

4 Atividades Intermediárias

4.1. O desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez

4.1.1. Sobre o desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez

O desafio do item 3.2.1, relativo aos dominós e ao tabuleiro de xadrez mutilado, contribuiu para distinguir as abordagens de natureza dedutiva e indutiva. No atual desafio, após o uso de provas visuais, o foco recai sobre o método da indução matemática.

Aqui são mantidas relações com os itens 3.1.1 e 3.2.1 discutidos no capítulo anterior. O primeiro apresentava um desenho específico, sendo necessário descobrir quantos quadrados estavam presentes ao todo. Já o segundo trazia um tabuleiro de xadrez com duas casas descartadas de suas extremidades. O desafio, agora, consiste em determinar quantos quadrados estão representados num tabuleiro de xadrez (figura 47).

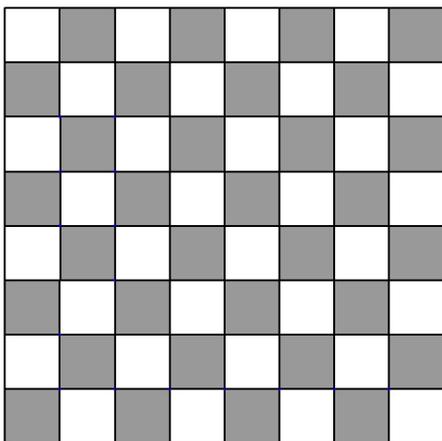


Figura 47 - Tabuleiro de xadrez com 64 casas

Evidentemente, o número total de quadrados dispostos num tabuleiro de xadrez não se restringe ao total de casas do tabuleiro, ou seja, $8 \times 8 = 64$. Se assim fosse, a resposta estaria limitada aos quadrados menores. No desafio do item 3.1.1, foram encontrados quadrados de diversos tamanhos, sendo que o

mesmo deve ocorrer com relação ao tabuleiro de xadrez. Antes era possível executar uma rápida varredura visual dos quadrados. Tendo em vista que o número total de quadrados era pequeno e o desenho relativamente simples, não havia a necessidade de um método mais elaborado para fazer os agrupamentos. Porém, no caso de um tabuleiro de xadrez, a situação muda de figura. O ideal é que se descubra a resposta não apenas para o caso particular de um tabuleiro 8 x 8, mas também para o caso geral de um tabuleiro $n \times n$. Logo, a conferência manual perderá o sentido.

A quantidade total de quadrados 1×1 é 64. Sabe-se também que só existe um quadrado 8×8 , aquele que contém todos os outros menores, porém ainda falta determinar quantos quadrados de tamanhos 2×2 , 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 e 7×7 estão presentes.

A figura 48 apresenta alguns quadrados 2×2 , localizados aleatoriamente, em função de um olhar hipotético, vagando a esmo. Se uma pessoa decidir contar a quantidade total de quadrados 2×2 desse modo, a tarefa provavelmente não será bem sucedida. É provável que ela se perca na contagem, esquecendo-se da posição dos quadrados já contabilizados, confundindo-os com os recentes ou descartando os restantes.

Por que razão é mais fácil saber quantos são os quadrados 1×1 e o 8×8 do que identificar os outros? Quando os quadrados aparecem superpostos, a visualização torna-se confusa. Se houver uma maneira de separá-los em linhas e colunas, a tarefa se reduzirá ao mero somatório de multiplicações.

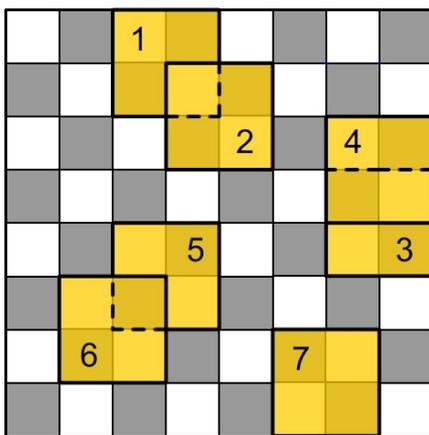


Figura 48 - Alguns quadrados 2×2 localizados no tabuleiro de xadrez

4.1.2. O auxílio da geometria dinâmica

Com o propósito de ensinar um método eficaz para agrupar e contar os quadrados sobrepostos, foram planejadas e realizadas animações em um software de geometria dinâmica. Para minimizar a complexidade do problema, em vez de ter sido utilizada uma malha quadriculada 8 x 8, foram escolhidas duas malhas menores, uma 3 x 3 e outra 5 x 5. Com o apoio das sequências, busca-se responder às seguintes questões:

- 1 - Quantos quadrados 2 x 2 estão presentes na malha 3 x 3?
- 2 - Quantos quadrados 3 x 3 estão presentes na malha 5 x 5?

A figura 49 mostra os estados inicial e final da primeira sequência animada¹², na qual a translação de um ponto resulta numa espécie de expansão da estrutura. Aparentemente, apenas um quadrado 2 x 2, preenchido de amarelo com uma diagonal azul e outra laranja, recebe destaque. Todavia, outras diagonais, relativas a quadrados 2 x 2 apoiados nas margens esquerda e inferior da malha, também são visíveis.

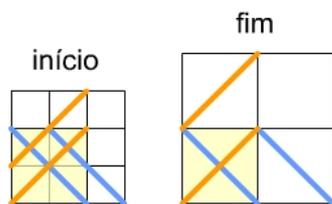


Figura 49 - Expansão da malha 3 x 3 em quadrados 2 x 2

A expansão da estrutura é caracterizada pelo deslocamento dos quadrados 2 x 2. Uma vez separados, a resposta é imediata. São quatro quadrados desta categoria. As diagonais dos quadrados 2 x 2, apoiados nas

¹² Os passos intermediários não causam o mesmo efeito que as animações de origem, por isso foram omitidos. Os quadrados se deslocam de modo similar a portas e janelas de correr.

No item 3.2.1, a diferença de cores das casas do tabuleiro de xadrez foi um fator de capital importância para a busca da solução do problema. No presente desafio, o padrão preto e branco pode ser totalmente descartado pois não interfere na resposta. Por conta disso, as malhas das figuras 3, 4 e 5 não apresentam casas pretas.

bordas inferior e esquerda, indicam as quantidades de linhas e colunas necessárias para a multiplicação.

A figura 50 mostra os estados inicial e final de outra sequência animada, relativa aos quadrados 3×3 presentes em uma malha 5×5 . As diagonais desses quadrados, apoiados também nas bordas inferior e esquerda, são visíveis. As três linhas por três colunas de quadrados 3×3 indicam nove quadrados deste tipo.

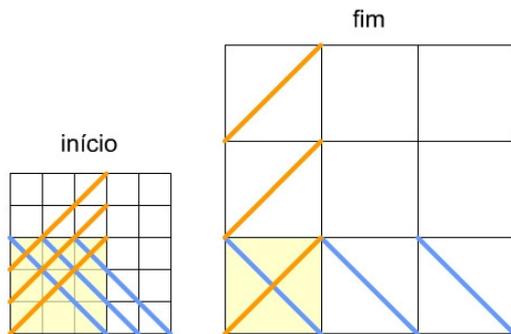


Figura 50 - Expansão da malha 5×5 em quadrados 3×3

Pelo traçado das diagonais, suspeita-se que, em uma malha quadriculada $n \times n$, o total de quadrados internos de tamanho $i \times i$ seja $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$. Conseqüentemente, com relação ao problema original, o tabuleiro 8×8 deverá apresentar (figura 51):

- $8 \times 8 = 64$ quadrados de tamanho 1×1 ;
- $7 \times 7 = 49$ quadrados de tamanho 2×2 ;
- $6 \times 6 = 36$ quadrados de tamanho 3×3 ;
- $5 \times 5 = 25$ quadrados de tamanho 4×4 (figura 5a);
- $4 \times 4 = 16$ quadrados de tamanho 5×5 (figura 5b);
- $3 \times 3 = 9$ quadrados de tamanho 6×6 (figura 5c);
- $2 \times 2 = 4$ quadrados de tamanho 7×7 (figura 5d);
- $1 \times 1 = 1$ quadrado de tamanho 8×8 .

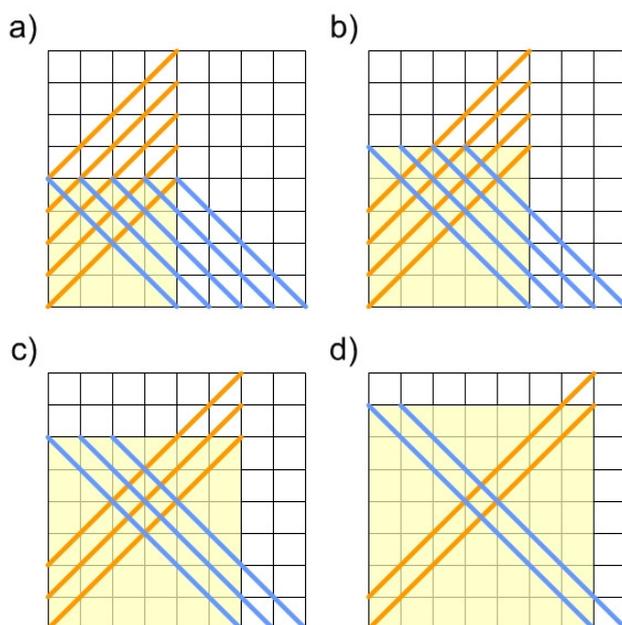


Figura 51 - Quadrados de diversos tamanhos localizados por suas diagonais

4.1.3. O somatório dos quadrados dos números naturais

De acordo com a análise, a quantidade total de quadrados no tabuleiro de xadrez será o resultado do somatório dos valores previamente calculados:

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204.$$

Pelo fato de a sequência apresentar apenas 8 termos, nada impede que estes sejam somados um a um, na ordem crescente. Afinal, quando se paga uma série de produtos em um supermercado, seus valores são acrescidos na ordem em que passam pela esteira. O exemplo faz sentido, embora possa haver um modo mais “elegante” de atacar o problema.

Para ilustrar a diferença, modifica-se o enunciado. Considera-se outro tabuleiro hipotético, de tamanho $n \times n$, sendo n um número natural qualquer. Quantos quadrados estarão representados no tabuleiro? Antes, havia uma restrição: a conta era $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, com $n = 8$. Agora, com n variável, deve ser encontrada a fórmula do somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

Para melhor examinar essa questão, vale apresentar aqui uma contribuição de Polya (2004). Segundo este autor, existem dois tipos de problemas: 1 - problemas para encontrar e 2 - problemas para provar.

1 - Problemas para encontrar: busca-se um elemento, um objeto, algo a ser descoberto, visto e apontado. Num problema de desenho geométrico, o desconhecido é uma figura. No jogo da forca, o desconhecido é uma palavra. No presente desafio, o desconhecido era o número 204. Agora é uma fórmula, aquela que expressa a quantidade de quadrados no tabuleiro em função de n .

2 - Problemas para provar: o objetivo é mostrar, de maneira conclusiva, que uma determinada afirmação é verdadeira ou falsa. Com base na lógica, o ponto de partida são as hipóteses e o de chegada a conclusão. Por exemplo, em um suposto caso de homicídio, se uma testemunha afirmar que o suspeito estava presente na cena do crime, caberá ao juiz averiguar se, de acordo com os registros disponíveis, a assertiva é verdadeira ou falsa.

Vale uma recapitulação. Os desafios apresentados nos itens 3.2.1 e 3.2.2. trazem questões que se enquadram na segunda categoria de problemas. Seus enunciados eram:

- Desafio dos dominós e o tabuleiro de xadrez mutilado – Será possível colocar 31 dominós de tal maneira que todos os 62 quadrados restantes sejam sobrepostos? Se possível, mostre ao menos uma solução. Em caso contrário, prove que isso é impossível.
- Desafio dos tetraminós e o retângulo 4×5 – Será viável preencher todo o retângulo com os cinco tetraminós dados? As peças podem ser transladadas, refletidas (viradas) ou rotacionadas para os encaixes. Se possível, mostre ao menos uma solução. Em caso contrário, prove que isso é impossível.

Com relação ao presente desafio, além de encontrar a fórmula, é preciso ter certeza de que ela será válida para qualquer n natural. Consequentemente, o problema se desdobra em duas etapas: 1 - descobrir a fórmula e 2 - prová-la.

4.1.4. Provas visuais do somatório dos quadrados

De acordo com Polya (1990, 2004), as figuras não são apenas o objeto de problemas geométricos, como, também desempenham um importante papel na resolução de outros tipos de problemas. Esse pensamento é compartilhado por

diversos autores, todavia cada um o defende a seu modo. Usiskin (2005), ao distinguir as diversas maneiras de se enxergar a geometria, ressalta uma de suas facetas mais importantes; trata-se da geometria como veículo para representar conceitos matemáticos ou outros cuja origem não é visual ou física. Segundo o autor, muitas idéias da aritmética, da álgebra e da análise praticamente dependem da representação de figuras geométricas.

A reta numerada descreve o conjunto dos números reais. Gráficos diversos mostram informações numéricas. O gênio de Descartes e Fermat consistiu em representar pares ordenados de números por pontos e em representar as soluções de equações em duas variáveis por meio de retas e curvas. Utilizamos gráficos via coordenadas na matemática do secundário. Mesmo o conceito de simetria, com sua origem no mundo real, é muitas vezes introduzido em álgebra como propriedade dos gráficos de certas funções ou relações. Em cálculo, a área é uma ilustração inestimável do que se entende por cálculo de uma integral. (Usiskin, 2005, p.33).

Na realidade, representações geométricas, gráficos e diagramas de todos os tipos são usados em todas as ciências, não apenas na física, na química, e nas ciências naturais, mas também em economia, e até mesmo na psicologia. Ao usar alguma representação geométrica adequada, nós tentamos exprimir tudo na linguagem das figuras, para reduzir todos os tipos de problemas a problemas de geometria. (Polya, 2004, p.107)

Os livros de Nelsen (1993, 2000) – *Proofs without Words* – e Alsina & Nelsen (2006) – *Math made Visual* – trazem inúmeras provas visuais, valorizando esse aspecto da geometria. Mas o que são provas visuais? Um subconjunto desse universo. Segundo Nelsen (1993, 2000), uma prova visual é uma figura ou um diagrama que, mesmo sem palavras, auxilia o observador a entender o motivo pelo qual uma determinada afirmação é verdadeira.

Uma prova visual pode não ter o mesmo peso e rigor que uma prova formal, mas ela deve fornecer pistas de um caminho a ser seguido. Alsina & Nelsen (2006) assinalam que uma idéia ou relação matemática geralmente comporta diferentes imagens para justificá-la. Logo, dependendo do nível educacional do estudante e de seu grau de familiaridade com as representações disponíveis, certas escolhas talvez sejam mais apropriadas do que outras.

Numa situação ideal, espera-se que o aluno seja capaz de elaborar sua própria prova visual, deixando registros no papel. Como o desafio é lançado do professor para o estudante, ao menos em princípio, cabe somente ao segundo a tarefa de solucionar a questão. Todavia, talvez o aluno de design não veja sentido em resolver o problema. Quantos quadrados estão presentes em uma malha quadriculada de tamanho variável? Qual será o propósito disso? Ao

buscar por uma justificativa plausível para ir adiante, o pensamento prático prevalecerá sobre o cogitativo e o reflexivo, contribuindo para o fracasso da atividade. Porém, imagino que a resolução individual do problema deva ficar em segundo plano em relação à análise guiada pelo professor das soluções criativas que expressam a resposta. Com seu aval, o design da informação voltado para a comunicação visual passa a ser o principal protagonista dessa história, como será visto adiante.

De acordo com Nelsen (1993, 2000), existem pelo menos nove provas visuais originais que representam a expressão do somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais. Dentre elas, apenas duas foram incluídas neste trabalho. A primeira foi criada por Gardner (1973) e Kalman (1991), de maneira independente, e a segunda por Wermuth & Schuh (1999). Enquanto uma faz uso de agrupamentos de quadrados no espaço 2D, a outra utiliza cubos no espaço 3D. Pelo fato de todas as atividades preliminares e intermediárias da pesquisa apresentarem estruturas com quadrados, optei por estas provas visuais em detrimento de outras, mais elaboradas.

Na figura 52 é mostrada a primeira prova visual. Os elementos da estrutura são agrupados de tal maneira que o observador deve reconhecê-los sem esforço como itens da identidade apresentada. A única mudança em relação à prova visual original é a substituição dos tons de cinza pelas cores.

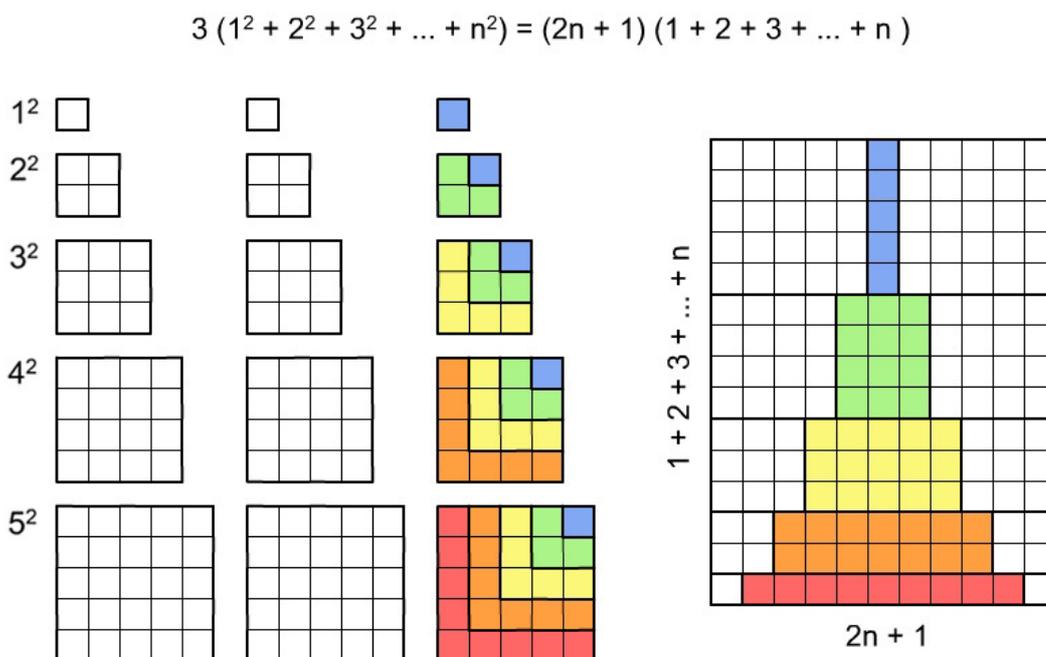


Figura 52 - Prova visual proposta por Gardner (1973) e Kalman (1991)

Do lado esquerdo, aparecem 3 grupos, cada um formado por 5 quadrados distintos, empilhados em ordem decrescente de tamanho. O total de quadradinhos de apenas um grupo corresponde a $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, sendo $n = 5$. São $1 + 4 + 9 + 16 + 25$ unidades. Do lado direito, os quadradinhos coloridos estão dispostos de outra maneira, formando uma torre. Os dois primeiros grupos são girados de cabeça para baixo e unidos às bordas da torre colorida, determinando um retângulo maior. Indubitavelmente, o total de quadradinhos do retângulo corresponde ao triplo da quantidade dos coloridos internos: $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$ mas o total também pode ser calculado multiplicando-se a base pela altura. Sendo a base $= 2n + 1$ e a altura $= 1 + 2 + 3 + \dots + n$, aparece a igualdade $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (2n + 1)(1 + 2 + 3 + \dots + n)$. Ao isolar e substituir a soma dos termos elevados à segunda potência pela notação matemática do somatório, chega-se à fórmula:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(1+2+3+\dots+n)}{3}, \text{ ou seja: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)}{3} \sum_{i=1}^n i$$

A motivação inicial para descobrir a fórmula era evitar a adição de termo a termo na ordem crescente. Contudo, na expressão encontrada, uma das partes corresponde a outro somatório, o dos primeiros números naturais: $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Como ainda falta resolver esta parte, abre-se aqui um breve parênteses e logo em seguida retorna-se ao desafio original.

Sob diferentes contextos, Wertheimer (1959) pesquisou as reações de crianças de diversas idades face a problemas baseados nesta série. Em seu livro *Productive Thinking* há um capítulo que lhe é inteiramente dedicado. Nele, o autor conta a história de um garoto, aquele que viria a se tornar o famoso matemático Gauss. Segundo reza a lenda, o pequeno Gauss recebeu de seu professor um teste de aritmética, sendo desafiado a calcular a soma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$. Rapidamente, enquanto seus colegas de classe trabalhavam no problema, ele apresentou a resposta correta ao professor, surpreendendo-o. Não se sabe ao certo que raciocínio Gauss seguira naquele momento, mas Wertheimer supõe que tenha sido algo assim: em vez de somar os termos na ordem usual, ele notou que 1 e 10 somados davam 11; 2 e 9 também; 3 e 8 idem e assim sucessivamente (figura 53). Como consequência, $5 \times 11 = 55$. Ele havia descoberto a essência da fórmula $S = (n + 1) n / 2$.

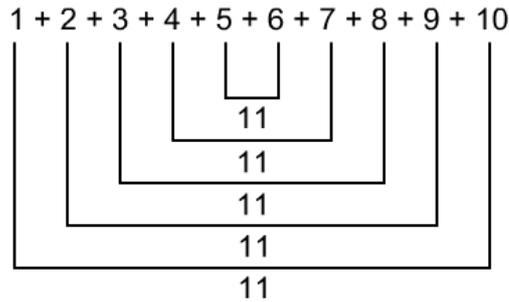


Figura 53 - Uma estratégia para o cálculo do somatório de 1 a 10

A título de curiosidade, relato agora um episódio pessoal. A história certamente não tem o mesmo encanto e importância que a anterior, entretanto traz um exemplo real de como dois problemas distintos podem ser compreendidos pela aplicação da mesma estrutura¹³. Numa roda de amigos, sentado à mesa de um restaurante, um dos presentes me desafiou a resolver um quadrado mágico¹⁴ 3 x 3. Minha tarefa era posicionar os números de 1 a 9, de modo que as somas dos números que estivessem nas linhas, colunas e diagonais fossem sempre iguais a 15. Eu não queria resolver o problema por ensaio e erro. Logo, decidi seguir um dos conselhos de Polya (1990, p.99): “desenhe uma figura”. Sobre um guardanapo, rabisquei o diagrama apresentado na figura 54. Eu sabia que 1 e 9 somados davam 10; 2 e 8 também; 3 e 7 idem e assim sucessivamente. No meio da série havia o 5. E se ele fosse colocado no centro da tabela? Deste modo, para uma diagonal, linha ou coluna que passasse pelo centro, os valores das pontas somados tinham que dar 10. Mas era exatamente isto que mostrava o diagrama: pares de números cujas somas resultavam em 10. Eureka! Eu havia descoberto uma solução.

¹³ O somatório dos números naturais ainda será revisto no item 4.2, aplicado a outro desafio que em princípio não parece ter a menor relação com o anterior.

¹⁴ Um quadrado mágico é uma tabela quadrada de lado n , onde a soma dos números das linhas, colunas e diagonais é constante, sendo que nenhum dos números pode ser repetido.

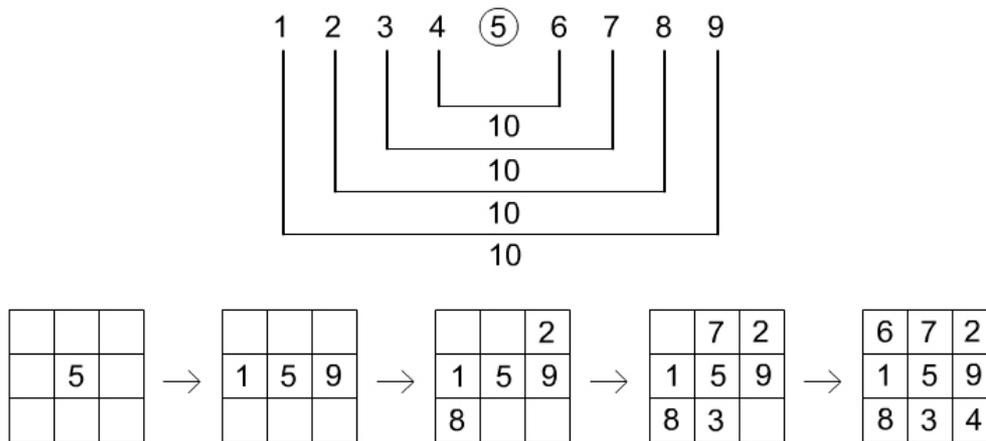


Figura 54 - Um raciocínio análogo para solucionar o quadrado mágico 3 x 3

Wertheimer (1959) apresenta outra questão, de inegável aspecto prático, que também remete ao somatório dos primeiros números naturais. Ao longo de uma parede, em um salão de uma casa, é construída uma escada com 19 degraus. O lado afastado da parede precisa ser recoberto de lajotas quadradas, cujos lados correspondam às alturas dos degraus (figura 55). O carpinteiro solicita que o ajudante busque as peças numa loja, porém como a quantidade não é informada, ele precisa efetuar o cálculo.

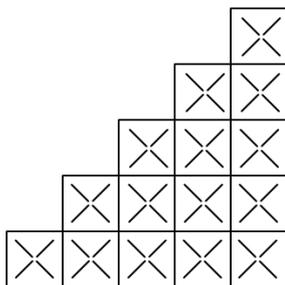


Figura 55 - Lajotas de uma escada em construção com 5 degraus

Aqui pode ser aplicada a mesma estratégia utilizada na prova visual do somatório dos quadrados dos números naturais. A idéia é formar um retângulo com partes dos elementos do somatório. A figura 56 reproduz a 55 com o mesmo código de cores anterior. Multiplicando-se a quantidade de linhas pela de colunas de quadrados, chega-se à fórmula: $S = n(n + 1) / 2$.

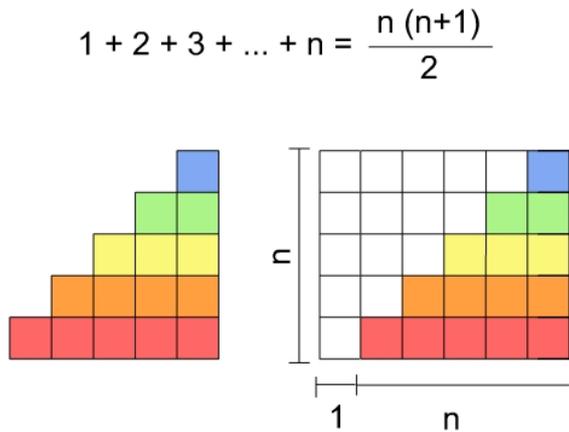


Figura 56 - Prova visual do somatório dos primeiros números naturais

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)}{3} \sum_{i=1}^n i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{logo:} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ambas as séries foram desvendadas. A quantidade total de quadrados num tabuleiro de xadrez $n \times n$ é $n(n+1)(2n+1)/6$. Para $n = 8$ o resultado é 204.

A figura 57 apresenta a segunda prova visual. Desta vez, no lugar de quadradinhos são usados cubinhos para representar as unidades. Por isso, idealmente, a demonstração deve ser realizada com o auxílio de material concreto. Dois produtos que parecem auxiliar nessa tarefa foram pesquisados, contudo a análise de ambos é assunto do próximo item. No momento, julgo ser importante destacar a principal vantagem da segunda prova visual (figura 57) em relação à primeira (figura 52). No caso anterior, procurou-se criar um retângulo com partes dos elementos do somatório dos quadrados dos números naturais. Para tal, três grupos foram formados. A multiplicação da quantidade de linhas por colunas do retângulo resultou no total de elementos. A fórmula foi encontrada, mas o problema não foi resolvido. Para substituir $1 + 2 + 3 + \dots + n$ por $n(n+1)/2$ foi necessário ir adiante (figura 56).

De certo modo, a segunda prova visual repete a estratégia da primeira. Antes, o objetivo era criar um retângulo; agora, é montar um paralelepípedo reto. De acordo com a figura 57, três grupos (como no caso anterior), cada um contendo a quantidade exata de unidades de um somatório são formados pela justaposição de diversas placas. O sólido resultante da união das três partes lembra uma arquibancada, cuja face lateral direita corresponde com exatidão à escada da figura 56. Como obter o paralelepípedo? Imagina-se uma cópia do poliedro final, rotacionada de 180° em relação ao seu eixo transversal. O encaixe

das duas partes por deslocamento resolve a questão. Para finalizar, basta calcular comprimento x largura x altura e dividir o produto pela quantidade total de grupos do somatório. Como resultado, tem-se a expressão completa, com o termo $(n + 1) / 2$ já no lugar de $1 + 2 + 3 + \dots + n$.

É pertinente notar que a passagem da dimensão 2D para a 3D inclui o processo relativo à prova visual da figura 56, mas de forma transparente para o observador. A primeira prova visual (figura 52) ainda pode ser recuperada pela segunda (figura 57) de modo simples, conforme mostra a figura 58.

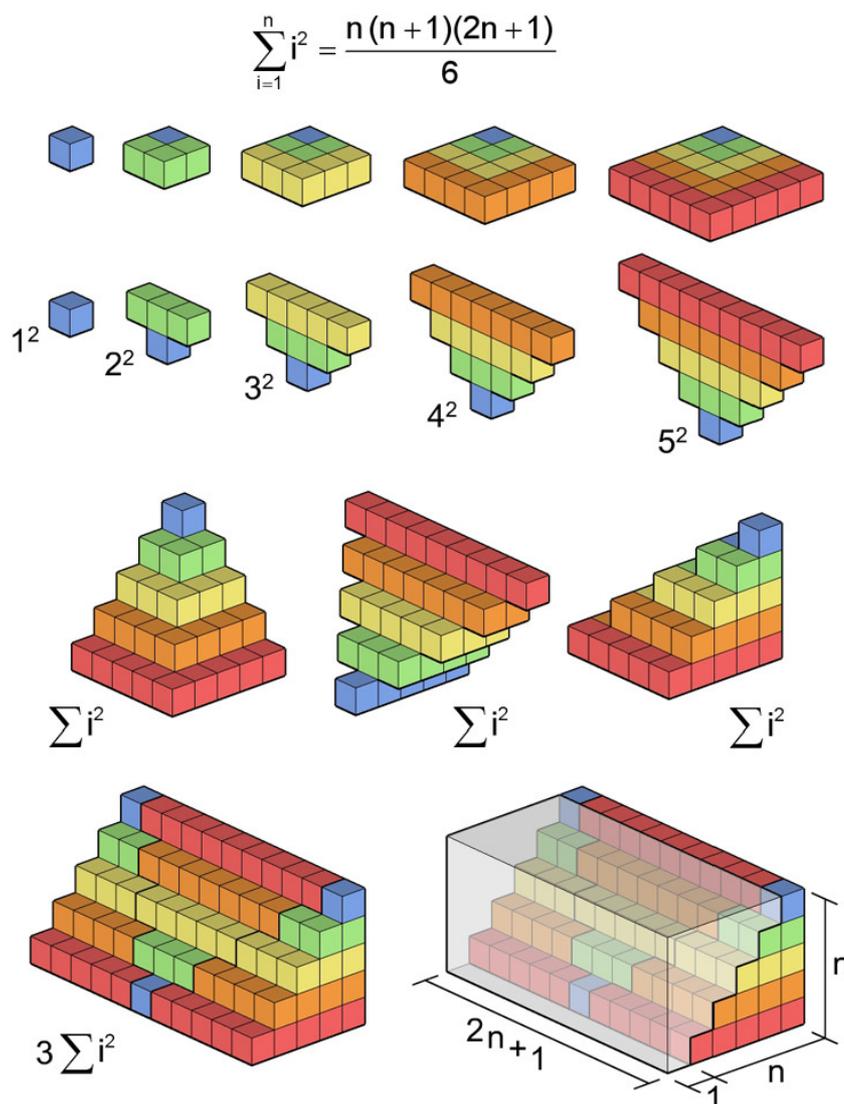


Figura 57 - Prova visual proposta por Wermuth & Schuh (1999)

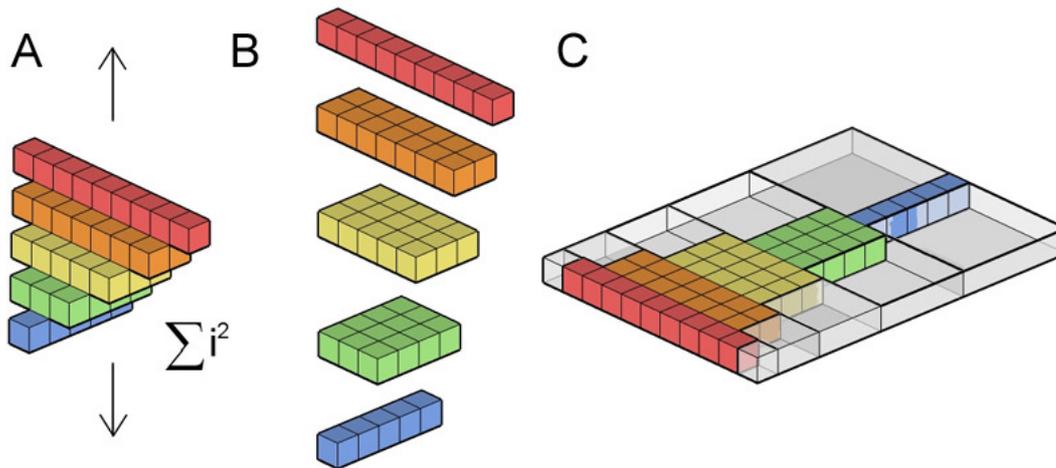


Figura 58 - Retorno à primeira prova visual

4.1.5. Somatório do quadrado dos números naturais por indução matemática

Tomando como exemplo a tentativa de descobrir a fórmula dos primeiros quadrados dos números naturais, neste item procura-se estabelecer a diferença (e a relação) entre os métodos de indução “pura” e indução matemática. O primeiro método é utilizado em todas as ciências, já o segundo é aplicado apenas na matemática, para provar teoremas de um determinado tipo. Conforme citado antes, no exemplo do item 3.2.2, a indução se refere a um processo de descoberta de leis gerais por meio da observação e recombinação de instâncias particulares. Porém, de acordo com Polya (2004):

Em matemática, assim como nas ciências físicas, nós podemos usar observação e indução para descobrir leis gerais. Mas há uma diferença. Nas ciências físicas, não há uma autoridade maior que a observação e a indução porém, na matemática, existe essa autoridade: a prova rigorosa. (Polya, 2004, p.117)

Para o matemático, a indução “pura” pode ser útil para formular uma conjectura. Todavia, essa conjectura ainda deverá ser provada pelas vias da dedução ou indução matemática. Mas como? Pela indução matemática, pode-se provar que um enunciado vale para todos os números naturais n e para isso é necessário superar dois testes:

- 1) O enunciado é válido para $n = 1$?
- 2) Sendo válido para $n = k$, ele também é válido para $n = k + 1$?

Se nenhum dos testes falhar, então a conjectura será válida para todos os inteiros. Se é verdadeira para 1, então também será para 2, para 3 e assim por diante. Para ilustrar o processo, usualmente é feita uma analogia com o efeito dominó (figura 59). Supõe-se uma longa fila de dominós em pé. Como garantir que todos os dominós cairão? Basta ter certeza de dois itens:

- 1) O primeiro dominó precisa cair, caso contrário não há partida.
- 2) Sempre que um dominó cair, o vizinho de trás também cairá.

Em relação ao segundo item, uma coisa é certa, se a distância entre os dominós for maior que a altura dos mesmos, um não alcançará o próximo, ao tombar.

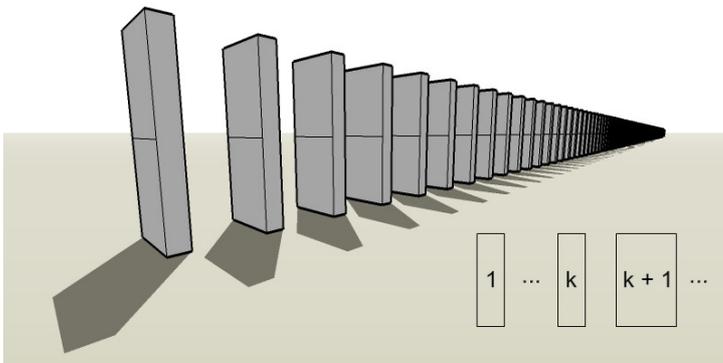


Figura 59 - Analogia da indução matemática com o efeito dominó

No item 4.1.4, foram apresentadas provas visuais nas figuras 52 e 57 que levantaram a seguinte hipótese:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Certamente a fórmula é válida para $n = 5$. Mas será igualmente válida para qualquer n ? Ao reconstruir as estruturas geométricas, pode-se repetir o teste para $n = 1, 2, 3, 4$ etc. Contudo, por maior que seja a quantidade de valores testados, sempre restarão os próximos da fila. Porém, se a generalização é impossível, haverá um modo de prová-la pelo método de indução matemática? A resposta é positiva e seus detalhes são descritos a seguir.

No item 4.1.4, verificou-se que a fórmula do somatório dos primeiros números naturais é a seguinte:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Mas será esta também válida para qualquer n ? A dúvida é pertinente, pois ela foi descoberta por intermédio de outra prova visual, não rigorosa. Porém, aqui há uma diferença. É evidente, pelo diagrama apresentado na figura 56, que para valores de n diferentes de 5, sempre haverá a possibilidade de se fechar um retângulo, multiplicar a base pela altura e dividir o resultado à metade. A estrutura geométrica da representação associada é tão nítida que os passos da demonstração indutiva matemática estão praticamente implícitos.

Segundo Polya (1990), é natural procurar algum tipo de paralelismo entre as duas somas e observá-las juntas:

n	1	2	3	4	5	6	...
$1+2+3+\dots+n$	1	3	6	10	15	21	...
$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$	1	5	14	30	55	91	...

Haverá alguma relação entre as duas últimas linhas? Pode-se tentar examinar suas razões:

n	1	2	3	4	5	6	...
$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$...

Aparentemente, a divisão das séries corresponde a $(2n+1)/3$:

n	1	2	3	4	5	6	...
$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$...

Ou seja:

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n} = \frac{(2n+1)}{3}$$

Ao substituir a expressão do somatório dos primeiros números naturais pelo resultado já conhecido e transferi-la para o lado direito da igualdade, chega-se à mesma conjectura obtida com as provas visuais:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somente a partir das observações cuidadosas, percebeu-se certa regularidade e coerência. Como passo inicial, até agora foi utilizada apenas a indução “pura”. A tentativa de generalização começou pelo esforço de compreender os fatos observados, com base em analogias e no teste de alguns valores. Resta transformar a hipótese em certeza. Agora, o problema para “encontrar” se configura em um problema para “provar”.

A fórmula é válida para $n = 1$? $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ Sim! É válida.

A fórmula é válida para $n + 1$? Substituindo n por $n + 1$, tem-se:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n-1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$(n+1)^2 = \frac{(n-1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(n+1)^2 = \frac{n+1}{6} [2n^2 + 3n + 4n + 6 - 2n^2 - n]$$

$$(n+1)^2 = \frac{n+1}{6} [6n + 6]$$

$$(n+1)^2 = (n+1)^2$$

Sim! É válida. Portanto, a conjectura é válida para qualquer n .

4.1.6. A geometria no design dos materiais concretos de apoio

Este item traça o perfil de dois produtos – *LiveCube*¹⁵ e *Omnifix Cube*¹⁶ – que, dentre outras aplicações, servem para reproduzir as provas visuais anteriores. De procedência norte-americana, ambos são brinquedos de encaixe, disponíveis em alguns *kits* com diversas peças idênticas. Suas unidades básicas são cubos de dimensões 2 x 2 x 2 cm³ que podem ser conectados entre si para formar agrupamentos maiores¹⁷.

Pelo fato de esta pesquisa estar inserida no campo do design, parece-me indispensável ressaltar que os projetos desses materiais didáticos dependem da aplicação criteriosa de conceitos geométricos. Com vantagens e desvantagens, os exemplos selecionados trazem duas soluções para uma mesma questão aberta. Diversos cubinhos precisam ser conectados e desconectados entre si, de modo simples e rápido. Como devem ser os desenhos dos encaixes? Para começar, vale a pena rever as características de um dos mais consagrados brinquedos do gênero, o *Legó*¹⁸.

Legó (Christiansen, 1961) – Os blocos de *Legó* possuem duas partes imprescindíveis: pinos na parte superior e tubos na parte inferior. Os pinos se encaixam entre as laterais externas dos tubos e as bordas internas das peças. Quando os pequenos tijolos são encaixados entre si, os pinos estendem as laterais e os tubos. O sistema de ligação utiliza um ajuste de interferência, caracterizado por uma conexão segura com atrito entre duas partes sem a necessidade de um prendedor adicional. O material é elástico e retorna à forma original quando separado.

O sistema do *Legó* funciona a contento, mas as conexões limitam-se a uma única direção e sentido. Uma peça, com pinos na face superior, só pode ser encaixada na parte inferior de outra peça (figura 60). Em qualquer montagem, as faces laterais são lisas, no entanto sempre restam pinos no topo.

15 <http://www.livecube.com/>

16 <http://www.didax.com/shop/searchresults.cfm/Keyword/omnifix%20cube.cfm>

17 Talvez seja inevitável a comparação com o material dourado, proposto pela médica e educadora italiana Maria Montessori, mas aqui as aplicações não limitam ao ensino do sistema de numeração decimal-posicional e das operações aritméticas.

18 <http://www.lego.com/eng/info/default.asp?page=group>

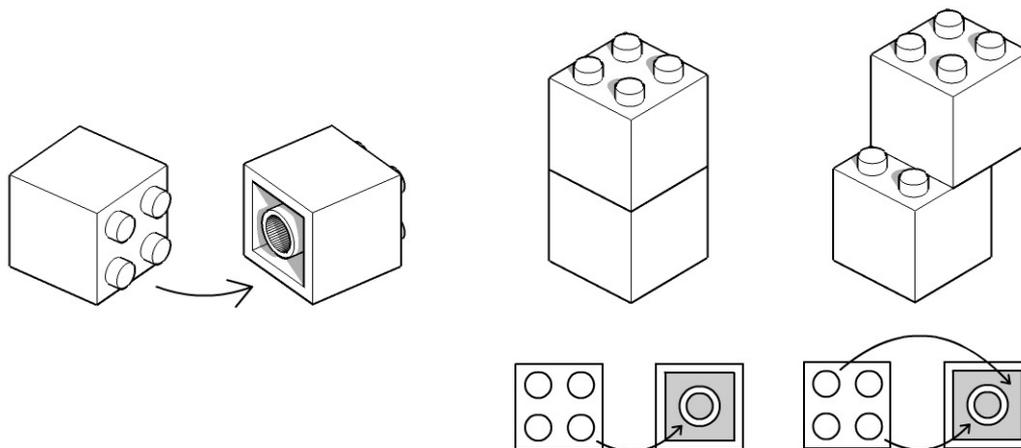


Figura 60 - Encaixes no sistema de montagem do Lego

LiveCube (Shih, 2004) – Assim como no Lego, as partes do *LiveCube* são produzidas em plástico injetado e suas conexões são realizadas por ajuste de interferência. Cada bloco (cubo) possui dois pinos. Observa-se, na figura 61, que cada face é dividida em quatro setores quadrados: A, B, C e D. Pinos ocupam dois desses setores em apenas uma das faces. No referencial adotado, um pino é posicionado acima, à esquerda e o outro fica embaixo, à direita. Os outros setores comportam furos que servem para receber os pinos. A solução adotada supera a do Lego em pelo menos dois aspectos. As conexões podem ser realizadas em várias direções e sentidos. Um único cubo permite o encaixe de até seis outros, um em cada uma de suas faces, incluindo aquela que possui pinos. Quando as faces com pinos de duas peças são conectadas entre si, o objeto resultante fica livre de protuberâncias (pinos externos). Em alguns tipos de quebra-cabeças, peças correspondentes a policubos devem ser deslizadas umas sobre as outras, sem perderem o contato face-a-face¹⁹. Com o *LiveCube*, a reprodução desses quebra-cabeças é viável.

¹⁹ Os capítulos 5 e 6, Cubic Block Puzzles e Interlocking Block Puzzles, do livro *Geometric Puzzle Design* detalham o assunto. Seu autor, Stewart Coffin (2007), é um especialista no design de quebra-cabeças geométricos. Os cubos Soma, Tetris (<http://www.tetris.com/>) e Bedlam (<http://www.bedlampuzzles.com/>) são exemplos de um mesmo tipo de quebra-cabeça: com um número limitado de peças formadas por cubinhos, é preciso montar um cubo maior. O primeiro tem 3 x 3 x 3 cubinhos separados em 7 peças. O segundo e o terceiro têm 4 x 4 x 4 cubinhos. O Tetris possui 12 peças e o Bedlam 13. Existem 240, 9839 e 19186 maneiras diferentes de montar cada um desses cubos maiores.

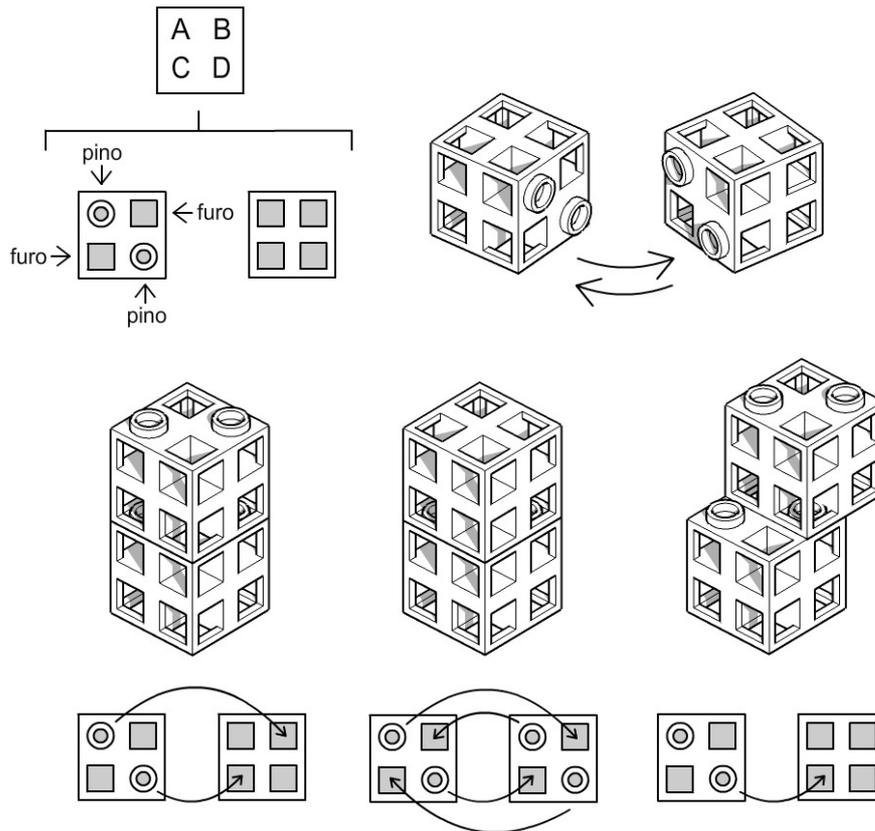


Figura 61 - Encaixes no sistema de montagem do *LiveCube*

OmniFix Cube – As peças de *OmniFix* são de material plástico, porém de um tipo mais flexível do que os prévios. As conexões também são realizadas por ajuste de interferência. Há uma grande diferença das partes em relação às anteriores, pois elas vêm planejadas de fábrica. Uma vez montado, um cubinho não pode ser aberto novamente. Os formatos dos pinos e furos seguem outra configuração (figura 62). Para entender os desenhos, imagina-se uma coroa circular centralizada numa face. A coroa é dividida em 8 setores congruentes. Quatro setores não adjacentes são puxados (pinos), enquanto os outros são empurrados (furos). A forma resultante se assemelha a um ventilador com quatro pás. Todas as faces contêm pinos e furos. Neste caso, partes adjacentes são obrigatoriamente conectadas (figura 63). Como resultado, em teoria, a estrutura de um conjunto de cubos *OmniFix* torna-se mais rígida²⁰. O mesmo não ocorre com o *LiveCube*; em compensação, como todas as faces apresentam protuberâncias (pinos), os encaixes em policubos côncavos dependem da decomposição e recomposição de algumas partes. Além disso, quando peças

²⁰ Na prática isso não ocorre pois fatores como pressão e atrito entre as partes também devem ser levadas em consideração.

são unidas, é necessário exercer forte pressão com os dedos sobre os pinos das faces paralelas opostas às do encaixe. O uso prolongado do material é desaconselhável, uma vez que pode provocar pequenas lesões nos dedos.

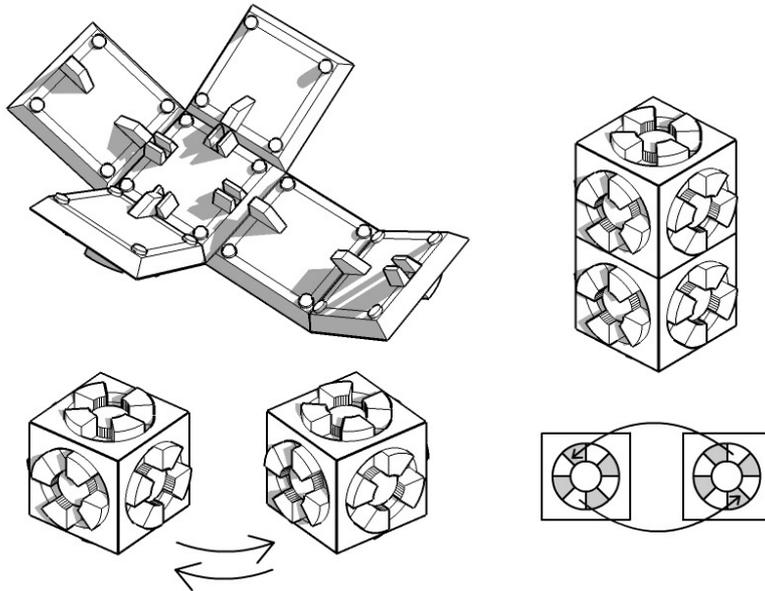
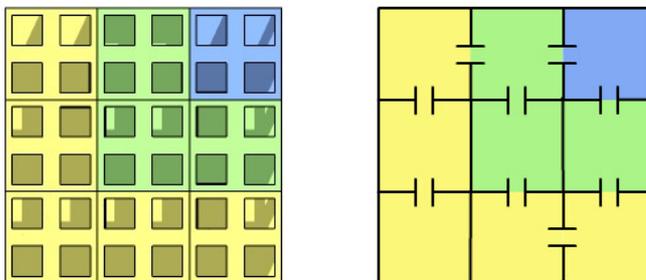


Figura 62 - Encaixes no sistema de montagem do *OmniFix Cube*

LiveCube



OmniFix Cube

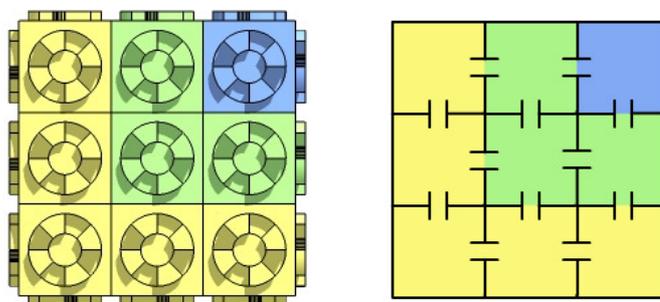


Figura 63 - Diagramas de conexões de peças *LiveCube* e *OmniFix Cube*

4.1.7. Experimento com alunos

Neste experimento, usei o mesmo tabuleiro de xadrez relativo ao item 3.2.3. Além disso, eu preparei quatro quadrados de diferentes tamanhos (1 x 1, 2 x 2, 3 x 3, 4 x 4) em papel com gramatura de 180g / m² na cor amarela (figura 64). A idéia era apresentar somente o tabuleiro; todavia, caso o aluno optasse por desistir do problema, estas peças lhe seriam entregues, como uma forma de incentivo para ir adiante.

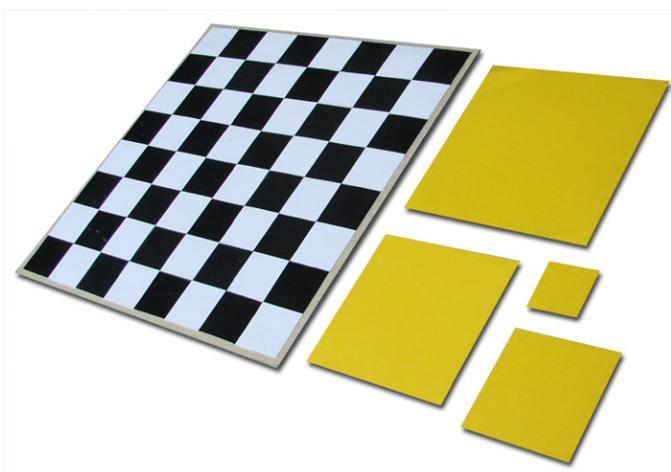


Figura 64 - Tabuleiro de xadrez e quatro quadrados amarelos

Ao serem questionados sobre quantos quadrados estavam desenhados ou representados no tabuleiro de xadrez, os participantes forneceram as seguintes respostas:

Participante [1] - Imediatamente, após ouvir o enunciado, ele anotou num papel a quantidade de quadrados 1 x 1. “Já tem 64 pequenos. Eu posso fazer 1 x 1 → 64.” O próximo passo era contar a quantidade de quadrados 2 x 2. Com a lapiseira na mão direita, apontou para diferentes regiões do tabuleiro. “Um, dois, três, quatro; dezesseis né?” Na borda direita do tabuleiro, ele visualizou apenas 4 quadrados 2 x 2, conforme ilustrado na figura 65. A multiplicação de 4 por 4 resultava em 16. Mas e quantos aos outros superpostos? Sim, pois até então haviam passado despercebidos.

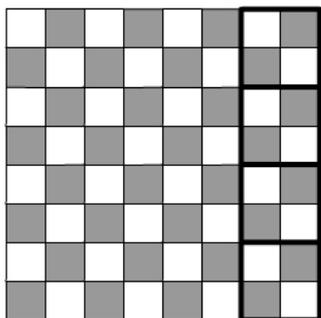


Figura 65 - Quadrados 2 x 2 contabilizados pela primeira vez

Na tentativa de descobrir a quantidade de quadrados 3 x 3 surgiu um impasse. “Não dá pra fazer, vai sobrar. Não, mas dá pra fazer alguns. Eu posso fazer quatro.” Supus que ele visualizara 4 quadrados 3 x 3, tais como os mostrados na figura 66, ainda sem superposições.

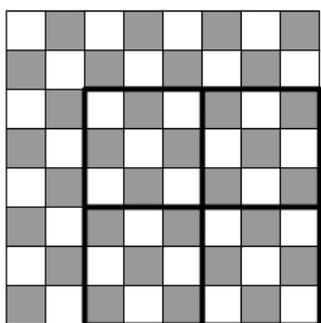


Figura 66 - Quatro quadrados 3 x 3

Em seguida, deslocou o dedo indicador da mão direita de uma ponta à outra do tabuleiro. “Eu posso fazer esse aqui diferente desse aqui, né?” Aparentemente, ele havia notado a presença de quadrados refletidos (ou rotacionados) em relação aos anteriores, tal como apresentado na figura 67. Confirmei sua hipótese.

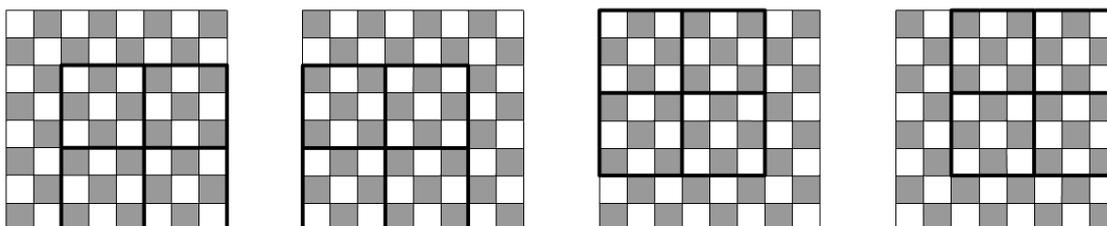


Figura 67 - Quadrados refletidos ou rotacionados, uns em relação aos outros

“Pô, isso é loucura porque eu posso fazer um aqui, posso fazer um aqui, posso fazer um aqui.” Novamente sua fala era acompanhada de gestos. Seus dedos percorriam o tabuleiro, indicando vários quadrados com interseções entre si. “Cara, é complicado.” Com vistas a incentivá-lo, mostrei os quadrados de cor amarela. A partir de então, com os dedos das duas mãos apoiadas sobre uma das peças (quadrado 2 x 2), começou a varrer o tabuleiro de modo aleatório, tal como previsto e ilustrado na figura 48. A ação durou 20 segundos. Depois, ele parou e refez a contagem utilizando um método mais eficaz: gradativamente, deslizou o mesmo pedaço de papel amarelo, desde a margem direita até a margem esquerda inferior do tabuleiro. “Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete.” Para confirmar, seus dedos médio e indicador “andaram” de uma ponta à outra. De fato, eram sete. Reposicionou o quadrado 2 x 2 à direita e subiu uma linha. “Na segunda vão ser mais sete.” Perguntou se eu via algum sentido naquilo. Confirmei. “Então são 49; $64 + 49$ (...) Vamos pro três (3 x 3): 1, 2, 3, 4, 5, 6.” Novamente em função dos passos de seus dedos, sua mão se deslocou da margem direita para a esquerda do tabuleiro. “36. Pô, tem alguma coisa (...) aqui seriam 8 x 8, 7 x 7, 6 x 6. Ah, matei. Aqui vai ser 5 x 5.” Após uma breve risada, foi adiante. “8 x 8 é um só. É isso?”. Sim, os lados do quadrado maior coincidiam com as próprias margens do tabuleiro. “Eu não vou somar tudo, mas eu vou escrever.” Por fim, registrou a conta no papel: $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1$. Naquele instante, o problema havia sido resolvido.

Previamente, além da animação descrita no item 4.1.2, eu preparara outra no mesmo *software* de geometria dinâmica. Nela, quadrados de cor amarela²¹ se deslocavam gradativamente de coluna a coluna, linha após linha, sobre outros numa malha quadriculada 8 x 8, de modo similar à ação executada no experimento. Solicitei que o participante [1] observasse aquelas animações, dirigindo o olhar para o monitor à sua frente. A reação foi positiva. Após observá-las, mostrou-se satisfeito. “Legal, maneira essa animação. Maneira, gostei (risos).”

Dali em diante, comentei que a soma correspondia a um caso particular do somatório do quadrado dos primeiros números naturais. Usando outro material concreto, reproduzi a prova visual de Gardner (1973) e Kalman (1991)²². Munido de um conjunto de pecinhas coloridas imantadas e de uma placa metálica

21 De vários tamanhos.

22 Evito repetir aqui todos os passos desta prova visual, pois eles já foram explicados e analisados em detalhes no item 4.1.4.

branca, aos poucos fui completando o retângulo²³ (figura 68). Expliquei que aquela demonstração não se configurava como uma prova matemática formal. Meu principal objetivo era ajudá-lo a enxergar de um modo mais simples os elementos da fórmula:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1)(1+2+3+\dots+n)}{3}$$

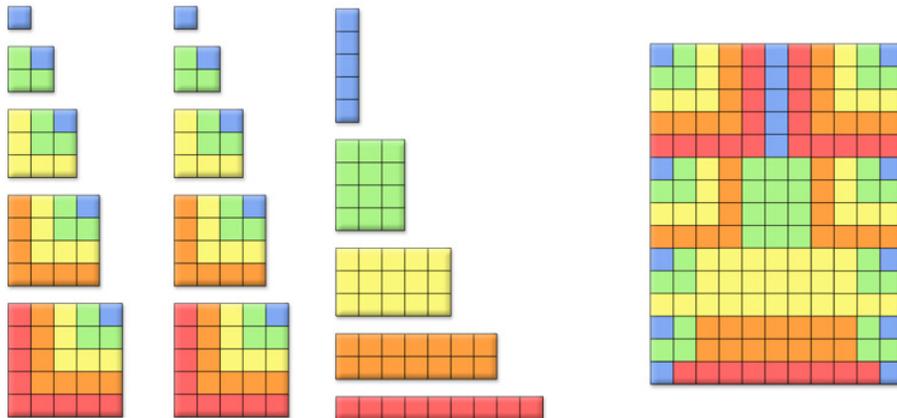


Figura 68 - Prova visual com peças imantadas criadas por mim

Solicitei sua ajuda. Expliquei que faltava determinar outra fórmula, relativa ao somatório dos primeiros números naturais: $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Retirei e guardei todas as pecinhas de cima da placa, mostrei outras dez diferentes e coloquei cinco destas sobre o tabuleiro, uma de cada vez, de modo a reproduzir a escada da figura 56. Rapidamente, sem tocar no material, respondeu-me: “É só multiplicar e dividir por dois.” Sugerí que ele manipulasse efetivamente as pecinhas em vez de apenas observar. Com elas, fechou um retângulo. “Ah, acho que tem que somar 1.” Neste caso, qual seria a solução? “O termo mais um vezes o número de quadradinhos dividido por dois²⁴.” A resposta correta era $(n + 1)n / 2$. Dei por encerrado o encontro, lembrando que a soma anterior poderia ser calculada bastando substituir n por 8 em $n(n + 1)(2n + 1) / 6$. Suas últimas palavras? “Legal, maneiro, gostei, interessante”.

²³ Até então, eu desconhecía os produtos *LiveCube* e *Omnifix Cube*, referentes ao item 4.1.5, motivo pelo qual optei pela criação de um material didático próprio, planejado especificamente para esta atividade.

²⁴ Embora sua resposta estivesse incorreta, julguei que ele tinha compreendido a multiplicação por correlacionar o todo com as partes da estrutura. Interpretei o “termo mais um” como $n + 1$ e o “número de quadradinhos” como “a quantidade de quadradinhos apoiados num dos lados do retângulo”, ou seja, n .

Participante [2] - Em cerca de 1:20 min esboçou uma primeira resposta. “O quadradão tem 64 peças, 64 peças de 1 quadradinho, 16 peças de 4 quadrados e daí 4 peças de 8 quadrados. Eu fiz todos os quadrados perfeitos, de números que têm raízes. Aí ainda tem os não regulares.” Interpretei que ele pensara nas possíveis divisões do tabuleiro em quadrados congruentes (figura 69). Sua linguagem não foi precisa e ele parecia ter se confundido ao dizer “4 peças de 8 quadrados”. Não seriam “4 peças de 16 quadrados”? Peças? Quadrados perfeitos? Números que tem raízes? Não regulares?

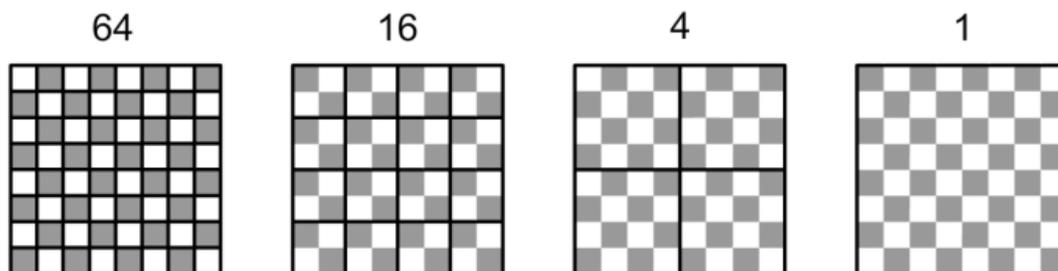


Figura 69 - Divisões de um quadrado de tamanho 8 x 8 em outros quadrados

Talvez ele não tivesse compreendido o enunciado. Expliquei que ali estavam presentes outros quadrados com partes sobrepostas. Para fazê-lo tomar consciência daquilo, solicitei que deslizasse um dos quadrados amarelos, aquele de tamanho 2 x 2, sobre a margem inferior do tabuleiro. Perguntei quantos quadrados daquele tipo estavam apoiados naquela região. Informou-me que eram quatro. Escaparam-lhe três, razão pela qual posicionei o mesmo pedaço de papel amarelo sobre partes de dois, vistos anteriormente (figura 70).

Novamente, pegou o quadrado 2 x 2 amarelo e varreu vagarosamente a margem inferior no sentido da esquerda para a direita. Em vez de quatro, contou sete. Perguntei quantos quadrados daquele tamanho estavam apoiados na margem esquerda do tabuleiro e ele, sem hesitar, respondeu sete. “O lado é do mesmo tamanho.” A adoção daquele método simplificou o problema, pois o mesmo poderia ser aplicado a quadrados de outros tamanhos. Os valores das multiplicações foram anotados e deram origem à série do somatório dos quadrados de números naturais com 8 termos. Em seguida, eu expliquei e montei as provas visuais dos somatórios com as peças imantadas²⁵. No final, quando eu já estava quase desligando a câmera de vídeo, ele comentou: “Maneira essa parada. Como eu estou precisando estudar matemática!”

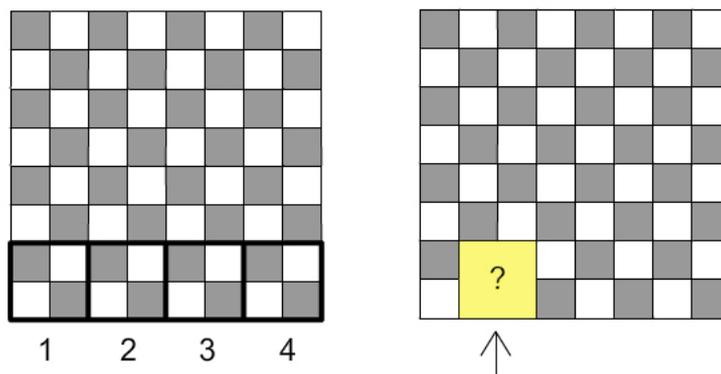


Figura 70 - Um dos quadrados 2 x 2 não considerados pelo participante [2]

Participante [3] - Seu primeiro comentário deixou claro que havia enxergado os quadrados menores (1 x 1) e o maior (8 x 8). “Além da área total dele, 64 e o quadrado completo?” Depois pediu licença para se concentrar e escrever no papel. Após cerca de 3:30 minutos disse-me que não havia conseguido determinar o total de quadrados mas havia descoberto uma sequência. “Tô aqui viajando. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.” Em princípio, não entendi. Eu esperava ouvir a série 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64. Não dei muita atenção à sua resposta naquele instante e acabei cortando sua linha de raciocínio. No entanto, ao rever o vídeo, tive a certeza de que ele revelara uma idéia preciosa, a qual deveria ter sido mais aprofundada. De modo algum sua resposta fora “cega”. Agindo como um investigador, em um curto intervalo de tempo ele iniciara um processo de indução pura. O que significavam aqueles números?

Se ele não tivesse nenhum quadrado 1 x 1, precisaria adicionar um para tê-lo. Tendo um quadrado 1 x 1, ele necessitaria de mais três daquele tamanho para construir um de tamanho 2 x 2. Para obter um de tamanho 3 x 3, ele teria que acrescentar mais cinco quadrados 1 x 1. Depois mais 7, 9, 11, 13 e finalmente 15 para completar um quadrado 8 x 8. O somatório da série de inteiros ímpares de 1 a 15 resultaria em 64, ou seja, o total de quadrados 1 x 1 presentes no tabuleiro. Embora pudesse não ter consciência disto, ele induziu que o valor do somatório dos primeiros inteiros ímpares tem como resultado um quadrado de um número natural. Se eu tivesse percebido esta linha de raciocínio, poderia ter aproveitado para apontar-lhe o caminho de pelo menos duas provas visuais desta série (figura 71). Sabe-se lá quantas relações

25 As animações em geometria dinâmica não foram apresentadas ao participante [2], pois até então eu não as tinha preparado. A numeração dos participantes não tem qualquer relação com a ordem cronológica dos encontros.

essenciais poderiam ser traçadas entre estas provas e as outras, relativas ao somatório dos quadrados dos primeiros números naturais?

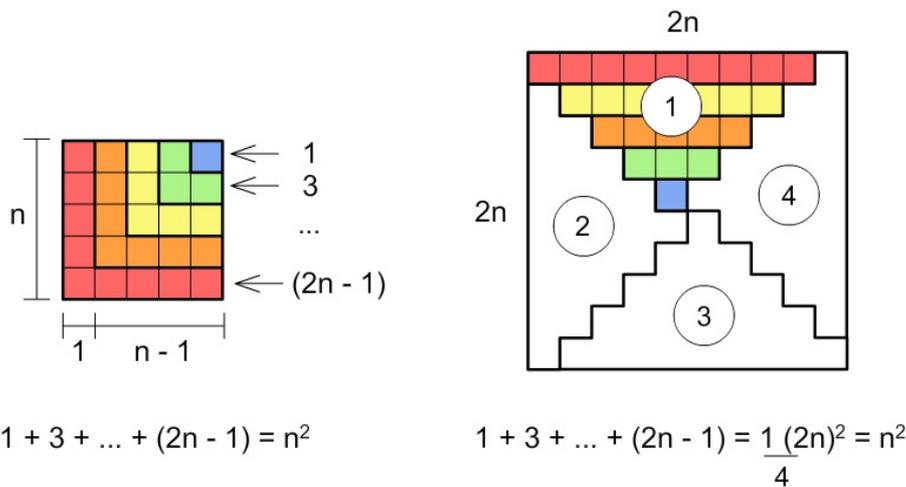


Figura 71 - Duas provas visuais para o somatório de inteiros ímpares

Dando continuidade ao experimento, reforcei que assim como no primeiro desafio, referente ao item 3.1.1, ali estavam presentes quadrados de diversos tamanhos e não apenas quadrados 1×1 . Ele estava ciente deste fato, mas não conseguia agrupá-los e contá-los. Por isso, julguei oportuno oferecer-lhe os quadrados de cor amarela, porém ele não lançou mão de qualquer um deles. “Se você mostrou esse exercício aqui, tem relação com ele, certo?” Respondi que eu resgatara a figura do item 3.1.1 com o único propósito de destacar a existência dos quadrados de tamanhos variados e nada mais. Usando uma lapiseira, ele completou o desenho do primeiro desafio de modo a transformá-lo numa malha quadriculada 4×4 (figura 72). Explicou-me que bastaria contar ali os quadrados restantes e somá-los aos onze já vistos²⁶. Posteriormente, sabendo que o tabuleiro de xadrez era composto por quatro partes como aquela, talvez o valor total fosse o anterior multiplicado por 4, restando apenas acrescentar os quadrados maiores.

26 Vide item 3.1.1.

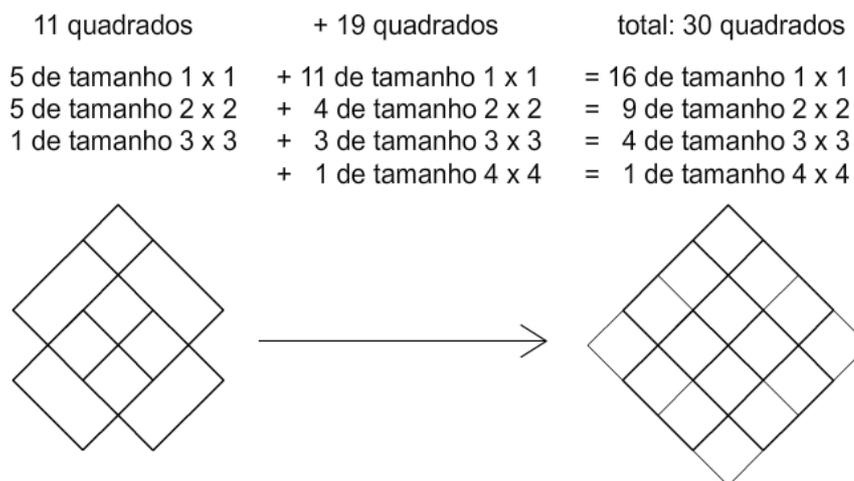


Figura 72 - Modificação do desenho referente ao desafio do item 3.1.1

Sua atitude superou minhas expectativas. Ele tentara utilizar o resultado do desafio do item 3.1.1 a seu favor, encarando o problema prévio como auxiliar, tal como recomenda Polya:

A superioridade humana consiste em contornar um obstáculo que não possa ser vencido frontalmente, em criar um problema auxiliar adequado quando o original se mostra insolúvel. Projetar um problema auxiliar é uma importante operação da mente. Conceber um problema novo, exato, aplicável a outro problema, projetar com perfeição algo que possa servir de meio para alcançar outro objetivo, é uma requintada realização da inteligência. Aprender (ou ensinar) a lidar com problemas auxiliares de forma inteligente é uma tarefa importante. (Polya, 2004, p.51)

Na realidade, quando resolvemos um problema, nós sempre tiramos proveito de problemas resolvidos anteriormente, usando seus resultados, ou seu método, ou a experiência que nós adquirimos ao resolvê-los. Daí vem a questão: Você conhece um problema relacionado? (Polya, 2004, p.98)

Novamente, ao rever o vídeo, me dei conta de que eu deveria ter explorado com maior ênfase a sua idéia. Tal como no problema anterior, ele continuou localizando os quadrados em posições aleatórias. Sucessivamente, vários foram descobertos no desenho modificado (figura 72). Contudo, dada a complexidade da malha, ele acabou se perdendo na contagem. Teria acertado a questão se viesse a apontar $11 + 4 + 3 + 1$ quadrados de diversos tamanhos além dos $5 + 5 + 1$ originais, ou seja: $16 + 9 + 4 + 1$. Um somatório de quadrados de números naturais?

Era preciso mudar o método de contagem. Para facilitar, peguei o quadrado amarelo de tamanho 1×1 e deslizei-o de uma ponta a outra sobre a

margem inferior do tabuleiro. Sucessivamente, encobri cada um dos 8 quadrados 1×1 ali posicionados. Como o tabuleiro tinha 8 colunas e também 8 linhas, a quantidade total de quadrados 1×1 deveria ser 64. Havia alguma novidade naquilo? Não. Neste caso, recomendei que ele repetisse aquele procedimento com o quadrado amarelo 2×2 , 3×3 e 4×4 , um de cada vez. A cada ciclo, ele foi anotando os valores das multiplicações e, desta forma, surgiu a série do somatório dos quadrados dos números naturais com 8 termos. Para finalizar, expus as animações em geometria dinâmica relacionadas com o problema e montei as provas visuais dos somatórios com os conjuntos previamente preparados de peças imantadas.

4.2. O desafio dos losangos em polígonos regulares

4.2.1. Sobre o desafio dos losangos

À primeira vista, este item apresenta um problema simples de geometria e desenho, cujo conteúdo engloba as propriedades de polígonos regulares e losangos. Todavia, sua aparente simplicidade esconde uma impressionante riqueza de detalhes, os quais se revelam como um prêmio para os mais atentos.

O desafio se apresenta não apenas para o aluno, cujas habilidades de visualização e análise são exigidas, mas também para o professor. Isto porque parte de sua tarefa consiste em conduzir a construção do conhecimento pelo aluno sem minar sua autonomia. O sucesso da atividade depende não apenas do método e recursos didáticos empregados, mas principalmente das atitudes do docente e discente. A esse respeito, são levados em consideração os pontos de vista de Polya, Van Hiele e Piaget.

Segundo Polya (1988), uma das tarefas mais importantes do professor é ajudar seu aluno. É fundamental que este adquira o máximo de experiência por conta própria, porém o professor não pode abandoná-lo. Mesmo que o estudante não esteja preparado para caminhar por seus próprios passos, ainda que lhe seja oferecido auxílio, deve ficar registrada em sua mente a impressão do trabalho individual. Não se deve pecar pelo excesso nem pela falta de apoio.

Na opinião de Van Hiele (1986), é imprescindível que ocorra a crise do pensamento. A questão é saber quando ela deve ser iniciada e de que maneira o aluno deve ser induzido, não para evitá-la, mas ao contrário, para superá-la. Ainda segundo o autor, a educação não está pronta para aceitar esse método de

trabalho, pois todos esperam que o professor forneça uma explicação, aplicando uma redução de nível.

Para Piaget (1988), se uma atividade não for realizada pela própria pessoa, com plena liberdade de iniciativa, ela perde o sentido de experiência. Nessa situação, o que deveria ser uma experiência vira um adestramento, destituído de valor formador, pela incompreensão das minúcias das etapas sucessivas.

Eis, então, o desafio que será descrito nesta seção do estudo.

Todo polígono regular com um número par de lados L pode ser dividido em losangos com lados de comprimentos iguais aos do próprio polígono (Frederickson, 2002). Considerando L = número de lados do polígono e R = número de losangos, pergunta-se: Dado L , qual será o valor de R ? Existe algum padrão de crescimento? Quantos losangos congruentes aparecem? Quanto medem os ângulos de cada classe de losangos em função de L ?

4.2.2. Sondagem prévia

Antes de sequer enunciar o problema, o professor deve executar uma sondagem prévia de conhecimentos básicos de geometria dos aprendizes. Como traçar os polígonos regulares, dado o raio do círculo que os circunscreve? Como determinar os ângulos centrais desses polígonos? O que caracteriza um losango? Quais são suas propriedades? O quadrado também é um losango? Qual é a relação entre losangos e paralelogramos propriamente ditos? Se o aluno não demonstrar dificuldades ao responder essas questões, ele estará apto a prosseguir. Em caso contrário, será necessário rever tais conceitos.

Para descobrir a relação entre L (lados) e R (*rhombus*), é imprescindível que se compreenda como surgem essas estruturas internas, formadas por losangos. Embora possam existir várias formas de agrupamento, há um tipo específico de divisão em losangos que, além de ser comum a todos os polígonos ($L=4$, $L=6$, $L=8$ etc), facilita a visualização dos elementos que estão diretamente associados à fórmula. Numa situação hipotética em sala de aula, o professor pode optar por: 1 - explicar com o auxílio de vários exemplos, ilustrando as características desse tipo de divisão; 2 - apresentar apenas um exemplo para que o trabalho de generalização fique por conta do aluno; 3 - deixá-lo livre para descobrir por méritos próprios o agrupamento ideal.

A primeira opção elimina as chances de o aluno raciocinar por conta própria. O professor explica e ele apenas confere o que lhe é entregue. A

segunda opção é mais adequada. O professor mostra um caso, ajuda no início porém, o trabalho de generalização fica por conta do aprendiz. Já a terceira opção eleva em demasia o grau de dificuldade do problema. Como equacionar a crise do pensamento e a autonomia do aluno com a ajuda do professor? Que tal uma variante que englobe a segunda e a terceira opções? A idéia é projetar um material didático referente a apenas um caso e que possa ser explorado pelo aluno. O professor não explica de modo direto todas as características da estrutura, deixando assim que o estudante tire suas próprias conclusões a partir do manuseio do material. Para que isso ocorra, o objeto em suas mãos deve ter o poder de comunicar não apenas as características da divisão sugerida, mas também os meios de se chegar até ela.

4.2.3. Design de material concreto

No experimento com alunos, em vez de ser apresentada uma série de exemplos de divisão dos polígonos em losangos, foi utilizado um material didático concreto. O modelo, que mais lembra um livro infantil, foi planejado de maneira a facilitar a compreensão da estrutura e a sua construção em função de sucessivas reflexões.

O material remete a um polígono regular de 12 lados. Sobre uma base de papelão foram coladas algumas folhas de papel de formatos bem específicos. As folhas, ao serem viradas em torno de algumas diagonais do polígono, deixam à mostra losangos antes escondidos.

A figura 73 apresenta as etapas necessárias para o completo preenchimento do polígono por losangos. Primeiramente; é mostrado o polígono em branco com 5 diagonais em destaque, tendo o vértice inferior em comum. Depois são executadas, gradualmente, “reflexões” de determinados lados do polígono (e de seus possíveis reflexos prévios) em torno dessas diagonais.

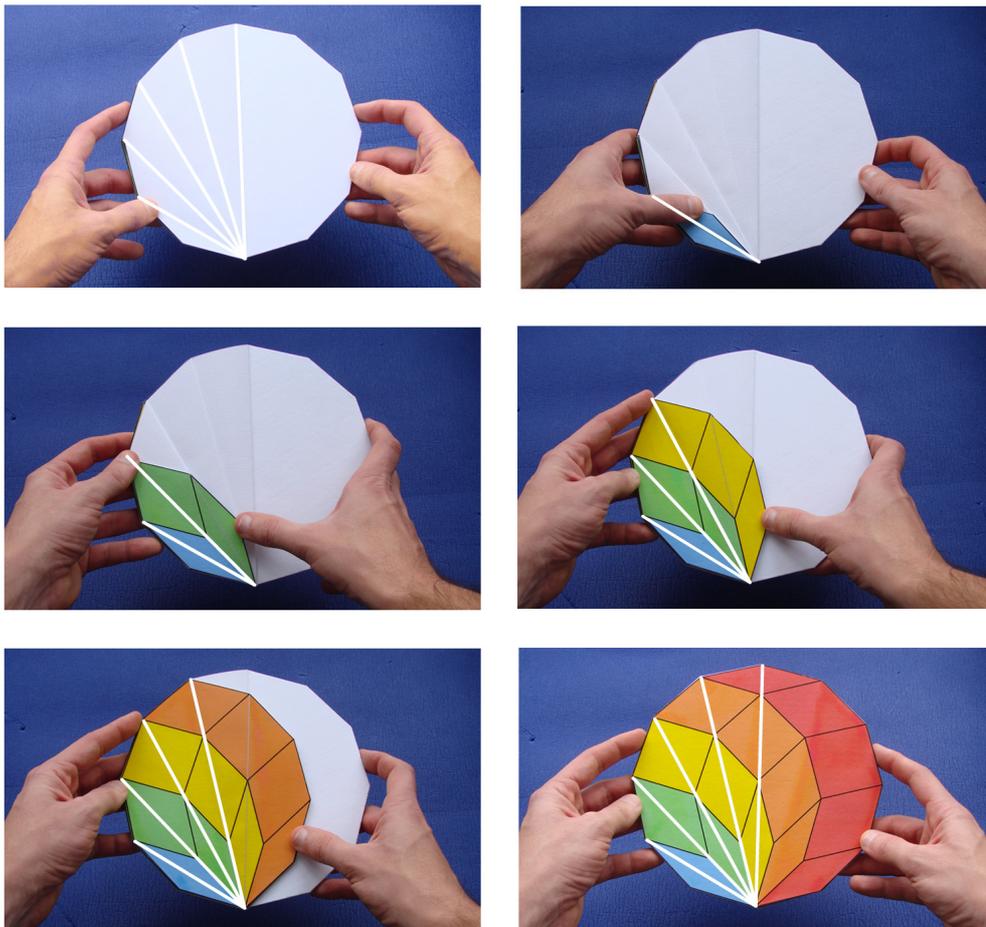


Figura 73 - Diversas etapas de uso do material didático concreto

Na primeira reflexão aparece um losango (azul). Na segunda, aparecem mais dois (verdes). Na terceira surgem mais três (amarelos). Na quarta são mais quatro (laranjas) e, na quinta, mais cinco (vermelhos). O uso de cores é proposital. Como calcular o total de losangos do exemplo? Basta somar as quantidades. Considerando os losangos de diferentes cores, tem-se: $R = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Supõe-se que o aluno seja capaz de perceber o método de divisão dos polígonos em losangos isoladamente, sem a necessidade de uma explicação do professor. Todavia, o método de sucessivas reflexões não é único. Outros também conduzem à estrutura de losangos. Estará o estudante apto a identificá-los de modo autônomo? Uma maneira de avaliar se ele está ciente de outros métodos é solicitar que trace sobre o papel a divisão de outros polígonos ($L=4$, $L=6$, $L=8$ etc) com os instrumentos tradicionais de desenho (esquadros e compasso). A seqüência do manuseio dos instrumentos trará à tona as operações mentais associadas às transformações geométricas.

4.2.4. O auxílio da geometria dinâmica

É essencial que o professor estimule a exploração dos diversos caminhos, evitando ao máximo a adoção de receitas prontas. Se o estudante não fizer as conexões por conta própria, outro recurso pode ser útil. As figuras 74, 75 e 76 mostram exemplos de modelos interativos construídos em software de geometria dinâmica. Desta vez é escolhido o polígono de 14 lados. Além das reflexões sucessivas, também são destacadas rotações e translações. As sequências podem ser apresentadas, de forma expositiva ou não, pelo professor. No entanto, é ideal o aluno ficar à vontade para manipular as figuras.

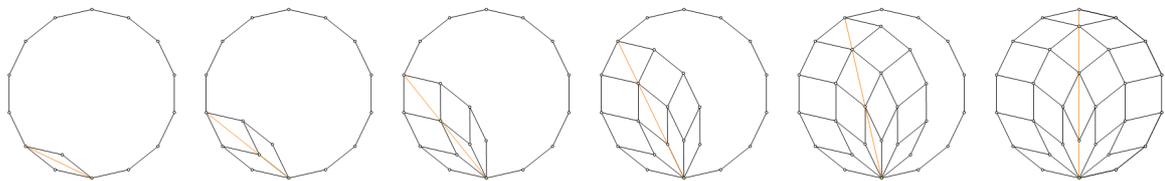


Figura 74 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas reflexões

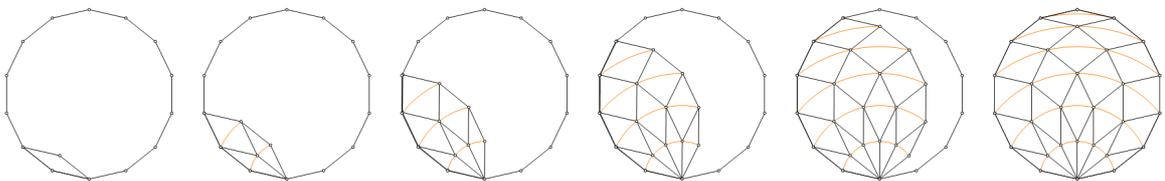


Figura 75 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas rotações

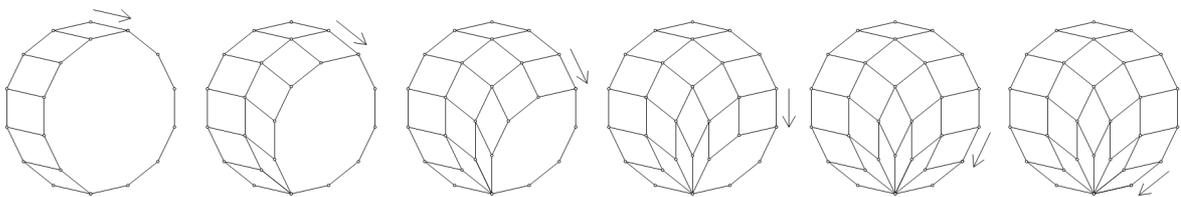


Figura 76 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas translações

4.2.5. Indícios do somatório dos números naturais

O total de losangos R depende do somatório de n primeiros números naturais. Se a hipótese estiver correta, qual será a relação entre o número de termos da série e o número de lados do polígono? Novamente, existem várias maneiras de determiná-la.

No exemplo do polígono de 12 lados, o total de losangos é calculado pelo somatório dos 5 primeiros números naturais: $R = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Curiosamente, o número de diagonais em destaque visto na figura 73 é 5 também. Para o polígono de 14 lados, a série tem 6 termos: $R = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. Na figura 74 aparecem 6 diagonais em destaque. Em ambos os casos, este número de diagonais equivale à quantidade de termos do somatório. Coincidência?

De acordo com a figura 73, as diagonais que atuam como eixos de reflexão estão ligadas a dois vértices do polígono: um deles permanece fixo (embaixo) mas o outro muda de posição. Em cada etapa, este vértice, “dinâmico”, passa a pertencer a um losango, sempre de cor diferente. A figura 74 exige um grau de abstração maior por conta da ausência de cores. Todavia, o padrão se repete. Cada diagonal selecionada corresponde a um único termo da série.

4.2.6. Representações da fórmula de n em função de L

Um polígono regular tem L lados e L vértices. Dado L , quantas diagonais devem ser consideradas? No referencial adotado (figura 73), as diagonais aparecem à esquerda com exceção de uma, diâmetro do círculo circunscrito. A figura 77 ilustra o procedimento de cálculo. Em princípio, [a] todo vértice do polígono pode ser ligado ao vértice inferior por uma diagonal. Evidentemente, o vértice inferior e seus adjacentes não acrescentam diagonais e por isso são descartados (em vermelho). Para determinar as diagonais à esquerda, é necessário [b] descontar o vértice superior (em amarelo) do total e [c] pegar a metade dos remanescentes. Após a divisão ter sido efetuada, [d] o vértice superior é novamente adicionado, totalizando $n = (L - 2) / 2$.

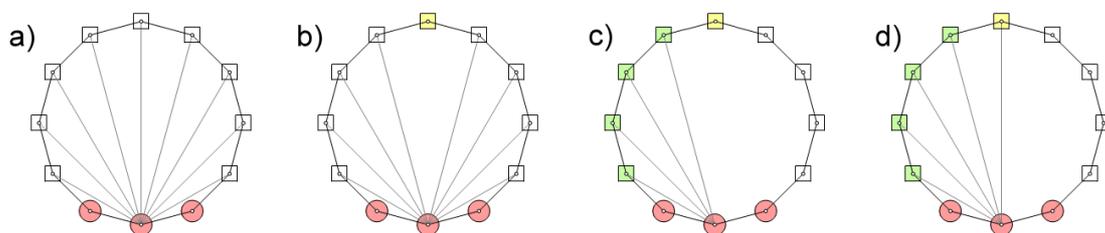


Figura 77 - Cálculo da quantidade de diagonais em destaque

Desta vez, as cores são relativas aos sinais de trânsito: pare no vermelho, preste atenção ao amarelo e avance no verde. A fórmula das n diagonais, ou mais especificamente, dos n termos da série em função de L , mantém um forte elo de ligação com a estrutura visual em razão das cores. As expressões associadas aos quatro itens da figura 77 são as seguintes:

$$\text{a) } L - 3 \quad \text{b) } L - 3 - 1 \quad \text{c) } \frac{(L - 3 - 1)}{2} \quad \text{d) } \frac{(L - 3 - 1)}{2} + 1$$

O uso da forma reduzida $n = (L - 2) / 2$ mascara os itens da expressão $n = [(L - 3 - 1) / 2] + 1$. Na forma expandida, cada algarismo corresponde de maneira biunívoca a um elemento da estrutura representada. Evidentemente, é de capital importância chamar a atenção do aluno para esse detalhe, assinalando a presença do design da informação para a comunicação visual.

É possível que o aluno não siga por conta própria tal linha de raciocínio, entretanto alternativas não lhe faltam. Na figura 74, a quantidade de diagonais em destaque equivale à quantidade de arcos da figura 75 e de vetores da figura 76. Para deleite do pensamento cogitativo, o número de termos da série também pode ser notado a partir da análise desses elementos. Por exemplo, na figura 78, a forma reduzida da expressão de n em função de L faz mais sentido. Neste caso, são contabilizados os arcos que ligam os vértices em vez das diagonais que servem como eixos de reflexão.

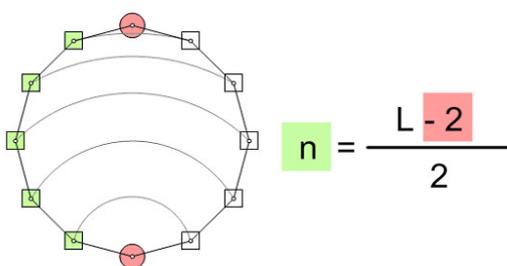


Figura 78 - Cálculo dos arcos em destaque (ex. $L = 12$, $n = 5$)

A figura 79 mostra outros polígonos com seus respectivos losangos, variando de $L = 4$ até $L = 22$. Além de o padrão de divisão ser o mesmo, é pertinente observar que para $L = 4$, o quadrado é o próprio e único losango aparente. Enquanto L cresce em duas unidades, n aumenta uma.

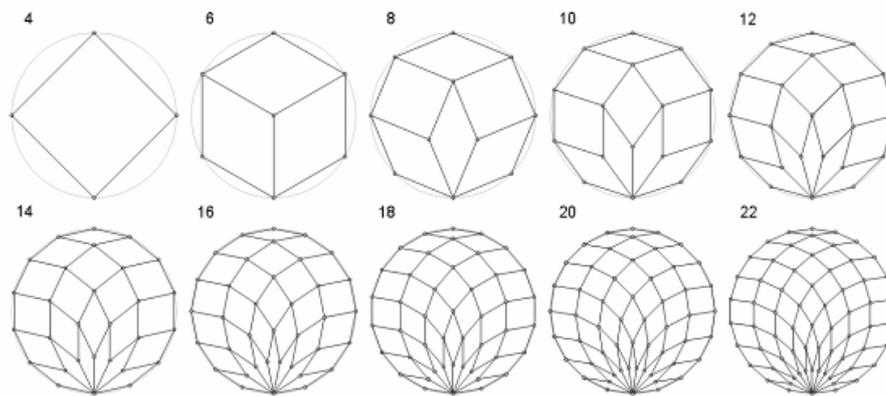


Figura 79 - Vários polígonos regulares particionados em losangos

4.2.7. Metamorfose

Conforme citado anteriormente, o material didático concreto relativo à figura 73 foi planejado de maneira a facilitar a contagem de losangos como termos de uma série de números naturais. Já com as figuras dinâmicas 74, 75 e 76, procurou-se despertar a atenção para as transformações de reflexão, rotação e translação como processos para a construção das estruturas. Posteriormente, com base nesses dois recursos, diferentes representações da expressão de n em função de L foram exemplificadas.

De acordo com a figura 79, quando L aumenta, as estruturas internas tornam-se cada vez mais densas e detalhadas, dificultando a confirmação visual do somatório dos números naturais. Haverá uma alternativa mais nítida para a visualização desse somatório? Sem dúvida. A esse respeito, proponho uma idéia simples, cuja descoberta, porém, não me parece ser tão evidente assim. Minha impressão é a de que está em jogo aqui o mesmo tipo de perplexidade que se tem diante de uma invenção supostamente óbvia, mas que passa despercebida a todos até ser anunciada por alguém – um “Ovo de Colombo”.

Cada losango pode ser transformado em um quadrado, de maneira a preservar a maioria das adjacências da estrutura prévia. A exceção vale para os losangos da “coroa inferior”, os quais deixam de ter um vértice em comum. A metamorfose, exemplificada nas figuras 80 e 81, traz um novo significado para as diagonais em destaque. A quantidade n equivale ao número de camadas de quadrados, empilhadas umas sobre as outras na nova estrutura. Como cada camada na horizontal é uma unidade maior do que a superior, constata-se que o n -ésimo número triangular é a soma dos n primeiros números naturais consecutivos.

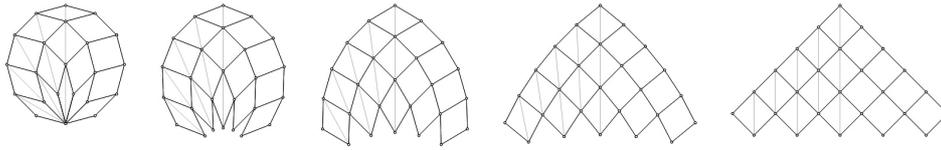


Figura 80 - Exemplo de metamorfose (ex. $L = 12$, $n = 5$)

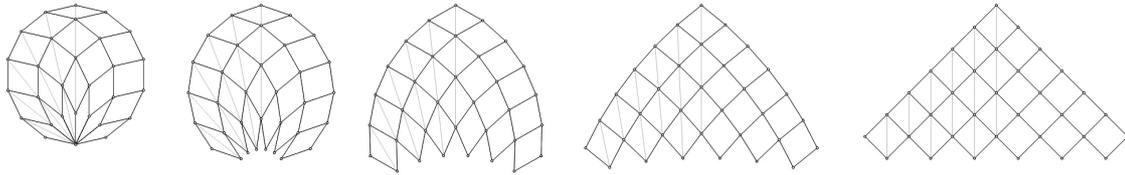


Figura 81 - Exemplo de metamorfose (ex. $L = 14$, $n = 6$)

4.2.8. Representações da fórmula de R em função de n

No item 4.2.6 foram mostradas diferentes representações da fórmula de n em função de L , sendo L = número de lados do polígono. Agora é necessário calcular a quantidade total de losangos R . Existem várias maneiras de se representar a fórmula de R em função de n após a metamorfose, sendo a primeira delas familiar.

Na figura 82, transparece o motivo da escolha das cores na elaboração do material didático concreto. Depois da transformação, observa-se que a “pirâmide” de quadrados é idêntica à trabalhada no desafio anterior. Inicialmente, realiza-se uma cópia da estrutura de quadrados. Em seguida, executa-se uma rotação de 180° , combinada com uma translação. As duas partes se encaixam e formam um retângulo. A quantidade total de quadrados contidos no retângulo é calculada, multiplicando-se a base pela altura. Na fórmula $R = n(n + 1) / 2$, cada termo está associado biunivocamente a um elemento da estrutura representada. No exemplo dado, n corresponde à largura e $(n + 1)$ ao comprimento do retângulo. A divisão por 2 resgata a “pirâmide” inicial.

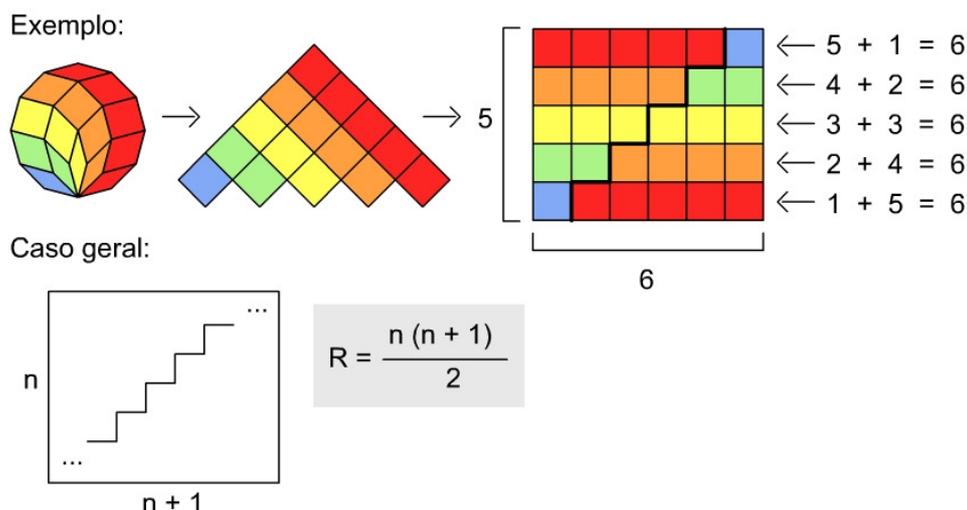


Figura 82 - Primeira representação da fórmula de R em função de n

As cores viabilizam também outra leitura da fórmula. No retângulo, cada faixa de quadrados é formada por $(n + 1)$ unidades que se repetem n vezes. Soma-se o primeiro termo com o último, o segundo com o antepenúltimo e assim por diante.

A figura 79 indica que nem todos os losangos são congruentes, exceto nos casos onde $L = 4$ e $L = 6$. Por exemplo, quando $L = 12$, três tipos de losangos estão presentes, incluindo os quadrados. Os ângulos internos parecem variar de acordo com alguma regra de formação, a qual precisa ser descoberta. Em termos de representação, para que os losangos de diferentes categorias sejam prontamente reconhecidos, é aconselhável mudar o padrão cromático.

A mesma estrutura anterior é mostrada na figura 83, mas há uma nítida mudança nas cores. Losangos congruentes são destacados de outros por diferentes tons. À direita da figura, a série de números naturais é empilhada numa ordem crescente de valores, de cima para baixo. Nela, dos extremos para o centro, o espectro de tons varia da cor vermelha à amarela, passando pelo laranja. Curiosamente, esta nova representação traz indícios de uma espécie de simetria bilateral com relação aos tipos de losangos.

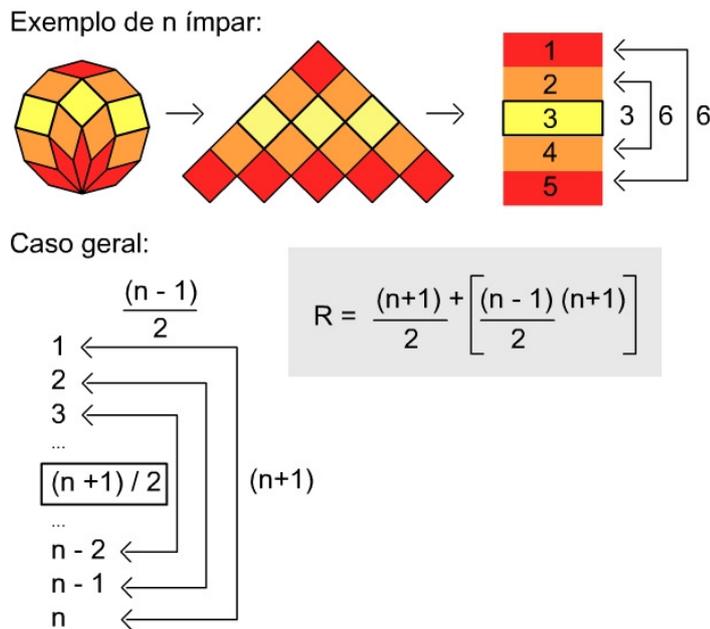


Figura 83 - Segunda representação da fórmula de R em função de n

A expressão $R = \left[\frac{(n+1)}{2} \right] + \left[\left(\frac{(n-1)}{2} \right) (n+1) \right]$ é estruturalmente diferente da anterior, embora idêntica do ponto de vista matemático. O resultado final será o mesmo, porém seus termos variam de acordo com as representações originais. Há uma vantagem incontestável da segunda alternativa em relação à primeira. A mudança de cores informa não apenas o valor total do somatório, mas também quantas diferentes categorias de losangos aparecem e a quantidade de elementos em cada categoria.

Conforme será explicado em detalhes adiante, os losangos em amarelo são, na realidade, quadrados. Seus ângulos internos medem 90° . Quando n é ímpar, há sempre um termo central na série, cujo valor indica a quantidade de quadrados da composição. Logo, existem $(n+1)/2$ quadrados. Além deles, estão presentes $(n-1)/2$ tipos de losangos, cada um com $(n+1)$ elementos.

Quando n é par, não há um termo central na série. Portanto, na composição original do polígono, não existem losangos cujos ângulos internos meçam 90° . Essa situação é ilustrada na figura 84. A simetria bilateral com relação aos tipos de losangos continua evidente na pilha colorida, sendo o eixo de reflexão facilmente determinado. A fórmula, por sua vez, agora é expressa em outros termos. Em $R = (n/2)(n+1)$, o termo $n/2$ se refere à quantidade total de diferentes tipos de losangos obtidos. Já o termo $n+1$ indica quantos losangos pertencem a cada categoria. O desenvolvimento das expressões indica que a fórmula reduzida será a mesma, independente de n ser par ou ímpar.

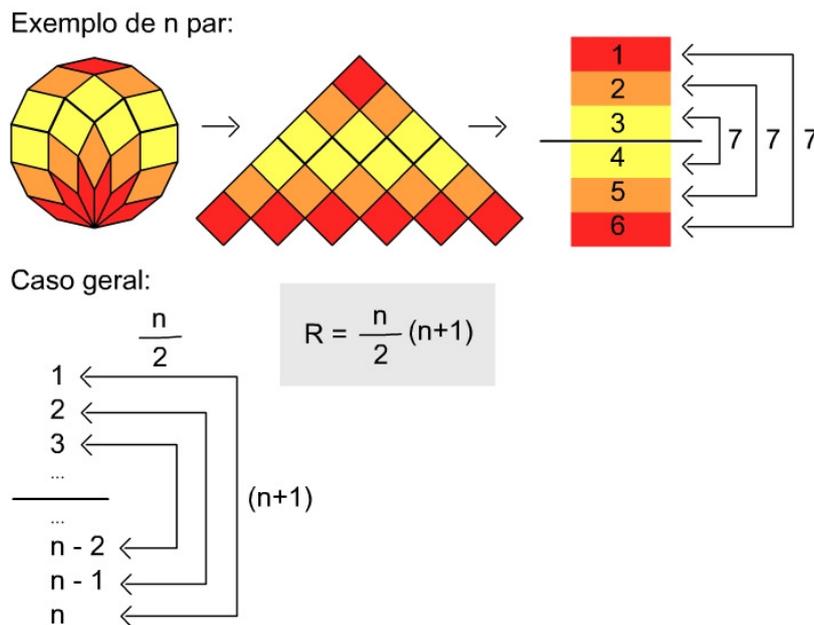


Figura 84 - Terceira representação da fórmula de R em função de n

Neste item, procurou-se mostrar que as fórmulas de R em função de n podem ser interpretadas de diversas maneiras, sem perderem a ligação com as representações de origem. Cada exemplo mostra quatro etapas diferentes:

- a - a estrutura original com os losangos;
- b - a pirâmide de quadrados;
- c - a série numérica empilhada ou o retângulo completo;
- d - a expressão da fórmula.

As setas sugerem uma sequência de raciocínio, contudo cada um desses itens pode ser comparado com o outro sem a imposição de uma ordem específica. O uso das cores é de capital importância, não apenas para diferenciar os grupos de losangos aparentes, mas também para reforçar a impressão de simetria bilateral em relação aos elementos da série.

4.2.9. Determinação dos ângulos internos dos losangos

Os agrupamentos citados no item anterior apontam diferentes tipos (categorias, classes ou conjuntos) de losangos, resultantes da dissecção dos polígonos. Resta determinar a medida dos ângulos internos dos losangos, para cada conjunto, em função de L.

Conforme indicado na figura 85A, num losango qualquer, se um ângulo interno mede α , o ângulo referente ao vértice oposto também mede α e os restantes medem $180^\circ - \alpha$.

Na figura 85B, repete-se o exemplo do polígono no qual $L = 12$, tal como ilustrado na figura 10. Neste caso, apenas uma faixa de losangos recebe o destaque das cores. A meta é determinar todos os ângulos internos dos losangos coloridos, de baixo para cima (vermelho, laranja, amarelo), começando pelo losango vermelho inferior. A figura 85C mostra que os dois ângulos agudos internos desse losango equivalem ao ângulo externo do polígono regular, cujo valor é $360^\circ / L$. Logo, como seus ângulos internos agudos medem $\alpha = 360^\circ / L$, os obtusos medem $180 - \alpha = 180 - (360^\circ / L)$.

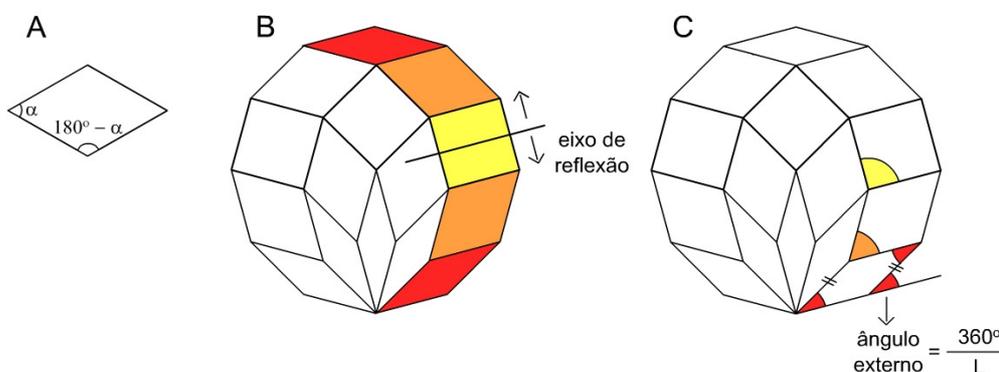


Figura 85 - Faixa selecionada com simetria bilateral (ex: $L = 12$)

A figura 86 mostra como os ângulos dos próximos losangos podem ser calculados a partir da observação das sucessivas rotações do primeiro losango (vermelho) em torno do vértice inferior (vale a pena comparar com a figura 75). O ângulo α do losango laranja vale $2 \times 360^\circ / L$ e o ângulo α do losango amarelo vale $3 \times 360^\circ / L$. Todavia, há algo de especial no losango amarelo. Ele não é um losango qualquer. Trata-se de um quadrado, mas por quê? Qual será a condição necessária para a ocorrência de quadrados? Basta efetuar os cálculos.

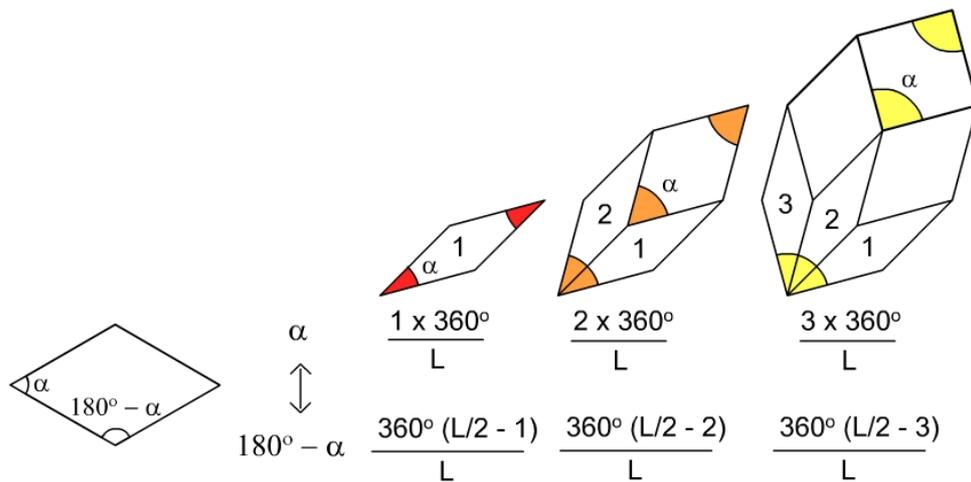


Figura 86 - Ângulos internos calculados a partir de $360^\circ / L$ (ex: $L = 12$)

Seja qual for L , para que α seja igual a 90° , tem-se que $p \times 360^\circ / L = 90^\circ$. Logo, p vale $L / 4$. Isso explica uma afirmação antecipada no item anterior. Quando n é ímpar, há sempre um termo central na série, cujo valor indica a quantidade de quadrados da composição (figura 83). O termo central na série é $(n + 1) / 2$. Sabe-se que $n = (L - 2) / 2$. Substituindo n por $(L - 2) / 2$ na expressão $(n + 1) / 2$, chega-se a $L / 4$.

Em outras palavras, se L for divisível por 4, o polígono certamente terá $L / 4$ quadrados. Para uma confirmação visual, basta observar alguns exemplos da figura 79. Se $L = 4$, $L = 8$, $L = 12$, $L = 16$ e $L = 20$, aparecem 1, 2, 3, 4 e 5 quadrados, sucessivamente. A figura 87 destaca os quadrados desses polígonos com a cor amarela.

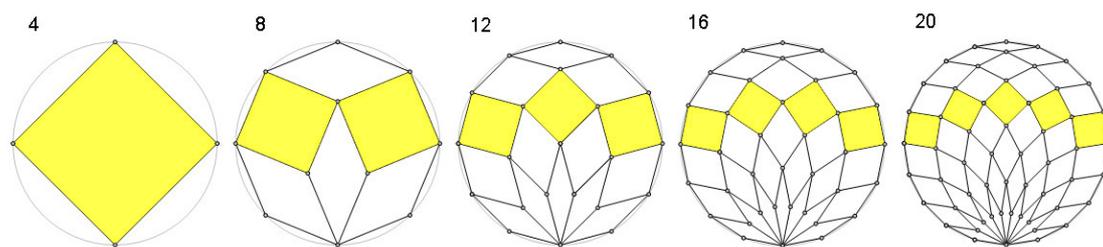


Figura 87 - Polígonos regulares com um número de lados divisível por 4

O cálculo dos ângulos internos dos losangos também explica a simetria bilateral observada na faixa de losangos em destaque na figura 85. Do losango vermelho até o amarelo, o ângulo α aumenta a amplitude até alcançar os 90° . Daí em diante, α se torna obtuso, porém suplementar de outro ângulo agudo, previamente determinado.

A figura 88 traz uma tabela com a série numérica de 1 até n empilhada, tal como ilustra a figura 83. Os valores dos ângulos internos dos diferentes tipos de losangos revelam a existência da simetria bilateral. Por fim, os valores comprovam o que antes era percebido apenas em termos visuais.

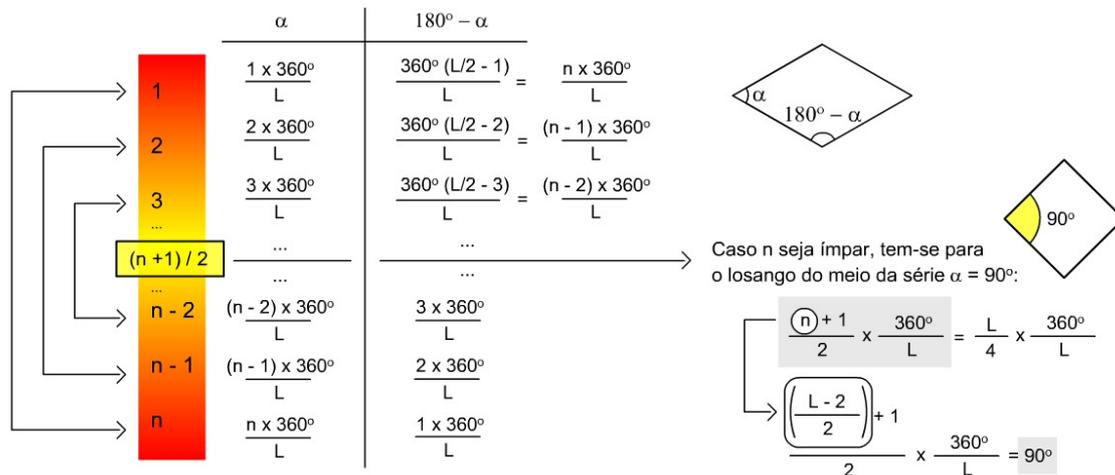


Figura 88 - Série numérica empilhada de 1 até n e ângulos internos

Como resposta definitiva para o desafio, afirma-se que todo polígono regular com um número par de lados L pode ser dividido em S losangos com lados de comprimentos iguais aos do próprio polígono, sendo $S = n(n+1)/2$, com $n = (L-2)/2$. Logo, $S = (L-2)L/8$ losangos.

Ao todo, aparecem $L/2$ losangos com ângulos internos $i \times 360^\circ / L$ para cada inteiro positivo i menor do que $L/4$. Se L for divisível por 4, vão surgir $L/4$ quadrados.

4.2.10. Um atalho curioso para se obter a fórmula

A prova visual que apresentarei a seguir foi concebida por mim cerca de uma semana após o término da redação dos itens anteriores. Caso a idéia não tivesse me ocorrido a tempo de concluir a tese, penso que o trabalho ficaria incompleto. Levando-se em consideração a ampla variedade de operações mentais necessárias para compreender as representações prévias, a nova alternativa mostra-se não apenas mais sintética, mas também completamente integrada a todas as antecedentes. E quanto à sua “beleza”?

De acordo com Schattschneider (2006), para que uma prova matemática seja considerada “bela”, ela deve conter algumas das seguintes características:

- elegância – ser econômica, conduzir diretamente à ideia principal;
- ingenuidade – mostrar uma idéia inesperada, uma virada surpreendente;
- insight – ser reveladora, mostrar o porquê de uma assertiva ser verdadeira;
- conectividade – permitir uma visão mais ampla do problema;
- paradigma – revelar um modelo útil, aplicável em outros contextos.

Imagino que as características citadas pela autora façam parte da proposta sugerida. Ela é econômica, reveladora e permite uma visão mais abrangente da questão. Além disso, sua estrutura remete a um problema de análise combinatória, evidenciando a aplicação do raciocínio em outros contextos.

Todo polígono com um número par de lados L possui L lados paralelos dois a dois de acordo com $L / 2$ diferentes direções. Na figura 89, o polígono com 12 lados é usado como exemplo. O lado a é paralelo ao a' ; o lado b é paralelo ao b' e assim por diante. Ao todo são vistas apenas 6 letras, pois só existem 6 ($L / 2$) direções possíveis. Aqui, pretendo mostrar que cada losango interno ao polígono deve ser interpretado como uma combinação de um par de letras (direções) dentre as 6 ($L / 2$) disponíveis. Mas por quê?

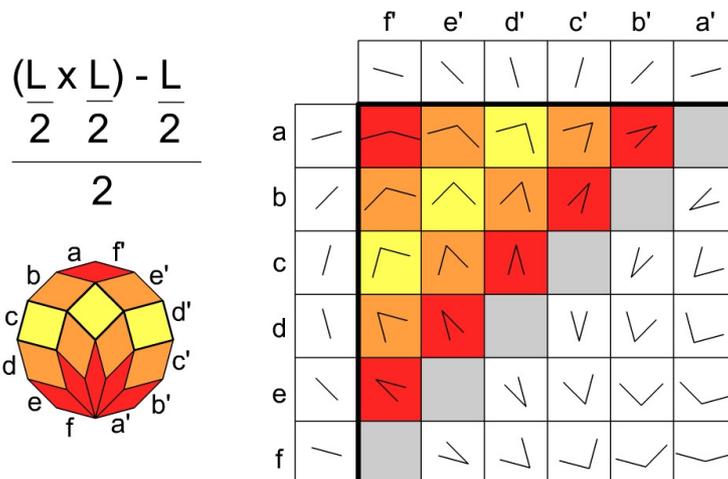


Figura 89 – Uma alternativa curiosa para visualizar a fórmula

Seja qual for o losango, por definição ele terá sempre quatro lados congruentes, sendo os opostos paralelos entre si. Pela figura 89, nota-se que lados de um losango qualquer sempre apresentarão as mesmas direções de determinados lados do polígono (a e f' , a' e f , por exemplo). Cria-se então uma tabela com 6 linhas ($L / 2$) e 6 colunas ($L / 2$). Nela, as linhas indicam as direções

de a até f (relativas aos lados da porção esquerda do polígono) e as colunas se referem às direções de f' a a' (relativas aos lados da porção direita do polígono). No cruzamento de cada linha com cada coluna, há um quadrado preenchido por dois segmentos cujas direções são por elas determinadas. Num mapeamento, dois lados de cada losango da estrutura original são transpostos para o interior de um quadrado da tabela. Os quadrados que constituem a diagonal em cinza, composta por pares de mesmas direções, são descartados. Essa diagonal funciona como uma espécie de eixo de simetria bilateral em que cada par de lados é associado a outro para completar o losango de origem. Dada a nova representação, como se pode calcular a quantidade total de losangos? O número total de losangos corresponde à metade do total dos quadrados preenchidos por pares de lados. Neste caso, após multiplicar o número de linhas pelo de colunas da tabela, é necessário subtrair a quantidade de quadrados cinzentos e dividir o restante à metade. Como resultado, tem-se $(L - 2) L / 8$ losangos. As cores indicam uma ligação perfeita da nova estrutura com a prévia, na qual os losangos são transformados em quadrados (figuras 90 e 83).

De acordo com a alternativa apresentada, a resposta do desafio se reduz a um problema de análise combinatória. Quantas combinações, grupos de s elementos diferentes em um grupo de n elementos diferentes, podem ser formadas? No problema original, cada losango possui lados paralelos a duas direções ($s = 2$) e os n elementos correspondem a todas as possíveis direções dos lados do polígono ($n = L / 2$). Consequentemente, quem conhecer a fórmula para a combinação simples poderá aplicá-la:

$$C(n,s) = \frac{n!}{s!(n-s)!} \quad \rightarrow \quad C\left(\frac{L}{2}, 2\right) = \frac{\frac{L}{2}!}{2!\left(\frac{L}{2}-2\right)!} \quad \rightarrow \quad C\left(\frac{L}{2}, 2\right) = \frac{L(L-2)}{8}$$

Outra possibilidade para se obter a quantidade de losangos em um polígono com um número par de lados L é fornecida pelo Triângulo de Pascal. O triângulo foi inventado pelo matemático chinês Yang Hui, e somente 500 anos depois, várias de suas propriedades foram exploradas e divulgadas por Pascal.

Na tabela da figura 90, cada entrada $C(n,s)$ contém o resultado da soma de dois números, do que está logo acima dele com o seu antecessor imediato, à esquerda. Na tabela, $C(2,2) = 1$, $C(3,2) = 3$, $C(4,2) = 6$ e assim por diante.

n, s	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4	s = 5	s = 6	s = 7
n = 0	1							
n = 1	1	1						
n = 2	1	2	1					
n = 3	1	3	3	1				
n = 4	1	4	6	4	1			
n = 5	1	5	10	10	5	1		
n = 6	1	6	15	20	15	6	1	
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1

Figura 90 - Triângulo de Pascal

4.2.11. Um organismo em crescimento

Há mais um modo de se representar os losangos em questão. A figura 91 mostra os passos de uma seqüência animada onde aparecem, sucessivamente, diversos polígonos regulares, variando de $L = 4$ até $L = 12$. A animação foi elaborada em um *software* de geometria dinâmica. Nela, o quadrado se transforma em hexágono, o hexágono em octógono e assim por diante. A cada passo, uma nova coroa de losangos surge na parte inferior do polígono. Simultaneamente, uma nova linha de quadrados aparece na parte inferior da “pirâmide” em formação.

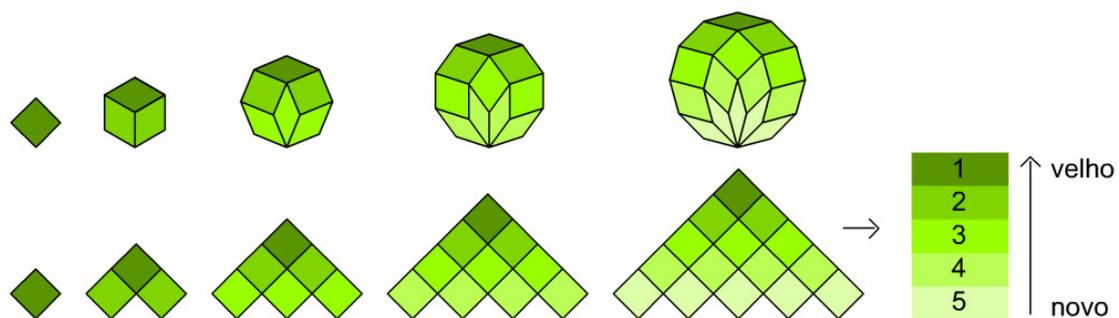


Figura 91 - Visualização do padrão de crescimento da série

A animação pretende reforçar a sensação de crescimento da estrutura. Por isso, os tons em verde sugerem uma analogia com um organismo vivo, vegetal. A escolha de cores faz com que os losangos antigos permaneçam, sendo diferenciados pelos tons mais escuros em relação aos novos. Ao longo do processo, todos os losangos sofrem constantes deformações e migram para a parte superior da figura, causando também uma ilusão de tridimensionalidade.

4.2.12. Quebra-cabeças com losangos

O item anterior colocou em evidência uma regra de formação dos losangos internos aos polígonos, mas eles não precisam ser necessariamente organizados dessa forma. A figura 92 revela outras composições, retomando o dodecágono regular ($L = 12$) como exemplo.

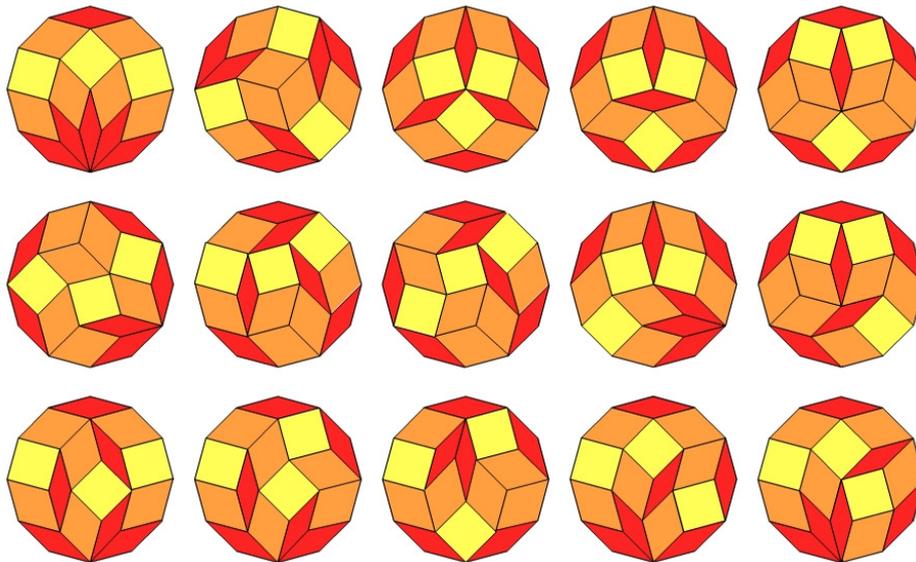


Figura 92 - Diversos arranjos de losangos internos ao dodecágono regular

De quantos modos diferentes esses losangos podem ser dispostos dentro do polígono de origem? As composições da figura 92 foram obtidas por ensaio e erro após uma série de tentativas. Neste conjunto, uma propriedade surpreendente deve ser observada. Os losangos não são rotacionados ou refletidos, mas apenas transladados. Em outras palavras, as direções são mantidas. A busca intuitiva de novos arranjos é dificultada na medida em que aumenta o número de tentativas. Pelo fato de reflexões e/ou rotações de um mesmo arranjo não gerarem novas entradas, a tarefa de comparar uma suposta nova solução com as anteriores chega a lembrar o Jogo dos 7 Erros (figura 93).

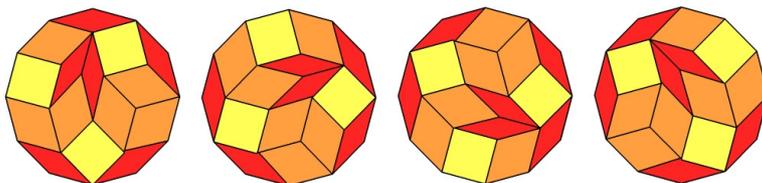


Figura 93 - Soluções similares porém diferentes à primeira vista

Helena Verrill é uma experiente pesquisadora matemática que se deparou com esse problema²⁷. Ela não chegou a encontrar uma resposta definitiva, mas visualizou um interessante ponto de partida. Sua idéia foi a de tentar corresponder os arranjos de losangos a arranjos de linhas. Mas como? A figura 94 ilustra os primeiros passos do processo sugerido²⁸.

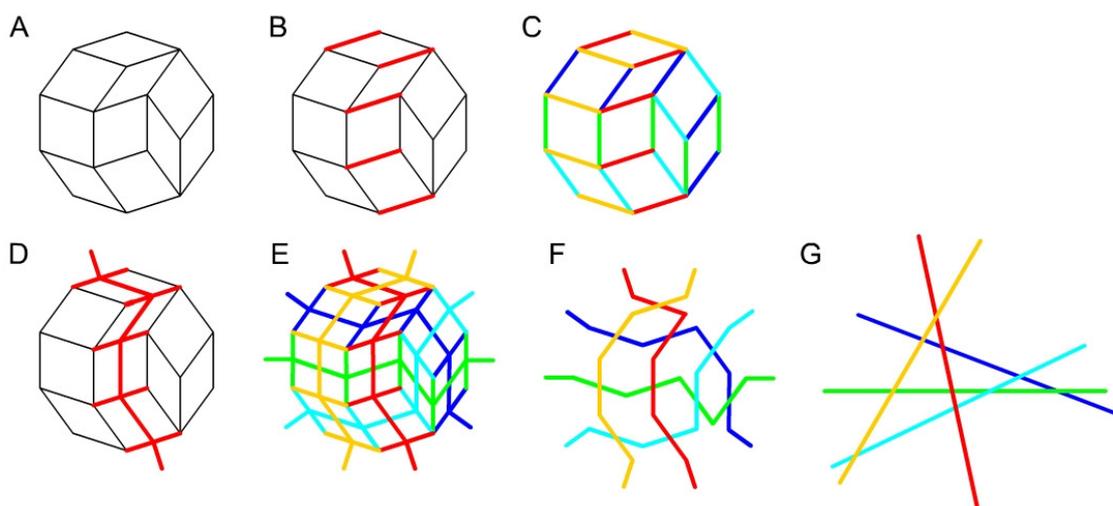


Figura 94 – Transf. de um arranjo de losangos em um arranjo de linhas

- A – Partir de um arranjo de losangos do polígono selecionado;
- B – escolher uma direção e marcar uma série de segmentos paralelos;
- C – repetir o procedimento em relação às outras direções;
- D – marcar um trajeto atravessando a primeira sequência escolhida;
- E – repetir o procedimento em relação às outras direções;
- F – descartar os losangos da estrutura original sem perder os trajetos (linhas);
- G – esticar as linhas poligonais para torná-las retas.

O arranjo de losangos foi transformado em um arranjo de linhas, ou pelo menos de pseudo-linhas (linhas que se cruzam em apenas um ponto). De quantas maneiras essas (pseudo) linhas podem ser dispostas? Existe uma correspondência biunívoca entre os arranjos dessas duas representações? É

27 A diferença é que ela não se restringiu aos polígonos regulares. Todos e quaisquer polígonos (polítopos) de lados opostos paralelos eram válidos. Por conta dessa abertura, os losangos foram substituídos por paralelogramos.

28 Helena Verrill é doutora pela Universidade de Cambridge e completou seis pós-doutorados em instituições de prestígio em diversos vários países: Japão (1), Canadá (1), Alemanha (3) e Dinamarca (1). O endereço de sua página na web é <http://www.math.lsu.edu/~verrill/>.

possível resgatar os losangos a partir das (pseudo) linhas? Em caso positivo, o que fazer para reverter o processo? O problema permanece em aberto.

No meu ponto de vista, calcular o número total de arranjos não tem tanta importância quanto saber como são esses arranjos. Seria interessante catalogar todas as soluções, enfatizando as que apresentassem simetria radial e bilateral. Em termos práticos, esse tipo de estudo pode servir tanto para o projeto de quebra-cabeças quanto para a criação de mosaicos decorativos. Neste sentido, dois brinquedos contemporâneos merecem atenção: *Fractiles* - 7²⁹ e *Batty Lizards*³⁰.

Fractiles - 7 – Trata-se de um brinquedo simples, norte-americano, cujas partes correspondem aos losangos internos do polígono regular de 14 lados. As peças são ímãs emborrachados que podem ser dispostos sobre uma porta de geladeira, por exemplo, ou chapas metálicas. Existem conjuntos à venda com 48, 96 ou 192 peças. A figura 95 apresenta uma foto das embalagens do produto. Na figura, sobre um suporte escuro, está montado um polígono de 14 lados. Três tipos de losangos, disponíveis nas cores vermelha, amarela e azul, formam o desenho.



Figura 95 - Embalagens do quebra-cabeça Fractiles – 7

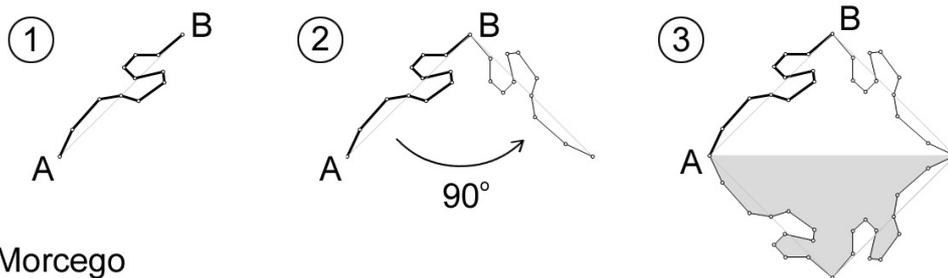
Batty Lizards (Osborn, 1997) – Composto por 120 peças, divididas em 10 formas diferentes (5 lagartos e 5 morcegos), este brinquedo, também norte-americano, não parece ter qualquer relação com os losangos vistos anteriormente. Porém, todas as peças derivam deles. Mas, de que modo? Para

29 <http://www.fractiles.com/index.html>

revelar a resposta, foi elaborada uma animação interativa em um programa de geometria dinâmica. A figura 96 mostra o processo básico das transformações, envolvendo uma rotação e uma reflexão.

Tudo começa com uma linha poligonal aberta cujos pontos extremos são aqui denominados A e B. Uma cópia da linha é traçada, sobrepondo-se à anterior. Para criar um lagarto, executa-se uma rotação desta linha em torno do ponto B, por uma amplitude específica (aqui de 90°) no sentido anti-horário. A metade esquerda do morcego aparece. Como a “criatura” possui simetria bilateral, uma reflexão de eixo longitudinal (aqui horizontal) completa a figura. Para criar um morcego, aplica-se o mesmo procedimento, mas desta vez a rotação inicial se dá em torno do ponto A, pela mesma amplitude porém no sentido horário. Uma reflexão pelo eixo longitudinal (aqui vertical) completa a figura. Curiosamente, os animais têm cores e nomes próprios, características que facilitam suas identificações. A figura 97 lista as 10 peças do brinquedo, informando os ângulos internos dos losangos associados.

Lagarto



Morcego

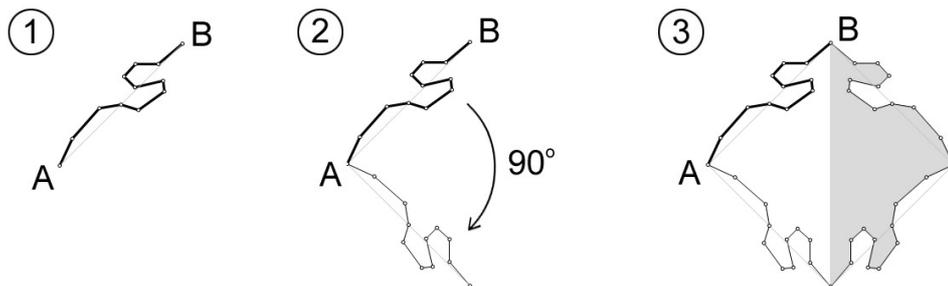


Figura 96 - Geração dos lagartos e morcegos em apenas duas etapas

Lagartos

Morcegos

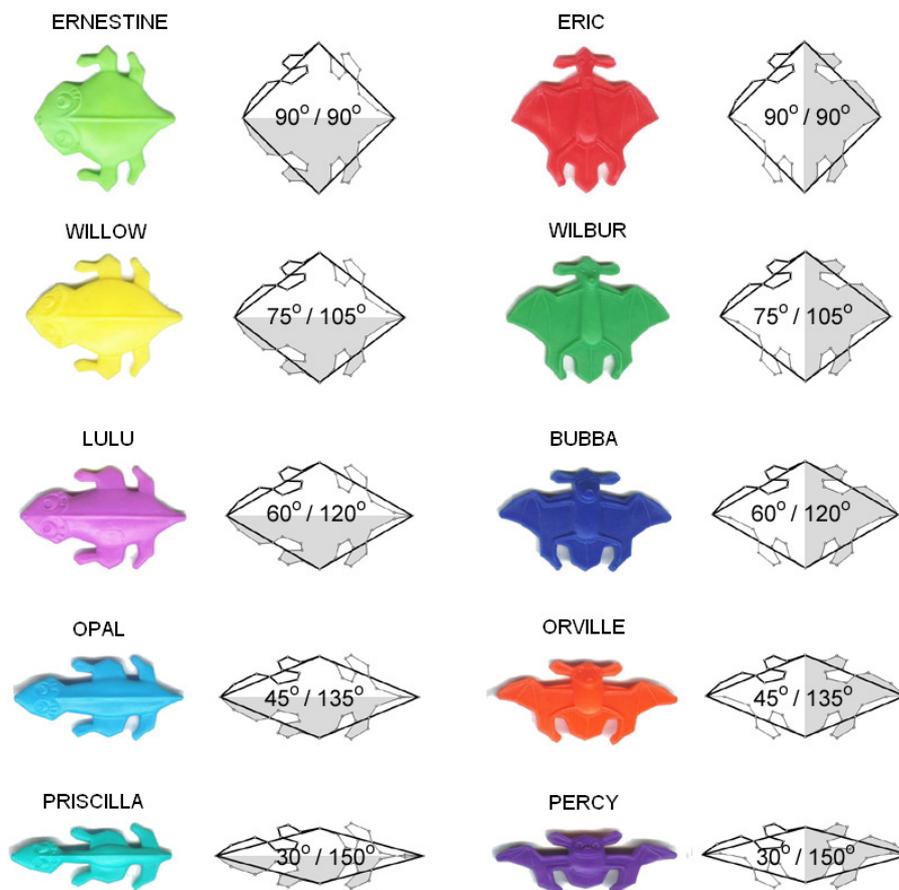


Figura 97 - Lagartos e morcegos do Batty Lizards

As peças são conectadas quando as regiões côncavas e convexas das “patas e orelhas” (dos morcegos) tornam-se adjacentes. Por ser um quebra-cabeça de livre composição, não existem vencedores ou perdedores. Na tentativa de preencher sem superposições ou lacunas uma região do plano, a brincadeira se resume a experimentar e deduzir propriedades dos ladrilhamentos periódicos e aperiódicos. Conforme mostram as figuras 98 e 99, reproduzidas da patente original do produto, a substituição dos losangos por animais simpáticos³¹ modifica a percepção das estruturas geométricas, incluindo um forte componente afetivo³² ao ato de brincar.

31 Os morcegos estão sempre sorrindo.

32 Elas não são criaturas quaisquer, elas tem nomes e “interagem” umas com as outras. A união das personagens envolve contato físico direto, socialização, cooperação e troca. Isoladamente, uma peça não vale muito, mas o conjunto ressignifica as partes.

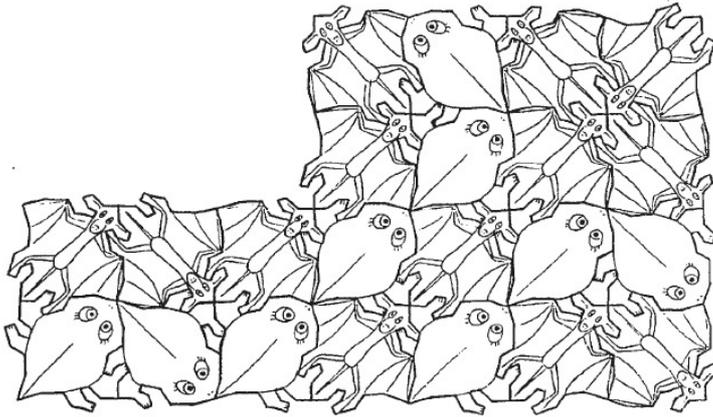


Figura 98 - Ladrilhamento com Eric e Ernestine

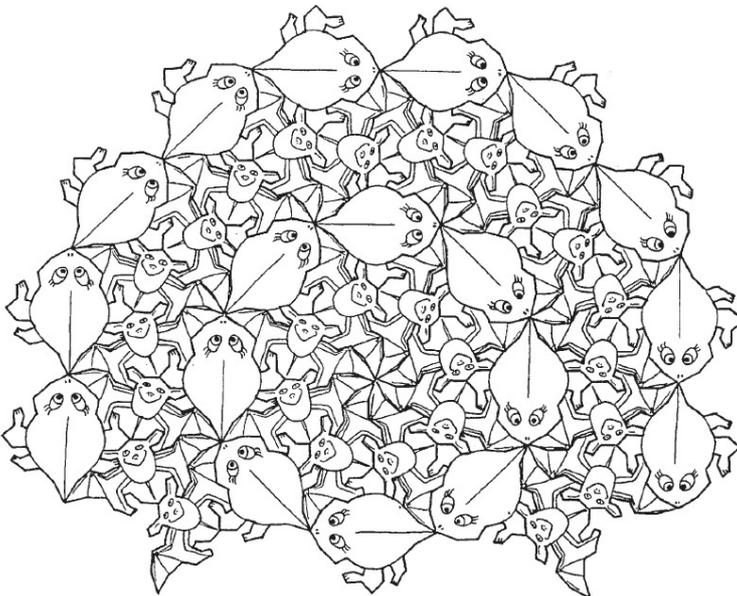


Figura 99 - Ladrilhamento com Orville e Ernestine

4.2.13. Experimento com alunos

Numa primeira etapa, foi apresentado um modelo concreto (detalhado no item 4.2.3) a cada um dos participantes. Conforme explicado na ocasião, o propósito de uso do modelo era comunicar não apenas a estrutura dos losangos internos aos polígonos, mas também mostrar um método para construí-lo em função de sucessivas reflexões.

Afirmar que qualquer polígono regular com um número par de lados poderia ser dividido em losangos, cujos lados teriam o mesmo comprimento dos lados do próprio polígono. Disse ainda que os losangos poderiam ser arrumados de diversas maneiras dentro dos polígonos. Todavia, só me interessava um tipo

específico de arranjo, exemplificado pelo modelo concreto que tinha em mãos. À guisa de demonstração, fui gradativamente virando “página” após “página” para preenchê-lo de losangos (figura 73) e em seguida entreguei uma folha de papel com os contornos dos polígonos regulares de 4, 6, 8, 10, 12 e 14 lados (figura 100).

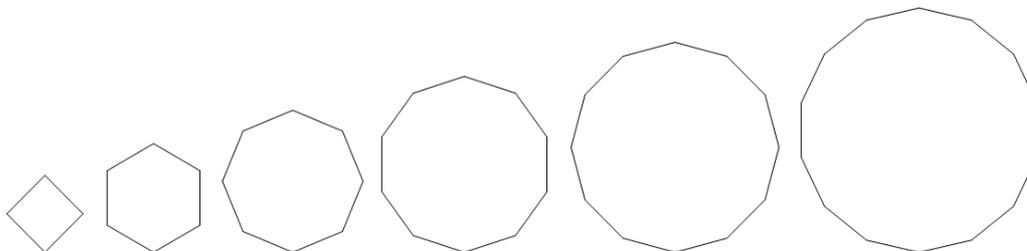


Figura 100 - Polígonos a serem preenchidos por losangos

Somente então solicitei que as divisões completas daqueles polígonos em losangos fossem traçadas com o auxílio dos instrumentos de desenho (esquadros, compasso). Seriam as propriedades da estrutura do modelo concreto reconhecidas e aplicadas de maneira correta nas divisões dos polígonos regulares em losangos? Ficariam os participantes limitados ao processo de construção por reflexões, seguindo o passo-a-passo original ou descobririam meios alternativos para executarem as divisões (paralelismos, translações, rotações)?

O manuseio dos instrumentos revelou as operações mentais associadas às transformações geométricas. Os três participantes compreenderam as propriedades daquele tipo de arranjo com base na observação da estrutura original do modelo concreto. Eles acertaram as divisões (figura 101). Em vez de seguir a “receita das reflexões”, cada um encontrou caminhos próprios para executar os traçados. Dentre os diversos procedimentos gráficos colocados em prática, me chamaram a atenção os seguintes:

- 1 – Traçado de lados paralelos com o auxílio dos esquadros;
- 2 – transferência de ângulos com o compasso para rotações de pontos;
- 3 – interseção de círculos como lugares geométricos para determinar vértices;
- 4 – construção de retas auxiliares ligando vértices já existentes;
- 5 – transferência de medidas com o compasso;
- 6 – determinação de eixos e operações de reflexão associadas.

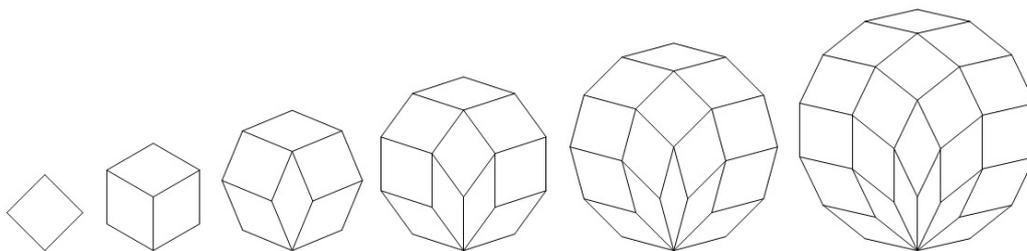


Figura 101 - Polígonos preenchidos por losangos

Ao longo da atividade, eu era informado sobre (ou questionava quais eram) as operações que eles pretendiam executar e em poucas ocasiões intervi para recapitular como os instrumentos deveriam ser manuseados. Em síntese, os resultados corresponderam às minhas expectativas. Eles compreenderam a estrutura a partir da observação e manuseio do material concreto, enxergaram as relações essenciais que caracterizam aquele tipo de arranjo e não se limitaram a um único método de resolução. Por cerca de 30 minutos, tiveram a chance de aprender, ou reaprender, de modo integrado e objetivo, conteúdos de geometria e procedimentos operacionais de desenho. Para a realização dessa tarefa, inverteu-se a ordem tradicional do ensino, na qual os conteúdos são apresentados de maneira sequencial e fragmentada antes dos exemplos e exercícios.

Na segunda etapa do experimento, os alunos deveriam descobrir a fórmula da quantidade de losangos R (internos) em função do número L de lados do polígono regular. Nenhum dos participantes conseguiu descobrir a fórmula por conta própria. Por conseguinte, em vários momentos julguei necessário interagir com cada um, isoladamente, fazendo perguntas e levantando hipóteses, a fim de mantê-lo interessado. Adotei como principal estratégia a sugestão de uma analogia entre duas estruturas (figura 102): 1 – “o perfil da escada” de cinco degraus montado no desafio anterior com as peças imantadas e 2 – o polígono de 12 lados dividido em losangos coloridos, relativo ao material concreto ali exposto. Logo após, eu mostrei algumas animações, explicadas em detalhes nos itens 4.2.4, 4.2.7 e 4.2.11, oferecendo novas oportunidades para a visualização de relações essenciais entre aquelas duas estruturas³³. Por fim, tal como

³³ Exceto para o participante [3], pelo fato de elas não terem sido planejadas e elaboradas a tempo do encontro.

acontece numa aula expositiva³⁴, expliquei como determinar os ângulos internos dos losangos, seguindo os passos descritos no item 4.2.9.

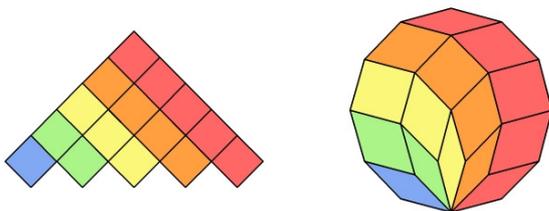


Figura 102 - Duas estruturas com algumas características em comum

Em função do excesso de detalhes, evita-se aqui a descrição minuciosa de todas as passagens e diálogos do experimento. Todavia, os comentários apresentados a seguir dão uma idéia da sequência dos fatos e também das reações dos participantes:

Participante [1] –

- Sobre a primeira etapa da atividade / “Esse foi tão legal de fazer. É mais legal quando a gente pode desenhar.”
- Sobre a descoberta, com o meu auxílio, da fórmula da quantidade de losangos em função do número de lados / “Sinistro, matemática é uma coisa, né? Bruxaria.”
- Sobre a relação entre as duas estruturas / “Legal, muito maneiro! Dá pra relacionar.”
- Sobre as animações em geometria dinâmica / “Ah, que legal! Como é que você faz isso?”
- Sobre a transformação de uma estrutura em outra e o uso do problema anterior como auxiliar / “Funciona, né? Que legal! Já pensou nisso? Maneiro, maneiro. Interessante, muito legal. Gostei.”

34 Seria ideal que os participantes descobrissem aquelas relações por conta própria, contudo o grau de dificuldade tornou-se incompatível com o espaço de tempo

Participante [2] -

- Sobre a transformação de uma estrutura em outra / “Eu já tava conseguindo visualizar essa animação, por causa do porta panela da minha avó. São uns quadradinhos que você estica pela ponta e viram uns losangos.”
- Sobre a descoberta da quantidade e dos tipos de losangos (caracterizados por seus ângulos internos) / “A matemática é impressionante, né?”

Participante [3] -

- Sobre a primeira etapa da atividade / “Eu achei que ia demorar muito se eu ficasse refletindo, refletindo. Achei essa rodinha (coroa inferior de losangos) e esse (losango) aqui de cima e fui indo pro centro (do polígono regular).”
- Sobre a inclusão do desafio na sequência de atividades / “Com certeza, já saio daqui mais inteligente.”