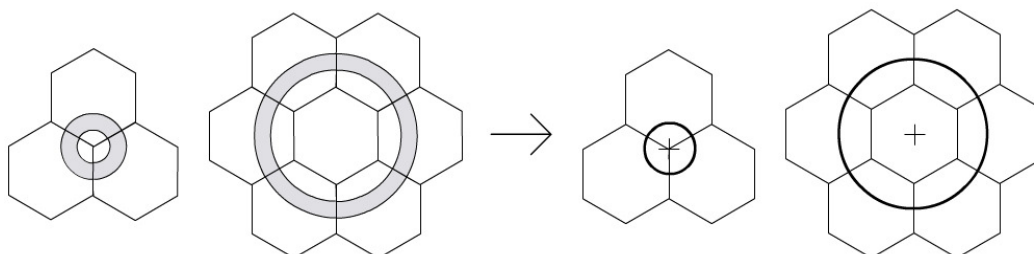


Figura 116 - Investigação dos centros dos arcos de círculo

A terceira providência é investigar um arranjo de uma malha de hexágonos, procurando-se prestar muita atenção aos arcos e segmentos relativos à volta completa. Aqui se toma como exemplo a solução das sete primeiras peças (figura 117), composta de:

- Três arcos de círculo menores – a_a , a_c e a_e , com centros A, C e E.
- Dois arcos de círculo maiores – a_b e a_d , com centros B e D.
- Dois segmentos de reta – s_1 e s_2 .

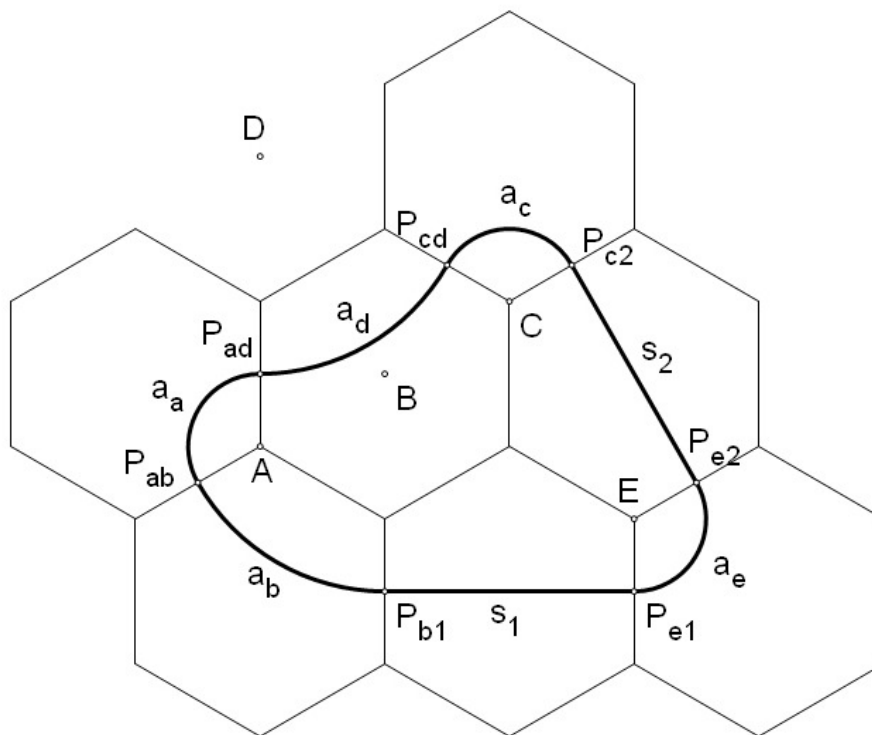


Figura 117 - Malha da solução das sete primeiras peças

Da estrutura original são extraídos 7 casos de concordância: 3 entre arcos e 4 entre arco e segmento de reta (figura 118). A idéia é analisar e comparar caso a caso para tentar descobrir as propriedades comuns, a partir da observação de elementos ou relações invariantes.

Nos casos de concordância entre arcos, pode-se sugerir que os alunos liguem os centros dos arcos e observem a localização do ponto de concordância. No primeiro caso, o ponto P_{ad} pertence ao segmento AD. No segundo, o ponto P_{cd} também pertence ao segmento CD. No terceiro, o ponto P_{ab} não está contido no segmento AB, mas pertence à sua reta suporte. Para que dois arcos sejam concordantes, o ponto P de concordância (comum aos dois arcos) precisa estar alinhado com seus centros O_1 e O_2 . Esta é a primeira condição procurada.

Nos casos de concordância entre arco e segmento de reta, as ligações dos pontos de concordância aos centros dos arcos sempre geram segmentos perpendiculares aos segmentos concordados. Portanto, para que um arco seja concordante a uma reta, o segmento que liga o centro O do arco ao ponto P de concordância (comum à reta e ao arco) deve ser perpendicular a essa reta. Esta é a segunda condição procurada.

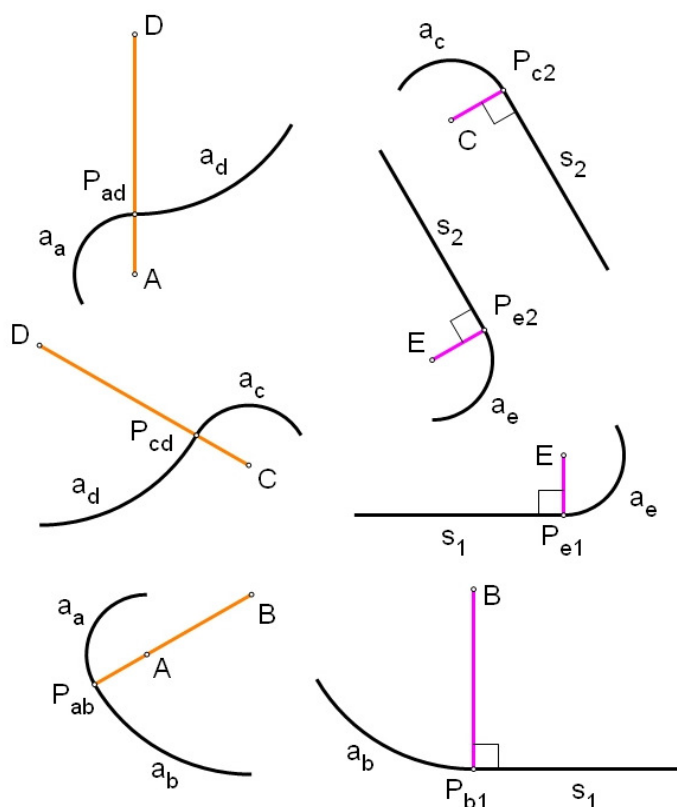


Figura 118 - Casos isolados de concordâncias

5.1.5. Experimento com os alunos

Com este experimento, tive como principal objetivo investigar o potencial de uso do *Tantrix* para o ensino das propriedades de concordância entre reta e arco e entre dois arcos. Assim como em todas as outras atividades da pesquisa, cada participante trabalhou com o pesquisador de forma isolada, sem contar com a presença dos outros.

Inicialmente, enunciei as regras do *Tantrix* e entreguei um conjunto de peças originais, numeradas de um a sete. Em seguida, solicitei a montagem de cinco voltas completas, a começar pelas três primeiras. Os desenhos dos possíveis arranjos são reproduzidos na figura 119.

Abre-se aqui um parênteses de modo a chamar a atenção para um detalhe importante. A volta com quatro peças na cor vermelha é uma oval de quatro centros, a qual tem grande aplicação no desenho técnico. Na figura 120, apesar de serem usadas diferentes linhas auxiliares, a estrutura da montagem se adapta perfeitamente ao traçado usual da projeção de um círculo em perspectiva isométrica.

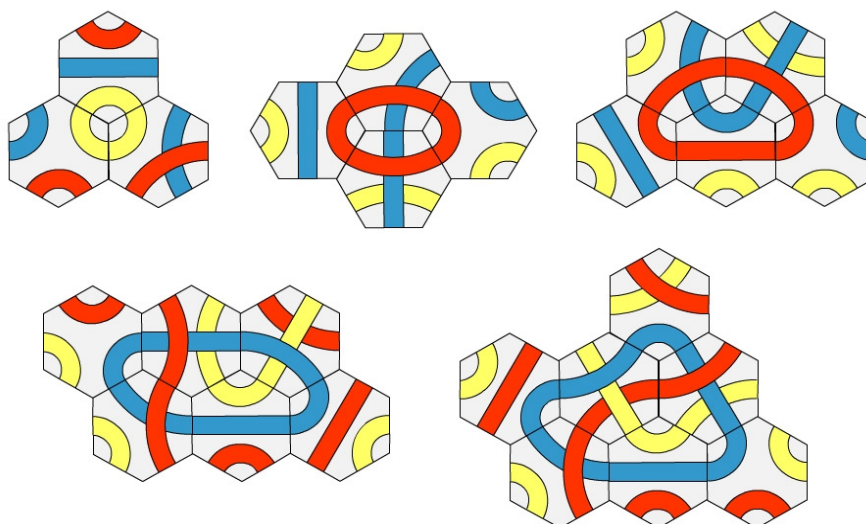


Figura 119 - Voltas com 3 a 7 peças de *Tantrix*

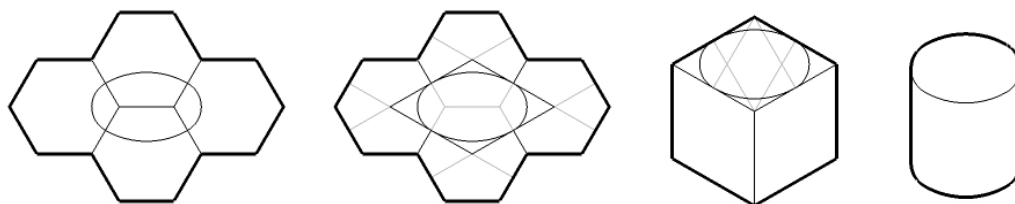


Figura 120 - Ovais no *Tantrix* e na perspectiva isométrica

Todos os participantes conseguiram completar as montagens, embora dois³⁵ tenham demorado mais para resolver as duas últimas voltas (compostas por seis e sete peças). Em certas ocasiões, mesmo quando os circuitos na cor principal eram descobertos, algumas peças “insistiam” em apresentar incompatibilidade de cores nas vizinhanças. Ao notar este tipo de impasse, sem perder de vista o trajeto original, eu dizia que eles deveriam perseverar na troca de peças ou mudanças de orientação (vide item 5.1.2).

Ao término das montagens, propus-lhes outra tarefa: a de reproduzir no papel, com os instrumentos de desenho (esquadros e compasso), os traçados das duas últimas voltas. De maneira a agilizar o processo, ofereci uma folha de papel com as malhas de hexágonos para cada arranjo e informei que os caminhos deveriam ter suas espessuras reduzidas a linhas.

Na atividade anterior, descrita no item 4.2.13, o participante [1] manifestou claramente sua satisfação com o desenho geométrico³⁶. Todavia, agora, mostrava-se mais interessado em continuar resolvendo desafios de *Tantrix* do

³⁵ Os participantes [1] e [3].

³⁶ “Esse foi tão legal de fazer. É mais legal quando a gente pode desenhar.”

que desenhar os dois últimos circuitos. No seu ponto de vista, talvez a tarefa de reproduzir as voltas de seis e sete peças pudesse ser realizada em outro momento. “Eu gostei disso, queria fazer o de oito, mas tudo bem. Eu vou arranjar um jogo desses.”

O participante [3] se deparou com uma solução refletida em relação ao contorno da malha de hexágonos impressa no papel. Ao comparar as duas imagens e perceber que havia uma diferença, sugeriu com um gesto que a folha fosse rotacionada com a amplitude de 180° . “Não quer virar assim, não?” Tal como citado no item 5.1.3, expliquei que um contorno era o reflexo do outro e por isso as peças deveriam ser rearrumadas.

Ao começarem a traçar o circuito, os participantes [1] e [3] se enganaram a respeito da localização do centro de um dos arcos maiores³⁷. Tal arco deveria ter um ponto de concordância com um arco menor e outro ponto de concordância com um segmento de reta. Isoladamente, em ambos os casos, o arco maior não parecia incorreto, contudo, quando seus elementos adjacentes foram desenhados, a incoerência foi notada (figura 121).

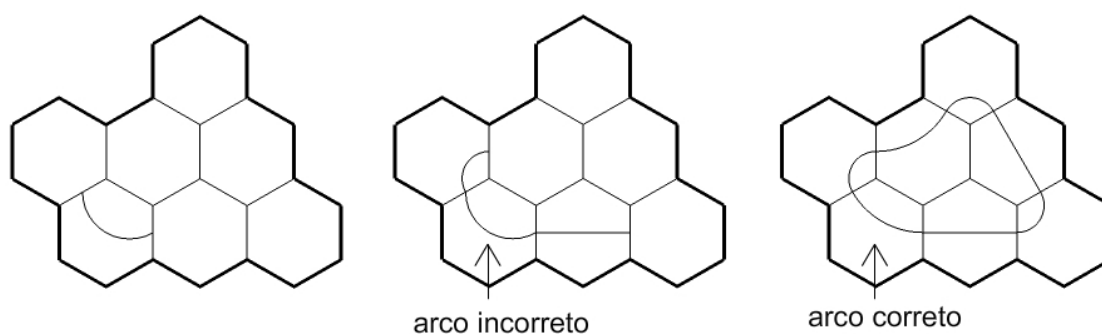


Figura 121 - Arco incorreto e correção dos participantes [1] e [3]

Para fazê-los perceber o correto posicionamento do centro do arco, bastou que eu reproduzisse a configuração de peças mostrada na figura 14. Nestes dois episódios coincidentes, o erro foi um fator de capital importância para a melhor compreensão da teoria. Isto porque:

1 – Para compreender o conceito de concordância, é preciso reconhecer exemplos e contra-exemplos. Até então, todos os arcos vistos nas montagens eram concordantes. O desenho do arco incorreto chamou a atenção para a diferença.

2 – O centro do arco foi localizado como ponto médio de um lado. Na realidade, ele deveria coincidir com o centro de um hexágono adjacente. Por conseguinte, já se poderia ter uma idéia de que as condições de concordância estão associadas ao correto posicionamento do centro do arco em relação a outros elementos.

3 – As condições de concordância precisam ser estudadas para que erros como este não se repitam. Justifica-se, assim, a inclusão do conteúdo no programa de atividades.

Por último, prossegui com a sequência didática proposta no item 5.1.4, tentando fazer com que os alunos enxergassem as condições de concordância pela análise guiada dos casos ilustrados na figura 118. Na atividade seguinte (item 5.2.7), criei uma oportunidade para verificar se os alunos haviam compreendido, de fato, as condições ali investigadas.

5.2. Elemento de ligação entre as atividades 5.1 e 5.3

5.2.1. Sobre flexágonos

Em linhas gerais, os flexágonos são polígonos articulados que trazem consigo uma propriedade intrigante. Quando “flexionados”, eles mostram diferentes pares de faces numa ordem cíclica. Conforme poderá ser constatado neste item, flexágonos são estruturas de difícil descrição em palavras e nem mesmo a visão de uma pessoa manipulando um deles substitui a experiência tátil individual necessária para o aprendizado de suas propriedades.

Segundo Pook (2003), existe uma quantidade limitada de publicações sobre flexágonos, as informações são dispersas e alguns itens não são encontrados com facilidade. Por este motivo, grande parte das informações que são apresentadas neste trabalho tem como fonte o livro *Flexagons Inside Out*, uma obra deste mesmo autor, bastante aprofundada.

Nem todos os flexágonos são implementáveis fisicamente³⁸. Contudo, vários podem ser feitos de papel, após a sucessão de um determinado número de dobras em uma tira. No entanto, qual será a principal diferença entre um

37 Os dois começaram pelo mesmo arco e efetuaram o mesmo erro.

modelo matemático ideal (abstrato) e um modelo físico (concreto) de um flexágono? Num modelo ideal, um flexágono é formado por uma faixa de polígonos congruentes, denominados folhas, as quais são dobradas pelos seus lados adjacentes. Dobrar, neste caso, significa que o ângulo diedro entre os planos das folhas pode variar de 0 a 360° sem restrições³⁹. Ao serem dobradas, elas são empilhadas, “umas sobre as outras”. No modelo ideal, as folhas são elementos do espaço bidimensional e as pilhas sempre ocupam a mesma região plana do espaço, qualquer que seja o número de elementos. Isto é, elas não “crescem em altura”. Obviamente, o mesmo não ocorre quando se trata de um modelo concreto. Em um flexágono de papel, as folhas possuem uma espessura e isso traz uma vantagem e uma desvantagem em relação ao modelo anterior. É fácil distinguir qual folha está por cima de outra, uma vez que elas são realmente empilhadas. Por outro lado, quanto maior for o número delas, mais limitações apresentará o funcionamento do modelo. Os lados (arestas) dos polígonos não têm apenas uma dimensão e isso interfere na mecânica das articulações.

Pares de pilhas adjacentes⁴⁰ são denominados setores. Ao ser flexionado, um flexágono modifica a configuração das pilhas, substituindo folhas visíveis por invisíveis. Deste modo, muda-se o estado, ou seja, há uma troca de aparência.

5.2.2. Hexaflexágonos

Hexaflexágonos correspondem à primeira categoria de flexágonos descoberta e investigada. Em 1939, Arthur H. Stone, um estudante inglês de graduação em matemática de Princeton, decidiu aparar 25 mm da borda de algumas folhas de papel para tentar encaixá-las em seu fichário. Uma vez resolvido o problema, para se distrair, ele começou a dobrar as tiras de vários modos distintos. Por acaso, depois de testar algumas estruturas, o jovem de 23 anos percebeu que um dos arranjos apresentou um comportamento estranho quando manipulado. A estrutura em questão viria a ser chamada de trihexaflexágono.

A figura 122 ilustra os passos para a construção de um trihexaflexágono, o qual apresenta três estados de apenas um ciclo. Sob a ótica da topologia, um trihexaflexágono nada mais é do que uma fita de Möbius com três meias torções,

38 Flexágonos que ocupam quatro dimensões já foram idealizados. Neste caso, como as malhas de construção são tridimensionais, flexaedro é o termo mais adequado.

39 O ângulo diedro é facilmente visualizado num corte feito por um terceiro plano perpendicular à interseção dos dois primeiros.

40 Uma pilha pode conter apenas uma folha.

uma espécie de nó de trevo (*trefoil knot*) que contém apenas uma face e uma aresta. Portanto, um dos modos mais apropriados para se reconhecer um trihexaflexágono corresponde à observação das características de outras imagens desta fita (figura 123). O conhecido símbolo da reciclagem representa bem a idéia de ciclo contínuo (Peterson, 2001) e a xilogravura *Laço de Möbius I* (1961) de M.C.Escher ajuda a entender como funciona o empilhamento das folhas. (Ernst, 1991).

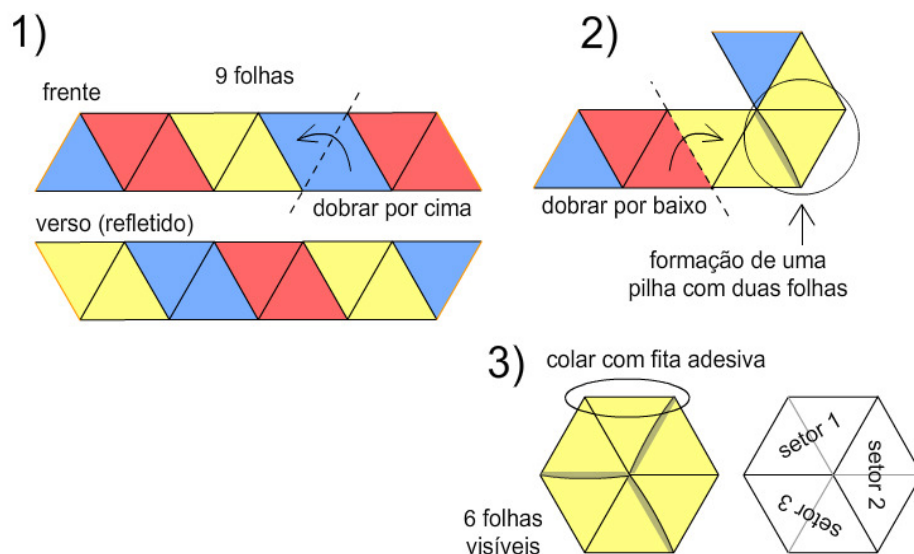


Figura 122 - Malha do trihexaflexágono e passos para a montagem

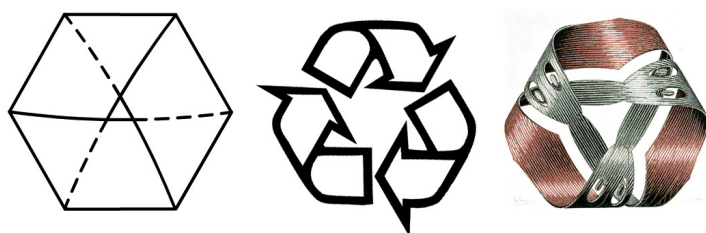


Figura 123 - Trihexaflexágono, símbolo da reciclagem e a *Banda de Möbius I*

Quando montado, um hexaflexágono assume a forma de um hexágono regular. Nesta configuração são visíveis seis folhas, cada uma com um vértice no centro, divididas em seis pilhas e três setores⁴¹. Todos os hexaflexágonos são tiras torcidas e conseqüentemente se apresentam como pares enantiomórficos (imagens refletidas).

5.2.3. A flexão do hexaflexágono

O acompanhamento da sequência de passos descrita a seguir⁴² pode ser feito observando-se a figura 124. Para flexionar o trihexaflexágono, primeiramente é necessário apertar duas folhas visíveis adjacentes, uma contra a outra, usando o polegar e o indicador. Porém, é importante que as folhas selecionadas não apresentem uma dobra contínua, mas sim uma espécie de fenda entre elas. Em caso contrário, deve-se rotacionar o objeto com amplitude de 60° e recomençar a tarefa. Ao mesmo tempo, com o dedo indicador da outra mão, deve-se empurrar as duas folhas visíveis opostas (estas com uma dobra contínua comum entre elas) de modo a coincidirem sobre as pilhas de folhas adjacentes, já posicionadas em planos verticais. Quando isto acontecer, o trihexaflexágono mudará de aspecto. Nesta posição intermediária, três triângulos equiláteros deixarão de ocupar o mesmo plano e compartilharão uma única aresta na vertical, apresentando uma simetria rotacional de ângulo 120° . A partir de então, se as fendas das “arestas superiores” (aquelas vistas de cima) dos triângulos forem abertas, o trihexaflexágono revelará outras folhas, antes escondidas nas pilhas. Quando o modelo é aberto (planificado), as folhas antes visíveis na face superior acabam posicionando-se no verso⁴³. Para alguns, a passagem de um estado para o outro lembra o desabrochar de uma flor e embora um ciclo completo seja composto por apenas três estados, os passos da sequência podem ser repetidos quantas vezes se desejar.

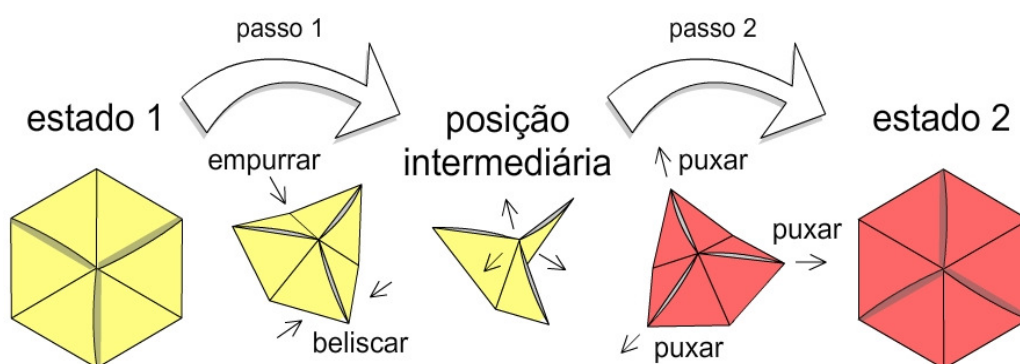


Figura 124 - Passos da sequência na passagem de um estado para outro

41 O número de folhas em cada pilha varia de acordo com o tipo de hexaflexágono.

42 As folhas do trihexaflexágono possuem as mesmas cores do modelo anterior, da figura 1.

43 Conforme citado anteriormente, na verdade o flexágono só possui uma face. Quando a tira é torcida e o flexágono é construído (figura 1), ele aparenta ter duas faces, constituídas por folhas no topo das pilhas, tal como uma moeda com cara e coroa.

5.2.4. Transformações observadas

A figura 125 mostra o ciclo completo de três estados referentes ao mesmo modelo de trihexaflexágono ilustrado nas figuras 122 e 124. Conforme citado no item anterior, a mudança do primeiro para o segundo estado faz com que as folhas amarelas da face de frente acabem posicionando-se no verso. Já as folhas vermelhas, antes escondidas, irão situar-se na frente e as azuis, no verso, são escondidas. As outras mudanças do mesmo ciclo podem ser observadas diretamente na figura 125.

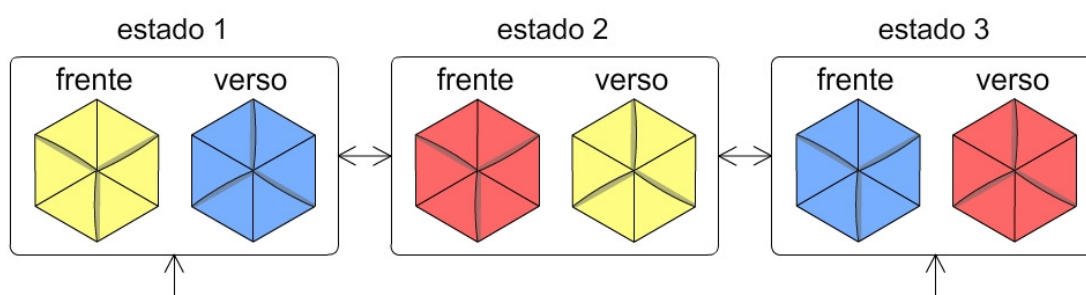


Figura 125 - Ciclo completo de 3 estados

Sem dúvida, o uso de cores ajuda a compreender as trocas das folhas nas pilhas mas há um detalhe de capital importância que não pode passar despercebido. Quando as folhas da frente são transportadas para o verso, os vértices externos dos losangos aparentes (de seus respectivos setores) coincidem com o centro do hexágono. Esta situação é ilustrada na figura 126.

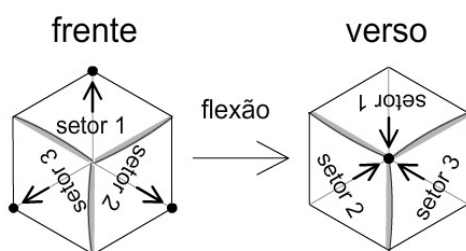


Figura 126 - Losangos dos setores após uma flexão (frente → verso)

Logo, se todos os losangos forem preenchidos por desenhos, este conjunto de transformações causará um efeito surpreendente. A imagem que ocupar toda a face da frente de um hexágono num determinado estado será resultado da junção dos desenhos internos destes três losangos. Em um ciclo completo, um trihexaflexágono apresentará seis imagens compostas, sendo

duas para cada estado (uma na face da frente e outra na face do verso). Além disso, toda imagem no verso será obrigatoriamente resultante das transformações conjuntas de três partes (losangos) da imagem da frente no estado anterior. Exemplos de transformações poderão ser vistos na figura 128, no próximo item.

5.2.5. Relações com outras atividades

Tanto a estrutura geométrica quanto as transformações resultantes do “giro às avessas” do trihexaflexágono certamente não são elementos isolados das outras atividades que dão corpo a este estudo. Inclusive, o trihexaflexágono foi estrategicamente selecionado para servir como ponte entre a atividade 4.1 (a anterior), referente ao jogo *Tantrix* e a atividade 4.2, relativa ao quebra-cabeça *Frantic Fish* (a próxima). Isto se deve basicamente a três fatores:

1 - As peças do *Tantrix* também têm o contorno na forma de hexágonos regulares. Logo, seus desenhos internos podem ser reproduzidos sobre os setores de um trihexaflexágono. Além disso, ambas as atividades trazem imagens transformadas por reflexão e rotação.

2 - Conforme será detalhado no item 4.2, cada peça do *Frantic Fish* representa um peixe cuja cauda é formada por 3 partes congruentes, transformadas umas das outras por reflexão ou rotação. Colocando-se as peças lado a lado, cada uma dessas partes se encaixa com outra, formando losangos com ângulos internos de 60° e 120° . Consequentemente, os desenhos desses encaixes também podem ser reproduzidos sobre os setores de um trihexaflexágono.

3 - Quando as peças do *Tantrix* são unidas, forma-se uma malha de hexágonos regulares e quando se faz o mesmo com as peças do *Frantic Fish*, forma-se uma malha de losangos (ou triângulos equiláteros)⁴⁴. Com base na análise da estrutura do trihexaflexágono, cada malha pode ser compreendida como derivada da outra (figura 127).

⁴⁴ Isto será explicado no item 4.2. Este mosaico constitui um exemplo de Variable Tiling. Peças de formatos diferentes preenchem o plano em diversos arranjos. Estas peças são formadas por partes idênticas (congruentes). Em seu nível mais elementar, qualquer arranjo com as peças de *Frantic Fish* se reduz a uma malha de triângulos equiláteros.

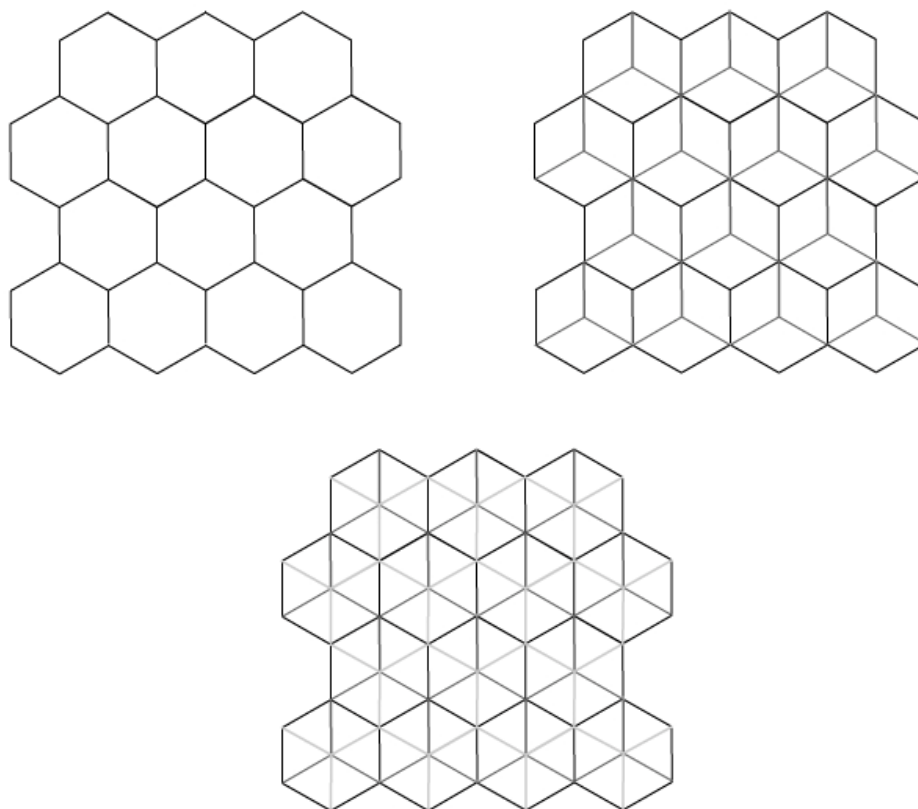


Figura 127 - Malhas com hexágonos, losangos e triângulos equiláteros

5.2.6. “Releitura” de peças do *Tantrix*

No item 5.2.4 foi levantada a hipótese de que se todos os losangos dos setores de um trihexaflexágono fossem desenhados, toda imagem posterior seria resultante das transformações conjuntas de três partes (losangos) da imagem frontal do estado anterior. Como os contornos das peças do *Tantrix* são hexágonos regulares, julguei interessante reproduzir seus desenhos internos sobre as folhas de um trihexaflexágono para observar os resultados das transformações. A figura 128 apresenta os três estados de um ciclo completo com os desenhos originais e transformados.

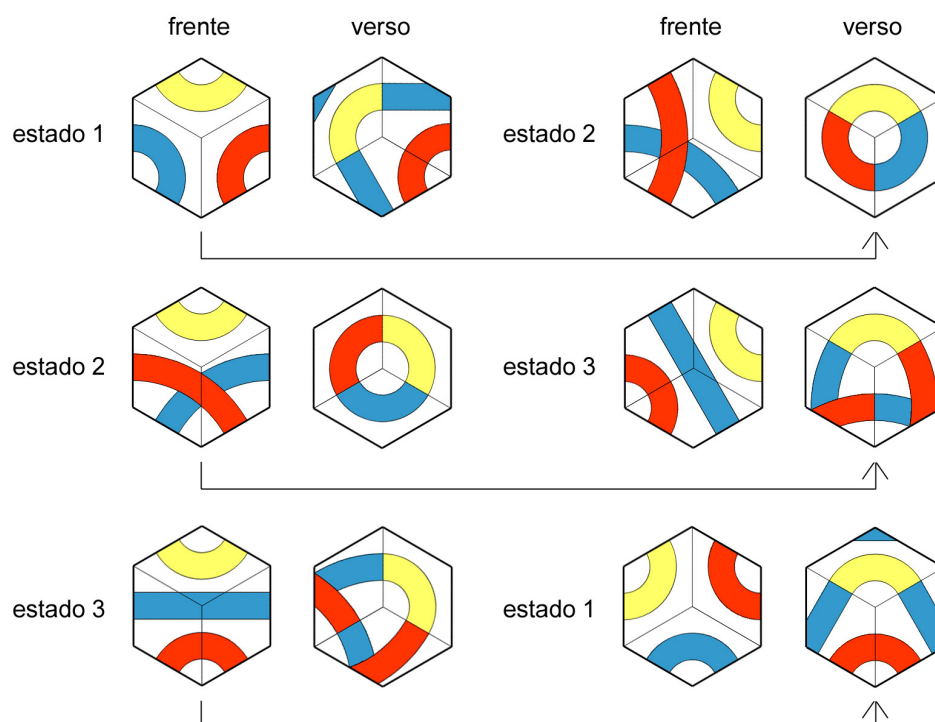


Figura 128 - Ciclo completo com desenhos de peças do *Tantrix*

Vê-se que os desenhos transformados (figura 128) mantêm as concordâncias entre segmento de reta e arco e entre arcos, configurando então uma nova oportunidade para identificar as condições de concordância. Entretanto, qual seria a reação dos alunos ao serem apresentados a este flexágono? A reorganização das partes de cada desenho envolve quais transformações? Rotação, reflexão ou uma combinação das duas? Como traduzir em palavras tais “trocas de posições e orientações”?

Ciente de que os participantes poderiam ter dificuldade em buscar as palavras certas para descrever o fenômeno, decidi explorar seu pensamento visual, aplicando um teste simples. Se os setores do trihexaflexágono fossem substituídos por outros desenhos (figura 129) como ficariam os arranjos transformados?

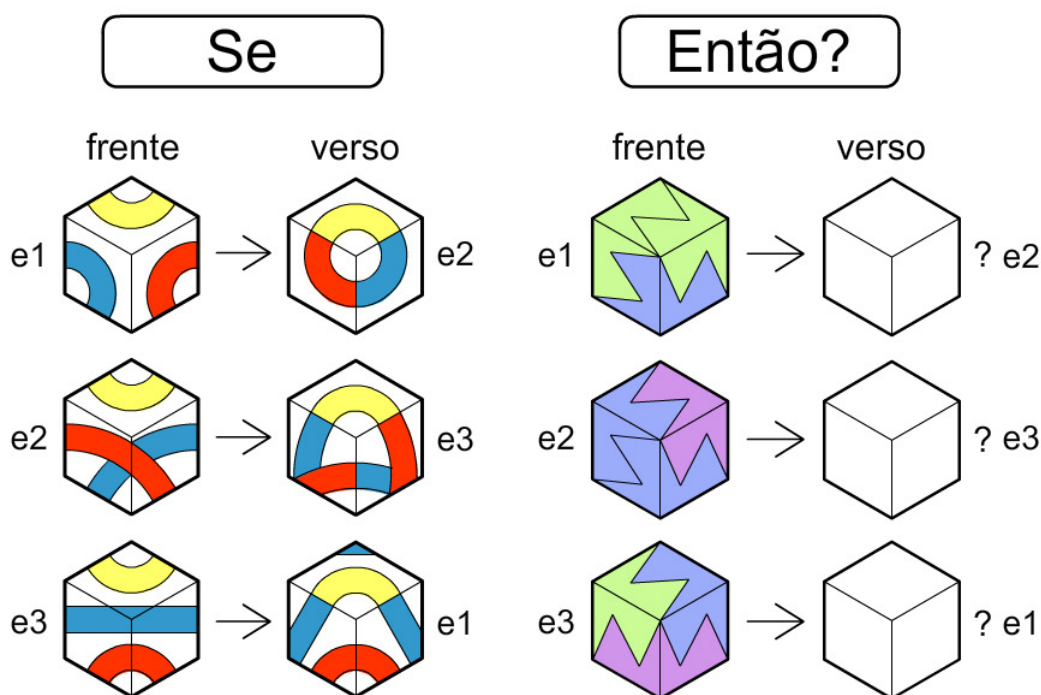


Figura 129 - Um teste para averiguar o reconhecimento das transformações

5.2.7. Experimento com alunos

Ao trabalharem com trihexaflexágonos, os participantes tiveram outra oportunidade de aprender (ou reaprender) vários conteúdos de geometria⁴⁵ de maneira integrada. O experimento foi dividido em três etapas:

- 1 - Montagem e exploração do flexágono de cores amarela, azul e vermelha.
- 2 - Recapitulação de concordâncias com o flexágono das peças do *Tantrix*.
- 3 - Teste visual para averiguar as transformações resultantes dos “giros”.

Na primeira etapa, preparei e mostrei aos alunos uma fita de Möbius com uma meia volta, explorando suas características. Apresentei, também, reproduções de xilogravuras de M.C.Escher a fim de familiarizá-los com o aspecto de um trihexaflexágono. Em seguida entreguei outra tira de papel, formada por triângulos equiláteros preenchidos de amarelo, azul e vermelho (figura 122). Assim como ocorreu com os materiais explicados nos itens 4.2.3 e 5.3.3, eu queria evitar a todo custo a transmissão oral de uma “receita”, um

passo a passo para a construção do modelo de papel, e por isso usei as cores. Com a tira estendida, solicitei que contassem quantos triângulos havia de cada cor, pedindo que dobrassem quantas vezes fossem necessárias, de modo a obterem um hexágono com uma face vermelha e outra amarela (estado 2 da figura 125). A idéia funcionou, pois cada um deles, a seu tempo, conseguiu montar o modelo, efetuando as dobras nos locais certos.

Com o trihexaflexágono em mãos, forcei as dobras pelas diagonais e realizei o primeiro “giro”, revelando os triângulos azuis. Imediatamente, as reações foram de surpresa:

Participante [1] - “Ah, legal! Maneiro fazer isso. Interessante! Funciona.”

Participante [2] - “Caramba cara!”

Participante [3] - “Uau! Que maneiro!”

Após terem efetuado diversos giros, chamei sua atenção para os três estados citados no item 5.2.4 (figura 125) e questionei sobre a transferência dos losangos (setores) da frente para o verso na mudança de estado. Se uma face da frente⁴⁶ tivesse uma ilustração interna, ela ficaria inalterada no verso após a flexão? A resposta fornecida pelos três foi a mesma, cuja imagem coincide com a figura 126:

Participante [1] - “Muda. O centro daqui vai ser as pontas desse aqui.”

Participante [2] - “Muda. As pontas do meio vão para fora.”

Participante [3] - “Porque se a figura tiver um círculo aqui no meio, ele vai parar nas pontas.”

Na segunda etapa, conforme explicado no item 5.2.6, preparei e entreguei um flexágono ilustrado com imagens de peças do *Tantrix* e perguntei quais transformações ocorriam no objeto após os giros. Embora nenhum deles tenha conseguido explicar claramente em palavras o que acontecia na manipulação, davam mostras de terem compreendido as transformações. Com o auxílio dos

45 Volto a informar que cada participante se encontrou com o pesquisador de forma isolada, sem contar com a presença dos outros. A sequência didática foi a mesma para todos, razão pela qual é descrita uma única vez.

diagramas mostrados na figura 130, informei-lhes que a dificuldade de explicá-las era esperada. Ali ocorreram transformações conjuntas de três partes, todas passíveis de serem interpretadas em relação ao espaço tridimensional e bidimensional.

Na terceira etapa, apresentei o teste visual ilustrado na figura 129. Com a substituição das ilustrações dos setores por outras, como ficariam as imagens transformadas? Entreguei lápis de cor e instrumentos de desenho para que eles pudessem representá-las. Todos concluíram a tarefa com êxito, acertando as representações gráficas (figura 131)⁴⁷.

O participante [1] ficou curioso a respeito das ilustrações do flexágono hipotético. “Você já pegou essa imagem pronta em algum lugar então? Achei que você a tivesse feito. Eu queria saber qual parâmetro você usou para fazer essas.” Sua intuição foi surpreendente. As imagens escolhidas eram réplicas de encaixes de peças que viriam a ser exploradas na próxima atividade. Para não estragar a “surpresa”, respondi apenas que não eram criações minhas, sem fornecer maiores detalhes.

46 Face aqui se refere a um hexágono formado por 3 losangos (setores), 6 triângulos equiláteros (folhas).

47 Em alguns instantes, fui obrigado a intervir, explicando como manusear os instrumentos de desenho, porém todos descobriram as soluções por conta própria.

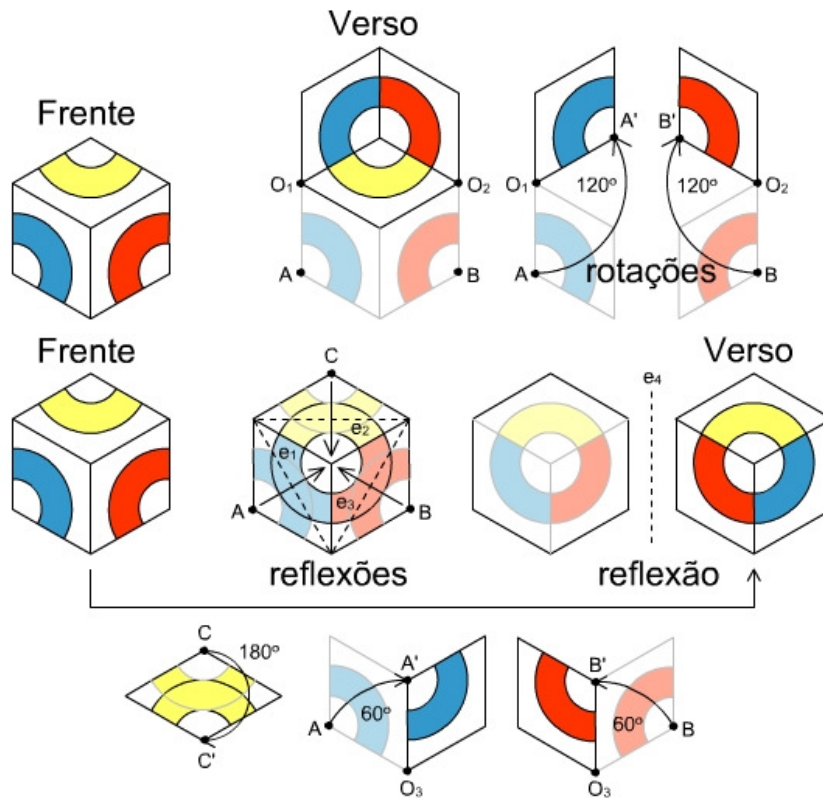


Figura 130 - Diagramas de transformações do "trihexaflexágono de Tantrix"

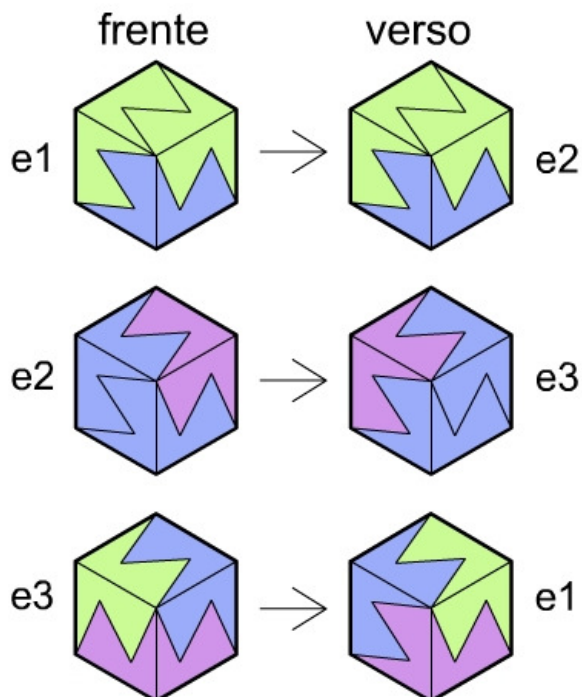


Figura 131 - Gabarito de imagens transformadas de um flexágono hipotético

5.3. O quebra-cabeça *Frantic Fish* de livre-composição

5.3.1. Sobre o *Frantic Fish*

Frantic Fish é um quebra-cabeça de livre composição composto por 60 peças. A invenção é de John A. L. Osborn, o mesmo criador do quebra-cabeça *Batty Lizards*, citado no item 4.2.12. Como o próprio nome diz, as peças de *Frantic Fish* correspondem a peixes estilizados, impressos em dupla face sobre papel-cartão. Isto significa que cada peça contém o perfil de um peixe em cada face. A figura 132 mostra todos os tipos de peixe, disponíveis em três formatos possíveis (polígonos diferentes): 1, 2 e 3.

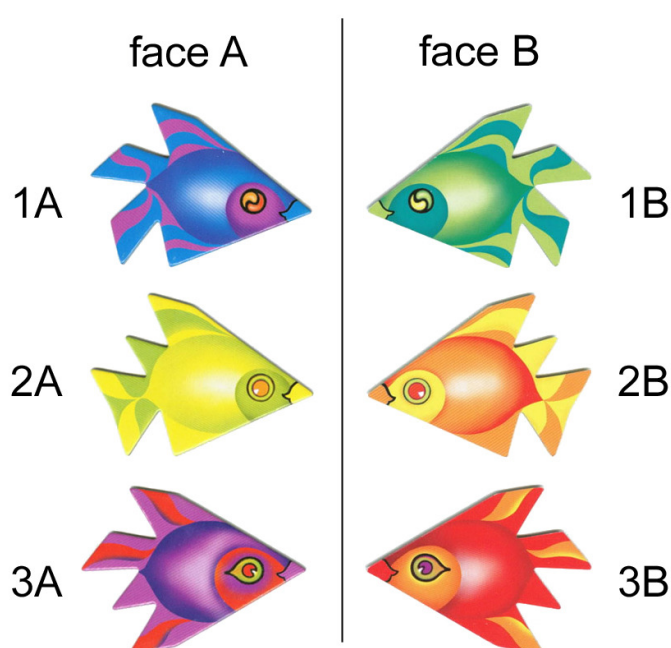


Figura 132 - Peixes (peças) do quebra-cabeça *Frantic Fish*

Ao me deparar pela primeira vez com o brinquedo, surpreendi-me com vários de seus aspectos. A estética do produto era atraente e a saturação das cores chamava a atenção. Os desenhos tinham estilo e a embalagem, uma espécie de aquário, se adaptava perfeitamente ao tema. Todos esses fatores me atraíram assim como uma isca atrai um peixe. Estariam os peixes dando o troco? Todavia, somente ao abrir a embalagem e colocar as peças sobre a mesa, tive então a certeza de que eu havia sido fisgado. Notei que as peças preenchiam o plano de diversos modos possíveis e imediatamente lembrei-me de M.C. Escher, o famoso gravador holandês que encantou o mundo com seus mosaicos periódicos figurados. Teria John A. L. Osborn obtido as formas dos

peixes a partir da deformação de polígonos regulares, inspirando-se nos trabalhos de Escher (Schattschneider, 1990)? Aparentemente sim, contudo havia uma diferença significativa entre aquelas montagens e as obras de Escher. Em cada mosaico deste artista só há um modo de encaixe possível mas as peças de *Frantic Fish* podiam ser dispostas de vários modos diferentes sem brechas ou superposições, conforme mostrado nas figuras de 133 a 137.

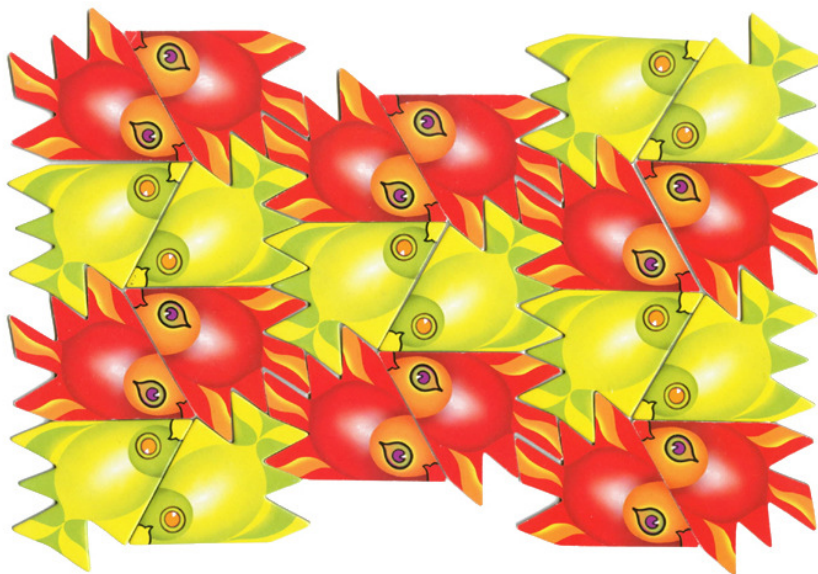


Figura 133 - Mosaico 1 com os peixes 2A e 3B

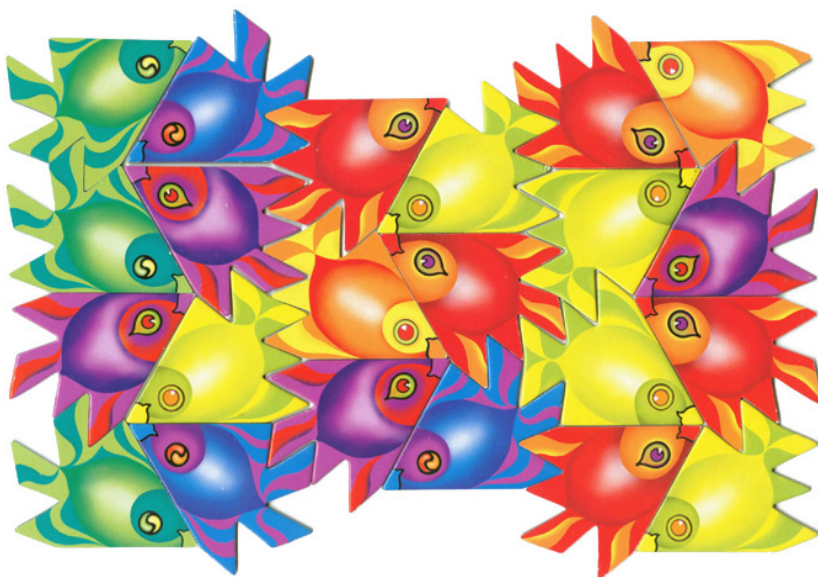


Figura 134 - Mosaico 2 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B

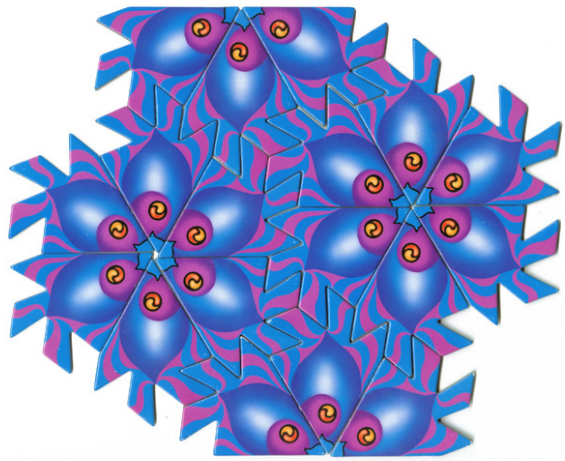


Figura 135 - Mosaico 3 com os peixes 1B

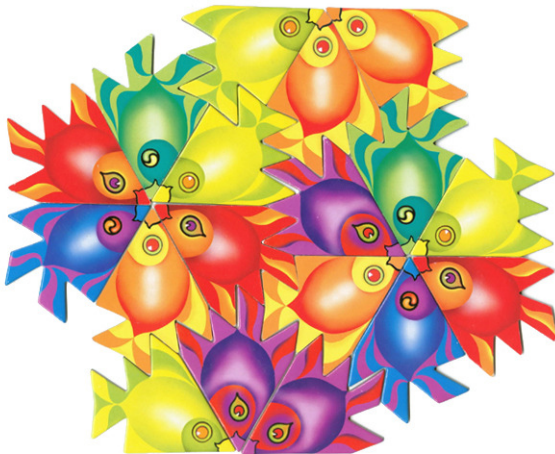


Figura 136 - Mosaico 4 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B



Figura 137 - Mosaico 5 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B

Nenhuma montagem era igual à outra porém algumas partes pareciam ser repetidas periodicamente. Rosáceas tais como as vistas nas figuras 135, 136 e 137 (formadas por seis peixes) levantaram suspeitas de que nos “arredores” dos centros de rotação estariam ocorrendo disputas por comida⁴⁸. Em vista disso, deduzi que o ângulo dos “bicos” tinha uma amplitude de 60° .

Em seguida tive a idéia de separar os peixes em “cabeça” e “cauda”. Todos os tipos apresentados ali tinham cabeças iguais (triângulos equiláteros), no entanto as caudas eram diferentes (figura 138). Depois, optei por reproduzir no papel as montagens sem as caudas e encontrei dois padrões periódicos (figura 139). Naquele instante eu havia descoberto que as únicas responsáveis pela quebra da periodicidade dos mosaicos eram as caudas. Por quê? Haveria alguma relação entre elas?

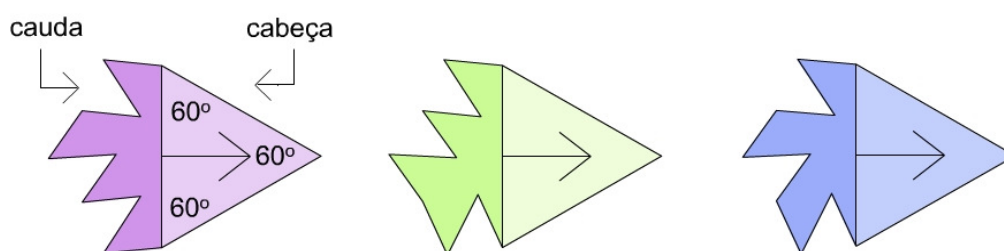


Figura 138 - Peixes separados em cabeça e cauda

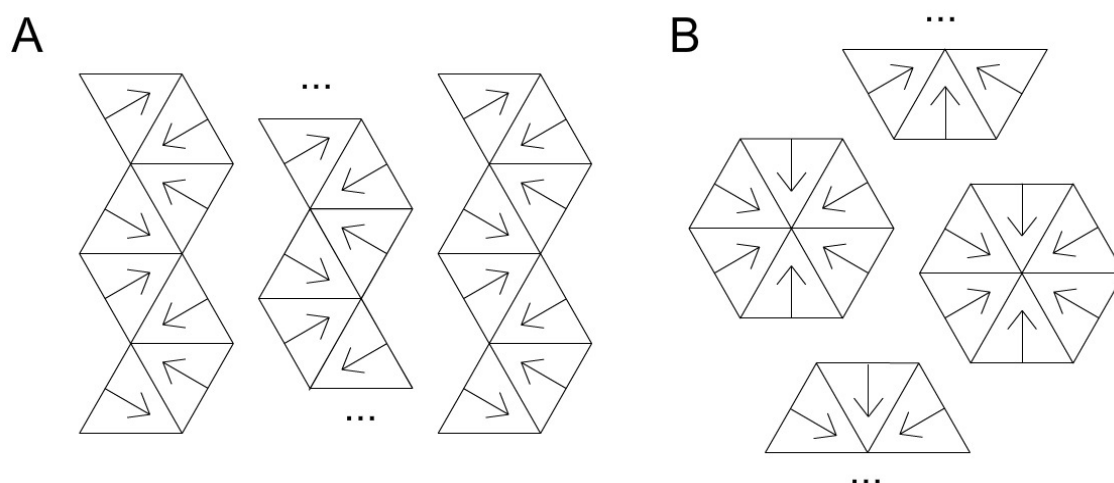


Figura 139 - Padrões periódicos de preenchimento do plano

⁴⁸ Sem dúvida, a imagem lúdica dos peixes convergindo para um ponto atraiu minha atenção para este detalhe ($360^\circ / 6 = 60^\circ$).

5.3.2. O auxílio da geometria dinâmica

Com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, tentei examinar as caudas, simulando diversas montagens por ensaio e erro. Rotacionei uma com a amplitude de 180° e fiquei surpreso ao obter uma estrela. Juntas, várias estrelas preenchiam um mosaico periódico (figura 140). Seria um novo quebra-cabeça? E se eu repetisse o processo com as outras caudas? Elas também se encaixariam (figuras 141 e 142)? A resposta foi positiva.

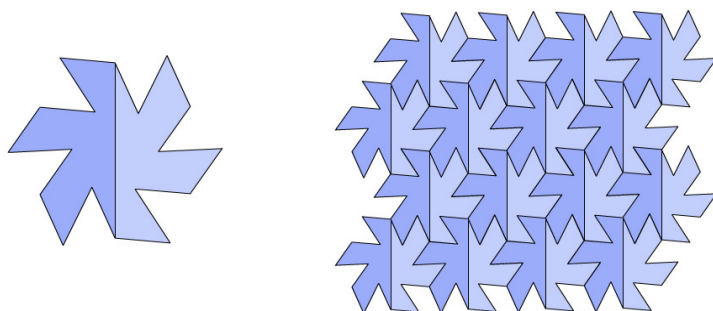


Figura 140 - Polígono e arranjo relativos à cauda do peixe 1A

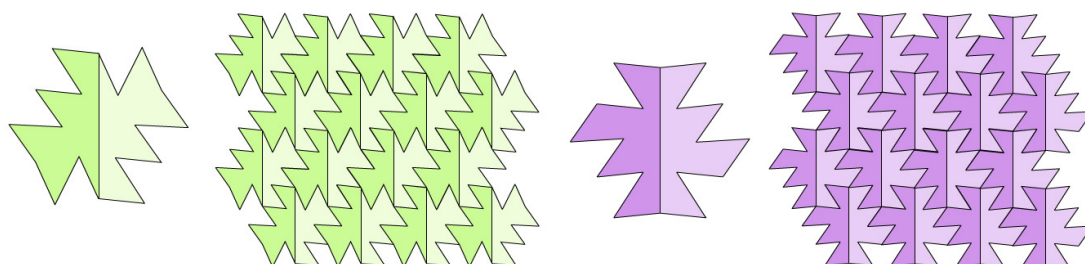


Figura 141 - Polígonos e arranjos relativos às caudas do peixe 1B e 1C

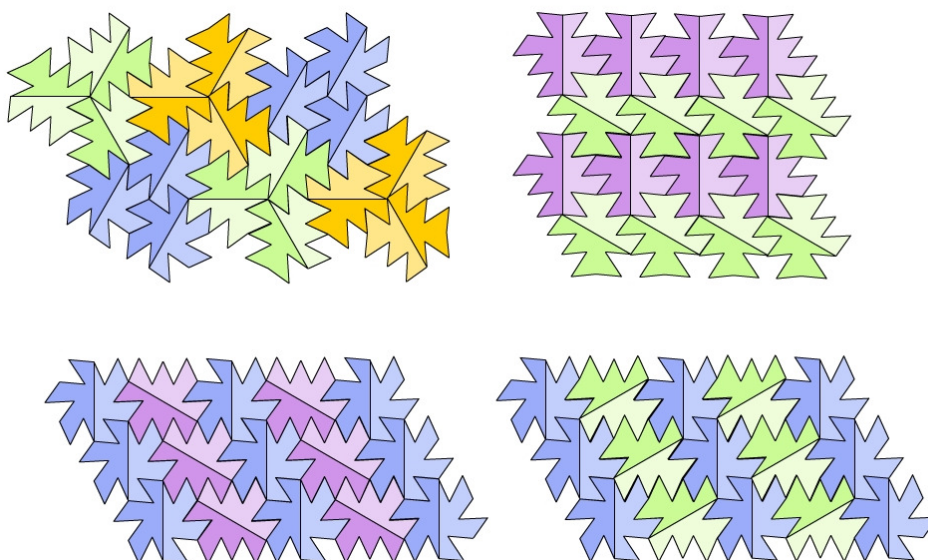


Figura 142 - Outras montagens com as caudas

Embora tivessem sido obtidos a partir de duas caudas distintas, percebi que dois dos polígonos resultantes (figura 141) eram congruentes. Estranhei a suposta coincidência, mas logo em seguida tive um insight. Toda cauda é formada por 3 partes congruentes, transformadas umas das outras por reflexão ou rotação. Colocando-se as peças lado a lado, cada uma dessas partes se encaixa com outra, formando losangos com ângulos internos de 60° e 120° (figura 143). Por conseguinte, qualquer montagem feita com os peixes tem sua estrutura reduzida a uma malha de triângulos equiláteros (cabeças) e losangos (união de partes das caudas). Em última instância, todos os arranjos têm como base uma malha regular de triângulos equiláteros (figura 144).

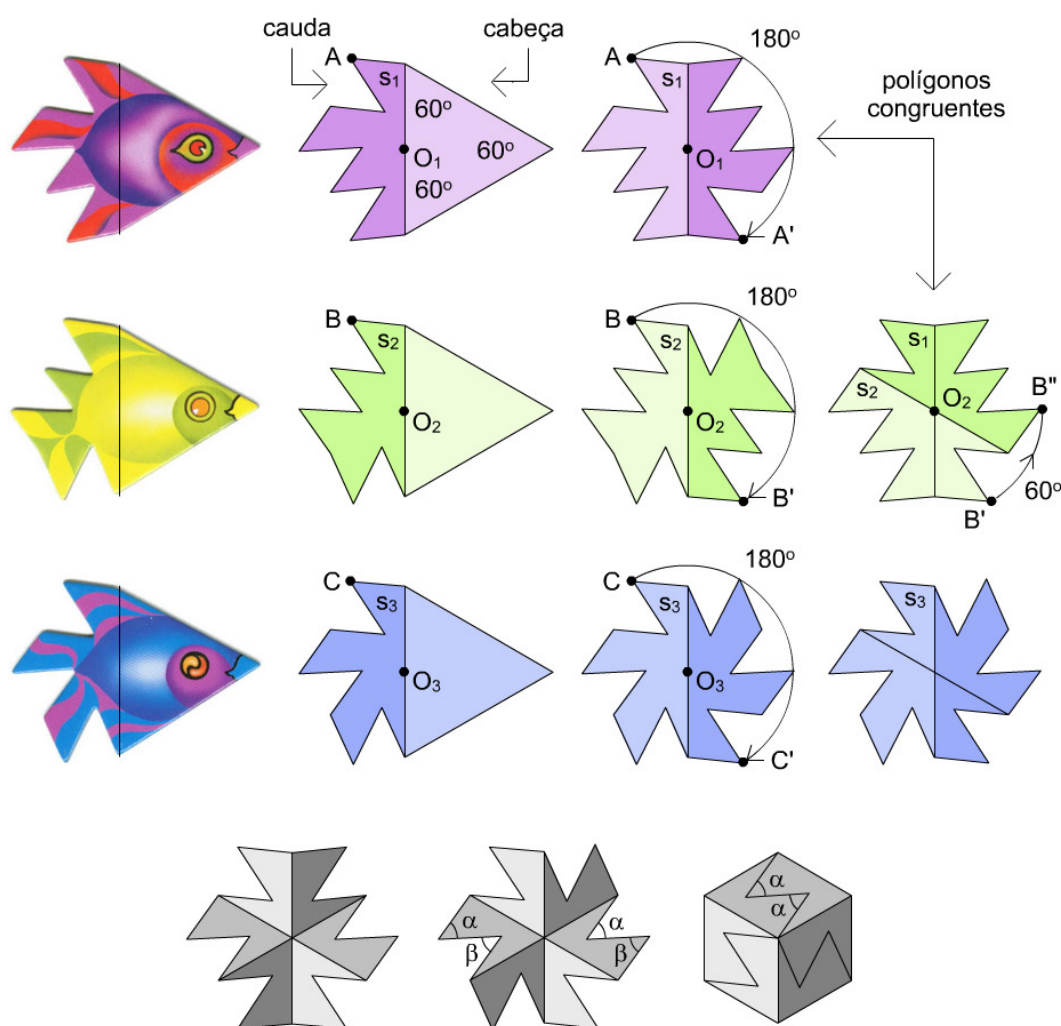


Figura 143 - Diagrama representativo da linha de raciocínio adotada

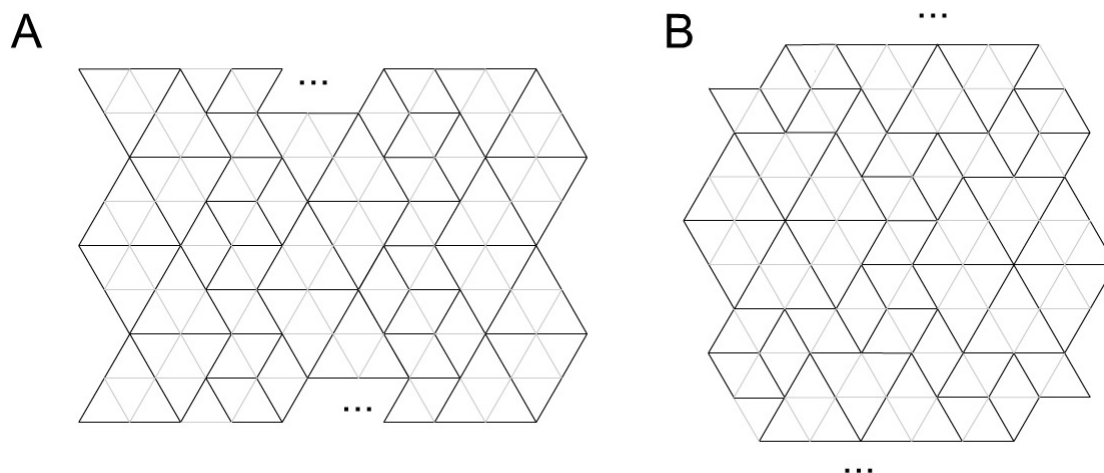


Figura 144 - Revisão dos padrões de preenchimento do plano

5.3.3. Design de material concreto

Descobrir a lógica de funcionamento do *Frantic Fish* somente três dias após o primeiro contato com as peças. Naquele instante, tive a certeza de que o criador havia obtido as formas dos peixes pensando em termos geométricos. Uma idéia tão simples e ao mesmo tempo tão rica não poderia deixar de ser explorada na pesquisa. Eu precisava pensar numa estratégia que levasse os alunos a descobrir as propriedades da estrutura com certa autonomia, pois, em caso contrário, não teriam a mesma sensação de conquista que eu tive. Afinal, conforme atesta Polya:

“Uma grande descoberta resolve um grande problema mas há uma semente de descoberta na solução de qualquer problema. Seu problema pode ser modesto; mas se ele desafia sua curiosidade e traz a campo suas faculdades inventivas, e se você o resolve por méritos próprios, você pode experimentar a tensão e desfrutar do triunfo da descoberta. Tais experiências em uma idade influenciável podem criar um gosto pelo trabalho mental e deixar sua marca na mente e no caráter por toda uma vida.” (Polya, 2004, p.v)

Como os participantes poderiam, no máximo em duas horas, revelar o mistério que havia por trás das montagens? Provavelmente eles não conseguiriam, porém era preciso tentar encontrar um meio-termo para que a solução não lhes fosse gratuita. Além dos possíveis questionamentos, propostas de montagens e hipóteses derivadas, restariam outras alternativas? Por que não criar um material didático concreto para comunicar, de modo sutil, os passos da minha descoberta? No item 4.2.3, apresentei um exemplo deste tipo, enfatizando

o processo de preenchimento de um polígono por losangos pela simulação de sucessivas reflexões.

Para a presente atividade, construí outro material: três discos de papel, presos a capas de formato retangular que deixam à mostra metade dos discos (figura 145). Enquanto cada disco contém a imagem de um peixe completo, cada capa possui apenas uma cauda. Quando um disco é girado de 180° , a cabeça do peixe é escondida por trás da capa e a figura resultante permanece com duas caudas, uma transformada da outra em função do meio giro. Claramente, o processo se resume à linha de raciocínio adotada e ilustrada na figura 143.

As ilustrações do trihexaflexágono hipotético da atividade anterior (figura 131) também haviam sido obtidas a partir dos encaixes de partes das caudas dos peixes. Conforme pode ser visto na figura 146, existem algumas variações destes encaixes que resultaram naquelas ilustrações.

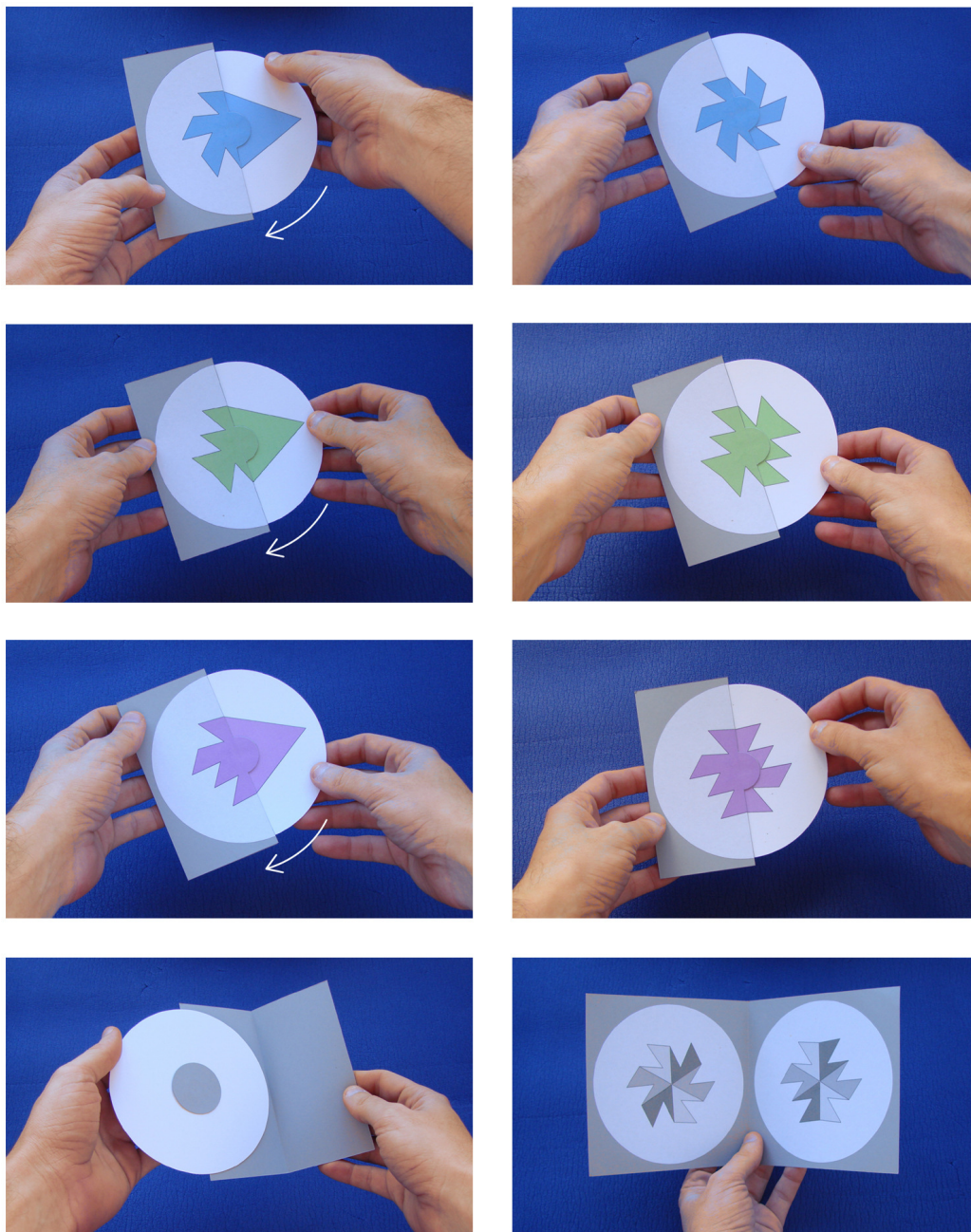


Figura 145 - Material concreto que visa resgatar o processo de descoberta

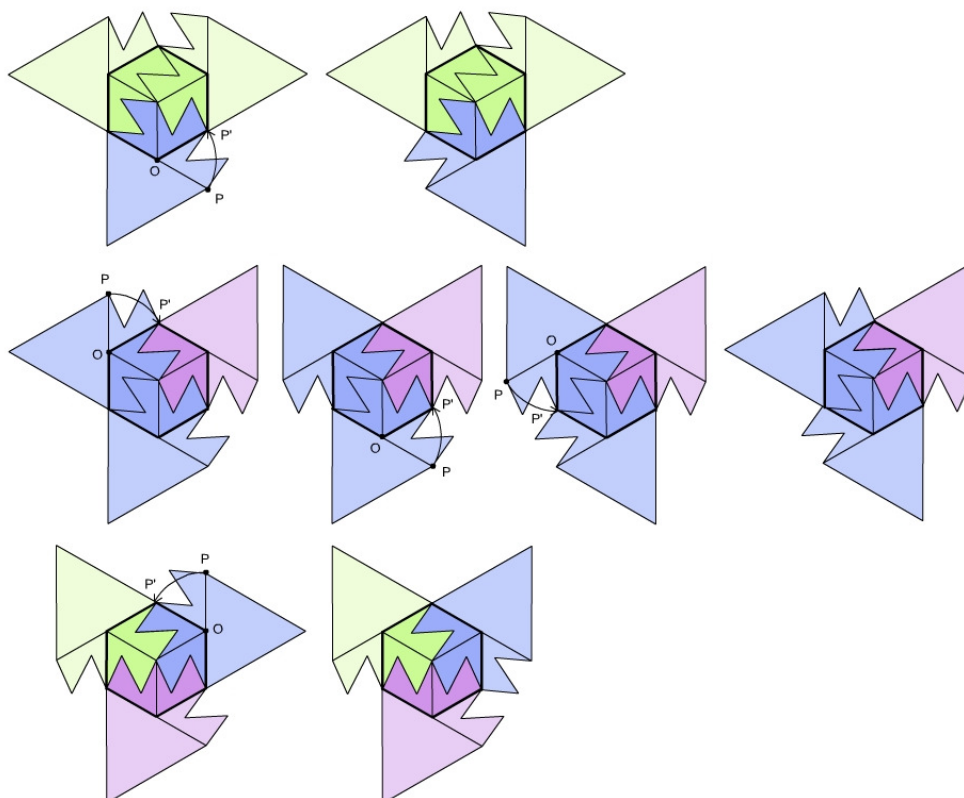


Figura 146 - Encaixes das partes das caudas dos peixes

5.3.4. Ladrilhamento variável

Kappraff (1991) afirma que para que um ladrilhamento possa ser considerado periódico, ele precisa ser invariante por translação. Logo, nem todos os mosaicos produzidos com as peças do quebra-cabeça *Frantic Fish* são periódicos. Tal invariância vale para os arranjos das figuras 133 e 135, não ocorrendo no entanto nos das figuras 134, 136 e 137. Contudo, conforme explicado no item 5.3.2, qualquer que seja a composição realizada com os “peixes”, ela sempre terá origem numa malha de triângulos equiláteros, periódica e regular.

De acordo com John A. L. Osborn, inventor do *Frantic Fish*, um ladrilhamento variável (*variable tiling*) se refere a um determinado conjunto de peças capaz de preencher o plano de infinitos modos diferentes. Ainda que a criação de mosaicos com essa característica não seja incomum, muitos podem não se dar conta disso. Neste tipo de quebra-cabeças, a maior dificuldade consiste em adequar as representações figuradas às formas geométricas ou vice-versa.

Com o propósito de traçar um paralelo com os itens 3.3 e 3.4, relativos aos tetraminós e jogo *blokus*, sugiro um outro exemplo: os tetraminós L, os quais podem preencher o plano de infinitas maneiras, de modo periódico ou não⁴⁹. Para ilustrar o fato, são mostrados um ladrilhamento não periódico na figura 147⁵⁰ e vários exemplos de periódicos na figura 148⁵¹. Quando as peças são unidas para criar outras maiores, novos padrões, antes imperceptíveis, acabam surgindo nas montagens⁵² (figura 149).

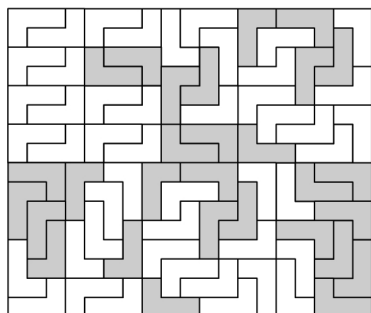


Figura 147 - Arranjo não periódico com diversas instâncias do tetraminó L

49 A frente e o verso de cada tetraminó são diferenciados pelas cores branca e cinza.

50 Pressupõe-se aqui que o módulo completo não será repetido.

51 Outros tetraminós poderiam servir de exemplo. Para uma análise matemática detalhada dos arranjos de poliminós, sugere-se a leitura de Golomb (1994) e Martin (1996).

52 O processo reforça a importância dos itens 3.1 e 4.1, referentes aos desafios que envolviam a percepção de figuras em campos.

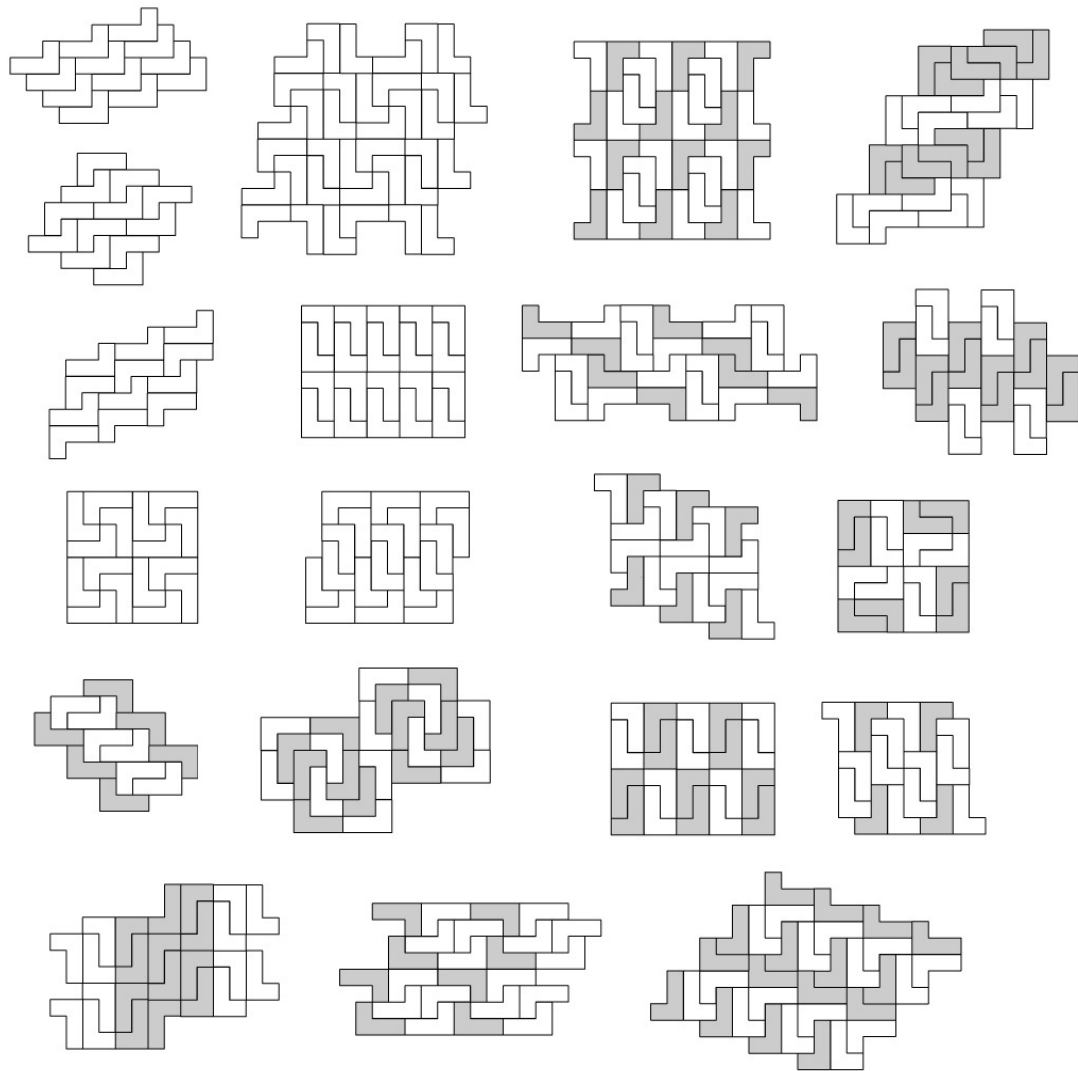


Figura 148 - Arranjos periódicos com diversas instâncias do tetraminó L

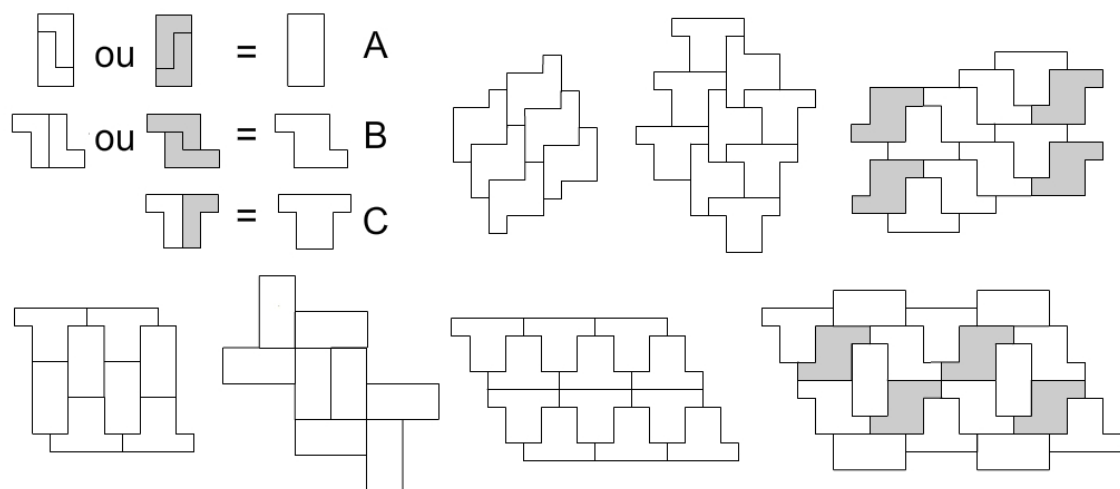


Figura 149 - Quebra-cabeça variável com 3 peças derivadas do tetraminó L

5.3.5. Experimento com alunos

Nesta atividade, foram entregues 120 peças de *Frantic Fish* aos participantes para que tentassem descobrir a lógica de funcionamento das peças e seus encaixes. Como o criador havia gerado aquelas formas? A tarefa consistia em investigar suas propriedades geométricas com o objetivo de resgatar e compreender o pensamento projetual do criador, numa espécie de engenharia reversa.

As reações foram variadas. O participante [1] interagiu com ávido interesse, colhendo informações importantes e se aproximando da resposta sem precisar de muito apoio. Por outro lado, o participante [2] apresentou uma atitude passiva em relação ao objeto de estudo, demonstrando pouca vontade de explorá-lo. Já o participante [3] se envolveu de tal modo que a missão de fazer a análise geométrica talvez tenha lhe parecido despropositada. Qual seria o sentido de investigar as propriedades geométricas de algo tão divertido e atraente? Por que não apenas brincar? Naquelas condições, embora tenha aceito prosseguir com a tarefa, passou a impressão de querer experimentar as peças, sem se preocupar em compreender suas formas.

Em função do excesso de detalhes, evita-se aqui a descrição minuciosa de todas as passagens e diálogos do experimento. Todavia, os comentários apresentados a seguir dão uma idéia da sequência dos fatos e também das reações dos participantes [1] e [3]:

Participante [1] -

- Admiração pelo produto / “É legal esse joguinho dos peixinhos.”
- Percepção de partes diferentes / “Ah, eles têm rabinhos diferentes.”
- Descoberta da forma da cabeça dos peixes por conta própria. / “Uma coisa: ele tem esses lados retos. Se você cortar aqui ele vai ser um triângulo de lados iguais, né?”
- Percepção dos arranjos / “Ah, olha só. Eu vou juntando os biquinhos e os rabinhos é que se encaixam.”
- Relação com o design de moda / “Parece uma estampa de camiseta.”
- Descontração pelo momento lúdico / “Aí dá sete horas da noite e a gente ainda tá aqui montando os peixinhos (risos).”

- Descoberta de um preenchimento do plano com apenas um tipo de peça / “Ah, dá pra fazer de um só.”
- Percepção de partes idênticas / “As cabeças e essas barbatanas são iguais, mas todos os rabos são diferentes.”
- Percepção dos encaixes / “Como se esse aqui fosse o negativo disso aqui.”
- Reação ao ver o material concreto com os discos giratórios / “Ah que legal, são os peixinhos!”
- Descoberta dos polígonos congruentes após a rotação de dois discos (figura 10) / “Ué, esses aqui são iguais.”
- Reação ao ver uma réplica da figura 15 / “Pô, não acredito que você fez o desenho do flexágono com os rabinhos. Que loucura! (risos) (...) Que coisa! (risos) (...) Você não me disse nada. De onde você tirou isso? Ah, foi dos peixes (risos).”
- Curiosidade a respeito do meu processo de descoberta / “Como é que você percebeu isso?”
- Curiosidade a respeito da minha atitude de investigação / “E você comprou esse jogo aqui e resolveu descobrir como é que funcionava?”
- Admiração pela idéia do criador / “Quem pensou nisso pela primeira vez... É fácil quando alguém te fala, mas quem pensou isso pela primeira vez, cara...”
- Admiração da estética do produto / “Fica lindo, né? Dá pra botar num quadro.”
- Reconhecimento da importância da atividade / “Que legal! Maneiro. Ainda bem que você achou esse jogo, né? Porque ficou tudo a ver. Teve a ver com tudo, né? Teve a ver com o *Tantrix*.”

Participante [3] -

- Primeira impressão sobre as peças (ainda sem tocá-las) / “Que bonitinho!”
- Reação ao juntar as peças / “Que legal!”
- Vontade de adquiri-lo / “Quero comprar um desses pra mim (risos).”
- Admiração da estética do produto / “Brinquedo bonito. Vou levar pra casa.”
- Admiração pelo produto / “Brinquedo legal esse, hein?”
- Reconhecimento da importância da geometria no design / “Designers: aprendam geometria.”
- Reconhecimento da importância da matemática em todos os campos do conhecimento / “Matemática é tudo, né? Muito Legal. Adorei o joguinho.”