

Análise da proposta pelos resultados em 2007

Para que pudéssemos verificar a validade do emprego da nova proposta metodológica, era necessário avaliar se, depois de decorrido um prazo mais longo, tinha-se consolidado a aprendizagem de frações. Ao mesmo tempo, visava-se verificar, até que ponto, a abordagem adotada viria a facilitar, mais adiante, a aprendizagem dos conceitos algébricos. Nessa perspectiva, a proposta adotada foi complementada, acrescentando-se, ao conteúdo programático proposto para 2007, na turma 803 (no 8º ano), uma seqüência de 13 aulas que tinham como finalidade rever as operações com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão) fazendo um paralelo com as expressões algébricas. Isto nos permitiu realizar uma avaliação comparativa da aprendizagem dos dois grupos, descritos no Capítulo 4, de que a turma veio a ser composta.

Iniciamos o ano letivo com essa turma replicando o Teste Diagnóstico em 16/03/2007, cujo objetivo principal era verificar a evolução do aluno, tomando como parâmetro o 1º teste diagnóstico aplicado no início de 2006. Estes dois testes já foram analisados e comparados no Capítulo 5.

Ao longo do 1º trimestre, a turma desenvolveu o conteúdo programático estabelecido pelo Departamento Pedagógico de Matemática. Outras avaliações foram aplicadas, tais como testes em duplas, testes individuais e a Prova Trimestral.

No 2º trimestre realizamos uma série de testes e exercícios em dupla, sempre com o objetivo de avaliar se o trabalho desenvolvido em 2006 tinha atingido a expectativa. Foram, ao mesmo tempo, desenvolvidas atividades envolvendo operações com frações, fazendo ponte com as operações algébricas. Essas atividades se estenderam até o 3º trimestre.

No final de junho foi aplicado um teste individual, cujos conteúdos foram expressões algébricas, divisão e simetria. Dos **28** alunos oriundos da antiga turma 604, 24 alunos acertaram mais de 50% das questões do teste. Uma aluna faltou e três ficaram abaixo de 50% do teste. Dos **10** novos tivemos 7 alunos acertando

50% do teste e três ficaram abaixo de 50%. Duas questões deste teste foram incluídas nele por nossa iniciativa, as questões 5ª e 6ª, cujos objetivos eram, respectivamente, avaliar o desempenho em relação ao cálculo de expressões algébricas e divisão, que por sua vez também envolvia o cálculo algébrico. Estas questões foram as seguintes:

5) Efetue e simplifique sempre que possível:

a) $\frac{7x}{x-y} + \frac{6x-13y}{x-y}$, para $x \neq y$

b) $F = 4(n - n^2 + 5) - 3n(n - 5)$

6) a) Uma pizza grande no Papa's Pizza é dividida em **c** fatias iguais. Cada pessoa come, em média, **b** fatias. Que parte de uma pizza grande cada pessoa come em média?

b) Na terça-feira, o Papa's Pizza não sabia exatamente quantas pessoas estariam vindo ao restaurante e decidiu preparar **d** pizzas. Quantas pessoas, em média, poderiam comer pizzas, na terça-feira, nessa pizzeria?

O desempenho dos alunos de cada grupo está resumido nos quadros abaixo. Contamos os acertos em dois níveis: acerto total, para o caso de o aluno ter chegado ao resultado final, e acerto parcial, para o caso de o aluno encaminhar satisfatoriamente a solução, mas, não chegar ao resultado final. Esses quadros evidenciam que, em ambas as questões, o desempenho dos alunos da turma 604 de 2006 foi melhor que o dos outros alunos.

Quadro 7.1. Desempenho na 5ª Questão

Questão 5 (turma 604-803)	Questão 5 (novos-803)
a) Acerto total: 5 (18,5%)	a) Acerto total: 0
Acerto parcial: 15 (55,6%)	Acerto parcial: 7 (70%)
Erro: 7 (25,9%)	Erro: 3 (30%)
b) Acerto total: 5 (18,5%)	b) Acerto total: 6 (60%)
Acerto parcial: 13 (48,2%)	Acerto parcial: 3 (30%)
Erro: 9 (33,3%)	Erro: 1 (10%)

Quadro 7.2. Desempenho na 6ª Questão

Questão 6 (turma 604-803)	Questão 6 (novos-803)
a) Acerto total: 22 (81,5%)	a) Acerto total: 7 (70%)
Acerto parcial: 0	Acerto parcial: 0
Erro: 5 (18,5%)	Erro: 3 (30%)
b) Acerto total: 13 (48,2%)	b) Acerto total: 1 (10%)
Acerto parcial: 1 (3,6%)	Acerto parcial: 0
Erro: 13 (48,2%)	Erro: 9 (90%)

Destacamos a seguir alguns resultados da análise das soluções das duas questões apresentadas pelos alunos da turma 604 que demonstram a sua segurança no domínio dos conceitos tratados.

Camila

5) (0,4p.) Efetue e simplifique sempre que possível:

a) $\frac{7x}{x-y} + \frac{6x-13y}{x-y}$, para $x \neq y$

$\frac{7x+6x-13y}{x-y} = \frac{13x-13y}{x-y} = 13$

b) $F = 4(n-n^2+5) - 3n(n-5)$

$F = 4n - 4n^2 + 20 - 3n^2 + 15n$

$F = 4n - 7n^2 + 20 + 15n$

$F = 19n - 7n^2 + 20$

6) (0,3p.)

a) Uma pizza grande no Papa's Pizza é dividida em c fatias iguais. Cada pessoa come, em média, b fatias. Que parte de uma pizza grande cada pessoa come em média?

$\frac{b}{c}$

$R: \frac{b}{c}$, uma pessoa come em média b pedaços de uma pizza grande fatiada em c pedaços.

b) Na terça-feira, o Papa's Pizza não sabia exatamente quantas pessoas estariam vindo ao restaurante e decidiu preparar d pizzas. Quantas pessoas, em média, poderiam comer pizzas, na terça-feira, nessa pizzeria? Justifique sua resposta com desenho e cálculos.

$\frac{d}{1} \div \frac{b}{c} = \frac{d \cdot c}{b} = \frac{dc}{b}$

Diagrama de uma pizza dividida em 6 pedaços.

$\frac{n^{\circ} \text{ de pizzas}}{n^{\circ} \text{ de pedaços por pessoa por pessoa}}$

Figura 7.99 – Teste- 2007 - 5ª e 6ª questões - CAMILA (5-6)

Na 5ª questão, item (a), esta aluna não conseguiu completar a simplificação corretamente. Entretanto, no item (b), utilizou a propriedade distributiva e trabalhou com segurança com os termos semelhantes. Para resolver a 6ª questão, tanto no item (a) como no item (b), mostrou compreender o conceito de divisão de fração. Ainda neste item, pelo desenho informal que fez, mostrou dominar a generalização, quando faz, rapidamente os desenhos da pizza e coloca a seguir os pontinhos para indicar que continuam representando as pizzas (Figura 7.99).

Danielle

5) (0,4p.) Efetue e simplifique sempre que possível:

a) $\frac{7x}{x-y} + \frac{6x-13y}{x-y}$, para $x \neq y$

$$\frac{7x + 6x - 13y}{x-y} = \frac{13x - 13y}{x-y} = \frac{13(x-y)}{x-y} = 13$$

b) $F = 4(n - n^2 + 5) - 3n(n - 5)$

$$F = 4n - 4n^2 + 20 - 3n^2 + 15n$$

$$F = 19n - 7n^2 + 20$$

6) (0,2p.)

a) Uma pizza grande no Papa's Pizza é dividida em c fatias iguais. Cada pessoa come, em média, b fatias. Que parte de uma pizza grande cada pessoa come em média?

Pizza = c fatias iguais.
Cada p = b fatias
média = $\frac{b}{c}$

R: Cada pessoa come em média $\frac{b}{c}$ fatias grandes.

b) Na terça-feira, o Papa's Pizza não sabia exatamente quantas pessoas estariam vindo ao restaurante e decidiu preparar d pizzas. Quantas pessoas, em média, poderiam comer pizzas, na terça-feira, nessa pizzeria? Justifique sua resposta com desenho e cálculos.

c = fatias iguais
 d = pizzas em média

R: Poderiam comer pizzas na terça-feira na $\frac{d}{b}$ pessoas.

Figura 7.100 – Teste- 2007 - 5ª e 6ª questões – DANIELLE (5-6)

Esta aluna não conseguiu completar a simplificação no item (a). No item (b) aplicou a propriedade distributiva, além de mostrar que sabe lidar com termos semelhantes. No item (a) da 6ª questão, usou as letras sugeridas pelo enunciado do problema e finalmente conclui corretamente. No item (b) indicou o que era pedido por cálculos e parte por desenho, também concluindo corretamente (Figura 7.100).

Lucas Simões

5) (0,4p.) Efetue e simplifique sempre que possível:

a) $\frac{7x}{x-y} + \frac{6x-13y}{x-y}$, para $x \neq y$

$$\frac{7x + 6x - 13y}{x-y} = \frac{13x - 13y}{x-y} = \frac{13(x-y)}{x-y} = 13$$

b) $F = 4(n - n^2 + 5) - 3n(n - 5)$

$$F = 4n - 4n^2 + 20 - 3n^2 + 15n$$

$$F = 19n - 7n^2 + 20$$

6) (0,2p.)

a) Uma pizza grande no Papa's Pizza é dividida em c fatias iguais. Cada pessoa come, em média, b fatias. Que parte de uma pizza grande cada pessoa come em média?

Se $c = 8$ e $b = 2$

$\frac{b}{c} \rightarrow$ parte da total
 $\frac{c}{c} \rightarrow$ total

b) Na terça-feira, o Papa's Pizza não sabia exatamente quantas pessoas estariam vindo ao restaurante e decidiu preparar d pizzas. Quantas pessoas, em média, poderiam comer pizzas, na terça-feira, nessa pizzeria? Justifique sua resposta com desenho e cálculos.

Se $d = 3$, $c = 4$ e $b = 2$

$\frac{d}{b} \rightarrow$ pizzas
 $\frac{b}{c} \rightarrow$ pedaços de cada pessoa
 $\frac{c}{c} \rightarrow$ total

R: $\frac{d}{b} \times \frac{c}{c} = \frac{dc}{b}$

Figura 7.101 – Teste - 2007 - 5ª e 6ª questões – LUCAS SIMÕES (5-6)

Na 5ª questão, item (a), mostrou saber trabalhar com termos semelhantes, fatorar e finalmente simplificar. No item (b) aplicou a propriedade distributiva, apenas esquecendo o n. Quanto à 6ª questão, além de justificar pelo desenho, deu um exemplo numérico, e a seguir voltou para a forma literal para concluir corretamente segundo o enunciado do problema (Figura 7.101).

Priscila

5) (0,4p.) Efetue e simplifique sempre que possível:

a) $\frac{7x}{x-y} + \frac{6x-13y}{x-y}$, para $x \neq y$

$$\frac{7x + 6x - 13y}{x-y} = \frac{13x - 13y}{x-y} = \frac{13(x-y)}{x-y} = 13$$

b) $F = 4(n - n^2 + 5) - 3n(n - 5)$

$$F = 4n - 4n^2 + 20 - 3n^2 + 15n$$

$$F = 19n - 4n^2 + 20 - 3n^2$$

$$F = 19n - 7n^2 + 20$$

6) (0,2p.)

a) Uma pizza grande no Papa's Pizza é dividida em c fatias iguais. Cada pessoa come, em média, b fatias. Que parte de uma pizza grande cada pessoa come em média?

1 pizza = c partes iguais = $\frac{1}{c}$
 se cada um come b fatias = $\frac{b}{c}$
 R: $\frac{b}{c}$ fatias iguais da pizza.

b) Na terça-feira, o Papa's Pizza não sabia exatamente quantas pessoas estariam vindo ao restaurante e decidiu preparar d pizzas. Quantas pessoas, em média, poderiam comer pizzas, na terça-feira, nessa pizzeria? Justifique sua resposta com desenho e cálculos.

d = número de pessoas
 $\frac{b}{c} = \frac{1}{c}$ de fatias por pessoa
 R: A quantidade de pessoas seriam $\frac{dc}{b}$.
 sendo: $c = 3$ no de fatias = 1 pizza
 $b = 1$ n° de fatias
 $d = 3$ = nº de pizzas

Figura 7.102 – Teste - 2007 - 5ª e 6ª questões – PRISCILA (5-6)

No item (a) da 5ª questão, esta aluna operou corretamente, reduziu os termos semelhantes da expressão algébrica e finalmente simplificou. De forma análoga, no item (b) aplicou a propriedade distributiva e trabalhou bem com os sinais da operação. Na 6ª questão item (a) identificou quanto de pizza cada pessoa comeria. No item (b) identificou por cálculos e deu exemplo numérico. Embora não tenha completado esta resposta numérica, retornou para a forma literal, concluindo o que estava sendo pedido na questão (Figura 7.102).

Outros testes foram sendo aplicados entrelaçando a parte geométrica e a parte algébrica, envolvendo quadriláteros e suas propriedades, cálculo algébrico relativo a polígonos e o conceito de simetria. A prova trimestral dessa 2ª

certificação ocorreu em 24/08, levando em conta simetrias e propriedades das figuras geométricas, envolvendo fatoração com cálculo algébrico.

Em 31/08, portanto poucos dias depois, novo teste em dupla foi aplicado à turma pela pesquisadora, desta vez contendo na sua elaboração multiplicação de fração por fração, divisão de uma fração por um número inteiro. Este teste foi desenvolvido em duas aulas consecutivas, disposto de forma análoga às atividades anteriores, isto é, iniciamos as atividades trabalhando com números fracionários e depois passamos a propor atividades envolvendo expressões algébricas com denominadores diferentes.

Apresentamos, a seguir, a 7ª e 8ª aulas. Estas foram as últimas atividades da sequência. Algumas das atividades tiveram a duração de uma aula e outras a de duas aulas, a numeração 7ª e 8ª correspondendo à ordem das atividades e não ao tempo utilizado.

O desempenho dos alunos no conjunto dessas atividades é resumido no Quadro 7.3. É importante ressaltar que, principalmente em questões onde os alunos podiam optar na escolha da unidade, trabalharam com tranquilidade nesta escolha. De um modo geral, mesmos os erros encontrados, não recaíram neste quesito. Esta turma absorveu a idéia de buscar a unidade a ser trabalhada, sem ficar preso a procedimentos automáticos.

Quadro 7.3. Desempenho da 7ª e 8ª atividades.

	7ª e 8ª atividade (turma604803)	7ª e 8ª atividade (turma604803)	7ª e 8ª atividade (novos-803)	7ª e 8ª atividade (novos-803)
Ma: média do trimestre	Número de alunos	% de alunos	Número de alunos	% de alunos
$Ma < 5$	2	7,41%	0	0%
$5 \leq Ma < 7$	11	40,74%	8	80%
$Ma \geq 7$	14	51,85%	2	20%

Examinamos a seguir o desempenho em cada questão separadamente. Na primeira questão, praticamente toda a turma acertou o primeiro item. Mas, no segundo item, 21 (77,8%) dos alunos antigos acertaram e 6 (22,2%) erraram, enquanto, dos novos, 50% acertaram e 50% do grupo erraram.

7ª aula:

Multiplicando uma Fração por uma Fração:

1. Trabalhando em dupla

- Márcia encontrou dois terços de um sanduíche sobre a mesa. Ela decidiu comer a metade dele. Quanto do sanduíche original ela comeu?
- João costuma andar de sua casa à escola que dista meio quilômetro de sua casa. Ao completar dois terços do caminho que distância ele já andou?

Danielle

COLÉGIO PEDRO II
PROFª. NEIDE DA F. P. SANT'ANNA E PROFª. ELIANA GIAMBIAGI
Coordenadora: Prof. Ana Patrícia Trajano de Souza
Aluno (a): Danielle Dória Souza N° 13
Idade: 12/13 Turma (2006): 604 Turma (2007): 809

INSTRUÇÕES:
• Responda às questões nos espaços indicados.
• Faça os cálculos e não os apague, eles justificam sua resposta.
Recordando e aprendendo: Exercícios gerais sobre fração, reta numérica e álgebra.

7ª aula:
Multiplicando uma Fração por uma Fração:
1. Trabalhando em dupla

• Márcia encontrou dois-terços de um sanduíche sobre a mesa. Ela decidiu comer a metade dele. Quanto do sanduíche original ela comeu?

$\frac{2}{3}$ sanduíche
 $\frac{1}{2}$ comendo metade
R: Ela comeu $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$

• A casa onde João mora fica distante meio quilômetro de sua escola. Quando ele anda dois-terços da distância, qual a distância ele andou?

$\frac{1}{2}$ Km = 500m
R: $\frac{2}{3}$ de 500m

Figura 7.103—Teste - 31/08 -2007 - 7ª atividade -1ª questão - DANIELLE (1)

Representou na forma icônica o que estava sendo pedido na 1ª parte da questão. Na 2ª parte da questão identificou corretamente a unidade de medida utilizada (Figura 7.103).

Lucas Simões

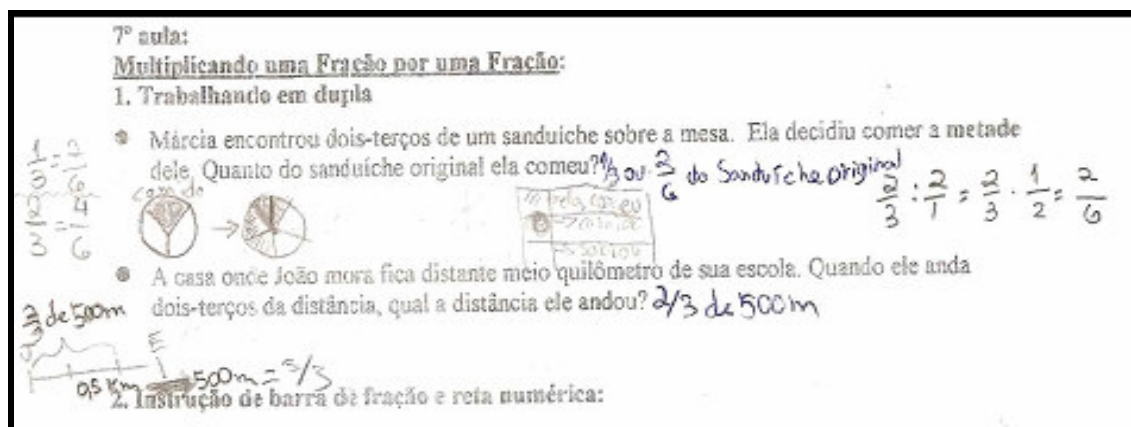


Figura 7.104 – Teste 2007 - 7ª atividade - 1ª questão – LUCAS SIMÕES (1)

Este aluno trabalhou corretamente com a unidade de medida tanto na 1ª parte do problema quanto na 2ª parte. Nesta 2ª parte, identificou a unidade de medida quilômetros e sua correspondência em metros (Figura 7.104).

3. Trabalhando em dupla:

Os alunos deverão fazer as seguintes multiplicações:

1) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

2) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$

3) $\frac{t}{4} \cdot \frac{3}{t+p}$

4) $\frac{2}{x} \cdot \frac{x+y}{2y}$

A segunda questão foi incluída com a respectiva solução como orientação para as seguintes. O Quadro 7.4 resume o desempenho dos alunos nos 4 itens da terceira questão. O bom desempenho dos alunos da antiga turma 604, em relação aos novos demonstra que os mesmos conseguiram superar dificuldades que de um modo geral surgem quando o aluno efetua produto de frações.

Quadro 7.4. Desempenho da Questão 3-7ª atividade

Questão 3 (turma 604-803)	Questão 3 (novos-803)
1. Acerto total: 27(100%)	1. Acerto total: 10(100 %)
2. Acerto total: 27(100%)	2. Acerto total: 10 (100%)
3. Acerto total: 15 (55,6%)	3. Acerto total: 4(40%)
Acerto parcial: 4 (14,8%)	Acerto parcial: 1(10%)
Erro: 8 (29,6%)	Erro: 5 (50%)
4. Acerto total: 16 (59,3%)	4. Acerto total: 1(10%)
Acerto parcial: 7 (25,9%)	Acerto parcial: 4 (40%)
Erro: 4 (14,8%)	Erro: 5 (50%)

A seguir mostraremos algumas soluções desenvolvidas pelo grupo desses alunos.

Beatriz

3. Trabalhando em dupla:
Os alunos deverão fazer as seguintes multiplicações:

1) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

2) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$

3) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1+p} = \frac{3}{4(1+p)}$

4) $\frac{2}{x} \cdot \frac{x+y}{2y} = \frac{2(x+y)}{x \cdot 2y}$

A number line is drawn below problem 1, with points at 0, 1/4, 2/4, 3/4, and 1. A bracket from 0 to 1/2 is labeled 1/2.

Figura 7.105 – Teste - 2007 - 7ª atividade - 3ª questão – BEATRIZ (3)

No 1º item da 3ª questão resolveu corretamente, além de perceber que multiplicar por $\frac{1}{2}$ representa dividir por 2. Utilizou a forma icônica para indicar a solução (Figura 7.105).

Marina

3. Trabalhando em dupla:
Os alunos deverão fazer as seguintes multiplicações:

1) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

2) $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$

3) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{1+p} = \frac{3}{4(1+p)}$

4) $\frac{2}{x} \cdot \frac{x+y}{2y} = \frac{2(x+y)}{x \cdot 2y} = \frac{2(x+y)}{2xy}$

Figura 7.106 – Teste - 2007 - 7ª atividade - 3ª questão – MARINA (3)

Resolveu todos os itens corretamente, atingindo os objetivos da questão proposta. (Figura 7.106)

8ª aula:

2ª questão:

- Benício e Davi têm quatro quintos de uma pizza. Que parte da pizza inteira caberá a cada um se eles cortarem a pizza ao meio?

Solução: $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{5} \div \frac{2}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}$

- José quer fazer hambúrgueres que pesam um quarto do quilo cada um. Quantos hambúrgueres ele poderá fazer com um quilo de carne de hambúrguer?

Na 8ª aula, a parte inicial da questão foi resolvida pela pesquisadora, no quadro da sala de aula junto aos alunos, a fim de que o conceito da divisão fosse retomado. As proporções de acertos estão indicadas no Quadro 7.5. Outro ponto que julgamos relevante ressaltar é que, embora a questão pudesse ser resolvida rapidamente sem apresentar cálculos no desenvolvimento, a maioria dos alunos da turma 604, optou em indicar cada passo da solução.

Quadro 7.5. Desempenho da Questão 2- 8ª atividade

Questão 2 (2º item) (turma 604-803)		Questão 2 (2º item) (novos-803)	
Acerto	25 (92,59%)	Acerto	9 (90%)
Erro:	2 (7,41%)	Erro	1(10%)

Daniel

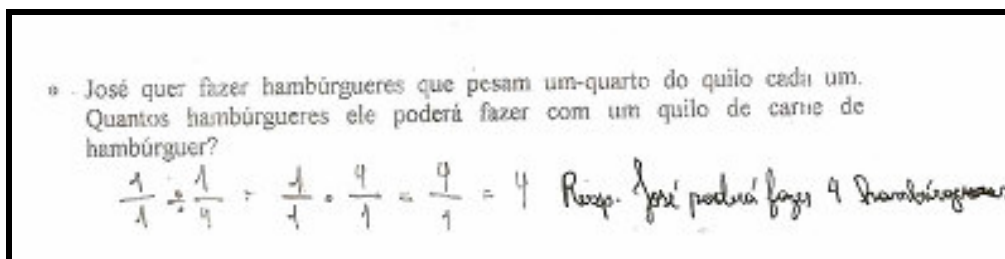


Figura 7.107 – Teste - 2007 - 8ª atividade - 2ª questão – DANIEL (2)

Trabalhou diretamente com a unidade dada, o quilograma, e a seguir resolveu também o problema corretamente (Figura 7.107).

Danielle

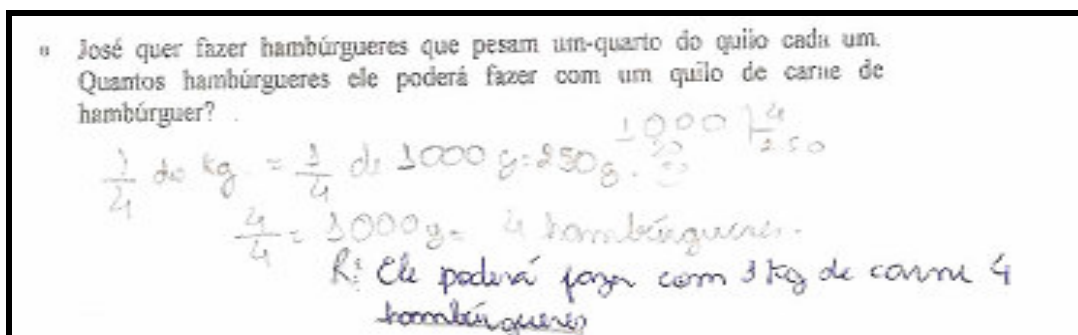


Figura 7.108 – Teste - 2007 - 8ª atividades - 2ª questão – DANIELLE (2)

Em primeiro lugar transformou o quilograma para grama e depois resolveu corretamente o problema (Figura 7.108).

3. Agora é a sua vez:

(a) $\frac{4}{5} \div 2 =$

(b) $2 \div \frac{2}{3} =$

(c) Faça o desenho e explique com palavras porque $\frac{1}{5} \div 2 = \frac{1}{10}$.

A Questão 3 envolveu divisão de uma fração por um número inteiro e divisão de um número inteiro por uma fração. Tanto no item (a) quanto no item (b) a maioria dos alunos respondeu corretamente. No último item foi solicitado que o aluno fizesse o desenho e justificasse seu desenvolvimento. Todos, sem exceção, responderam corretamente. Apresentamos, a seguir, alguns exemplos desse desenvolvimento.

Quadro 7.6. Desempenho da Questão 3 – 8ª atividade

Questão 3 (turma 604-803)		Questão 3 (novos-803)	
a) Acerto total	27(100%)	a) Acerto total:	10(100 %)
b) Acerto	24 (89%)	b) Acerto	9 (90%)
Erro	3 (11%)	Erro	1(10%)
c) Acerto total	27(100%)	c) Acerto total:	10(100 %)

Ana Carolina

3. Agora é a sua vez;

(a) $\frac{4}{5} \div 2 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

(b) $2 \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3$

(d) Faça o desenho e explique com palavras porque $\frac{1}{5} \div 2 = \frac{1}{10}$

então,

$\frac{1}{5}$ é igual $\frac{2}{10}$

$\frac{1}{5} \text{ ou } \frac{2}{10} \div 2 = \frac{1}{10}$

Figura 7.109 –Teste - 2007 - 8ª atividade -3ª questão – ANA CAROLINA (3)

Resolveu corretamente todos os itens. No último item completou como foi pedido, usando a forma icônica e a seguir justificando com expressão matemática (Figura 7.109).

Ana Cristina

3. Agora é a sua vez;

(a) $\frac{4}{5} + 2 = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

(b) $2 \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2} = 3$

(d) Faça o desenho e explique com palavras porque $\frac{1}{5} + 2 = \frac{1}{10}$

Porque $\frac{1}{5}$ é um pedaço de um inteiro dividido em 5 partes e dividindo cada pedaço do inteiro por 2, o inteiro terá 10 partes iguais e a parte que valia $\frac{1}{5}$ também foi repartida em 2, então a metade dessa parte ($\frac{1}{5}$) será igual a $\frac{1}{10}$



Figura 7.110 – Teste - 2007 - 8ª atividade - 3ª questão – ANA CRISTINA (3)

Usou a forma procedimental para resolver os dois primeiros itens. A seguir no item (d) usou a forma icônica para mostrar o que tinha feito complementando com linguagem informal (Figura 7.110).

Marina

3. Agora é a sua vez;

(a) $\frac{4}{5} + 2 = \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

(b) $2 \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3$

(d) Faça o desenho e explique com palavras porque $\frac{1}{5} + 2 = \frac{1}{10}$

Se temos uma pizza dividida em 5 pedaços cada pedaço = $\frac{1}{5}$
Se dividirmos cada pedaço em 2, temos 10 pedaços e cada pedaço passa a ser = $\frac{1}{10}$

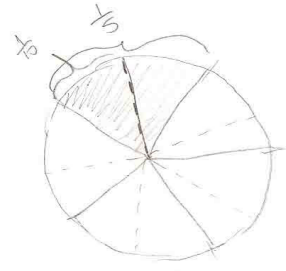


Figura 7.111 – Teste- 2007 - 8ª atividade - 3ª questão – MARINA (3)

Utiliza a forma procedimental nos itens (a) e (b) e no item (d) usa a forma icônica para mostrar a solução deste quesito complementando com linguagem informal. (Figura 7.111)

4. Efetue as seguintes divisões e simplifique sempre que possível:

- a) $12 \div \frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$ c) $x \div \frac{a}{b}$ d) $\frac{p}{q} \div \frac{m}{n}$
- e) $\frac{a+3}{a-2}$ f) $\frac{x+y}{p} \div \frac{2x+2y}{5p}$ g) $\frac{4xy^2}{6x^2y}$ h) $\frac{x+xy}{x+xz}$
- i) $\frac{x^2-5x+xy-5y}{7x+7y}$ j) $(16x^6y^4) \div (0,5x^3yz^5)$ ℓ) $\frac{2y^2-10y}{y-5}$

Nos 4 primeiros itens, o desempenho de ambos os grupos foi muito bom. Entretanto, no item (e), onde pedíamos para resolver e simplificar, caso fosse possível, a expressão $\frac{a+3}{a-2}$, nenhum aluno conseguiu encontrar o caminho a seguir. Embora o grupo da turma 604 não tenha apresentado bom rendimento nos 5 últimos itens dessa questão, que envolve divisão de fração, por sua vez, o grupo dos novos não conseguiu resolver nenhum deles, confirmando a dificuldade que a mesma envolve. Em aulas posteriores trabalhamos as dificuldades que estes tipos de exercícios apresentam.

Quadro 7.7. Desempenho da Questão 4 – 8ª atividade

Questão 4 (turma 604-803)		Questão 4 (novos-803)	
a) Acerto	24 (89%)	a) Acerto	9 (90%)
Erro	3 (11%)	Erro	1 (100%)
b) Acerto	23 (85,19%)	b) Acerto	10 (100%)
Erro	4 (14,81%)	Erro	0
c) Acerto	25 (92,59%)	c) Acerto	10 (100%)
Erro:	2 (7,41%)	Erro:	0
d) Acerto:	25 (92,59%)	d) Acerto	10 (100%)
Erro	2 (7,41%)	Erro	0
e) Acerto	0	e) Acerto	0
Erro	27 (100%)	Erro	10 (100%)
f) Acerto	6 (22%)	f) Acerto	1 (10%)
Acerto parcial	12 (45%)	Acerto parcial	2 (20%)
Erro	9 (33%)	Erro	7 (70%)

g) Acerto	19 (70,4%)	g) Acerto	8 (80%)
Acerto parcial	4 (14,8%)	Acerto parcial	0
Erro	4 (14,8%)	Erro	2 (20%)
h) Acerto	0	h) Acerto	0
Acerto parcial	2 (7,41%)	Acerto parcial	0
Erro	25 (92,59%)	Erro	10
i) Acerto	2 (7,41%)	i) Acerto	0
Acerto parcial	0	Acerto parcial	0
Erro	25 (92,59%)	Erro	10 (100%)
j) Acerto	5 (18,5%)	j) Acerto	0
Acerto parcial	18 (66,7%)	Acerto parcial	0
Erro	4 (14,8%)	Erro	10 (100%)
l) Acerto	2 (7,41%)	l) Acerto	0
Acerto parcial	0	Acerto parcial	0
Erro	25(92,59%)	Erro	10 (100%)

A seguir, um exemplo:

Lucas Simões

4. Efetue as seguintes divisões e simplifique sempre que possível:

a) $12 \div \frac{1}{4} = \frac{12}{1} \cdot \frac{4}{1} = 48$

b) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{12}{3} = 4$

c) $\frac{x}{1} \div \frac{a}{b} = \frac{x}{1} \cdot \frac{b}{a} = \frac{bx}{a}$

d) $\frac{p}{q} \div \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = \frac{pn}{qm}$

e) $\frac{a+1}{a-2} \cdot (a-2) \cdot (a-2) = 45$

f) $\frac{x+y}{p} \div \frac{2x+2y}{5p} = \frac{x+y}{p} \cdot \frac{5p}{2x+2y} = \frac{5p(x+y)}{p(2x+2y)} = \frac{5(x+y)}{2(x+y)} = \frac{5}{2}$

g) $\frac{4xy^2}{6x^2y} \div \frac{(4y)}{(6x)} = \frac{4y}{6x}$

h) $\frac{x+xy}{x+xz} \div \frac{y(1+y)}{y(1+z)} = \frac{y}{z}$

i) $\frac{x^2-5x+xy-5y}{7x+7y} \div \frac{(x+y)(x-5)}{7(x+y)} = \frac{x-5}{7}$

j) $(4x^2y^4) \div (0,5x^2y^5) = 8x^0y^{-1} = \frac{8}{y}$

k) $\frac{2x^2-10x}{y-5} \div \frac{(x-5)}{(y-5)} = 2y$

Figura 7.112 –Teste - 2007 - 8ª atividade -4ª questão-LUCAS SIMÕES (4)

Este aluno acertou 9 dos 11 itens propostos. Tanto no item (e) como no item (h) efetua erradamente a simplificação dos termos, embora tenha fatorado o item (h), não conseguiu concluir corretamente a simplificação (Figura 7.112).

O 3º trimestre se iniciou em meados de setembro. Foram realizadas duas avaliações, um teste em dupla, que ocorreu em outubro e uma outra avaliação também em dupla, realizada em várias etapas, culminando em 14 de novembro. A seguir, dias depois, ainda em novembro, ocorreu a prova da 3ª Certificação que corresponde à Prova Única da Unidade Escolar. Os resultados obtidos, resumidos

no Quadro 7.8, apontaram o bom desempenho dos alunos da turma 803, principalmente daqueles alunos oriundos da 604 em 2006.

Quadro 7.8 - Desempenho dos alunos na Prova Única - 2007

	Resultados da Prova Única Turma-604-803	Resultados da Prova Única Turma-604-803	Resultados da Prova Única (novos-803)	Resultados da Prova Única (novos-803)
Ma: média da Prova Única (3º trimestre)	Número de alunos	% de alunos	Número de alunos	% de alunos
$Ma < 5$	3	10,7 %	4	40%
$5 \leq Ma < 7$	7	25 %	2	20%
$Ma \geq 7$	18	64,3 %	4	40%

Após a média da 3ª certificação é calculada a média anual do aluno. Caso obtenha média anual igual ou superior a 7,0 é aprovado. Dos alunos da antiga 604 tivemos um total de **14** alunos (50%) aprovados por média. Do grupo dos alunos novos tivemos **1** aluno (10%). Os demais alunos da turma se submeteram a Prova de Avaliação Final (PAF).

Esta prova foi elaborada com os seguintes conteúdos, tomando como referência o livro texto: (a) Retorno à Álgebra (cap.5); (b) Ângulos, Paralelas e Polígonos (cap.6); (c) cálculo Algébrico, incluindo Fatoração e Produtos Notáveis (cap. 11); (d) Áreas e Volumes (cap. 12); (e) Sistemas de Equações (cap. 13).

Mostramos a seguir a resolução de questões da Prova Única, ressaltando principalmente aquelas que envolvem cálculo aritmético e cálculo algébrico. Apresentaremos exemplos de alunos que apresentaram ao longo do ano, tanto de 2006 como de 2007, um crescimento em relação ao seu desempenho.

Questão 1 (1,0p.)

a) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:

Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

Danielle

Média: 8,4. Obs: Não creditado o 2º parâmetro

COLÉGIO PEDRO II - UNIDADE CENTRO
Prova de Matemática - 3º Trimestre 2007 - 8º Ano do EF
 Coordenadora: Ana Patrícia - Data: 21/11/2007
 Professoras: Eliana e Ana Patrícia

Nome: Danielle Dutra Soares N.º: 13 Turma: 203

Nota: 6,05/7,00 Para-
bens!

- Não é permitido o uso de calculadora, de papéis avulsos ou de qualquer material de consulta.
- Não serão aceitas respostas sem justificativa.
- As respostas devem vir sempre simplificadas.
- Seu trabalho pode ser feito a lápis, mas as respostas devem estar a caneta.
- Não é permitido o uso de corretivo.

Questão 1 - (1,0p.)
 a) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$2x = 2(5 - 3y)$
 $2x = 10 - 6y$
 $R: x = -1, y = 2$

$10 - 6y - y = -4$
 $-7y = -4 - 10$
 $-7y = -14$
 $-y = (-14) \div (-7) = 2$
 $-y = 2$

$2x - 2 = -4$
 $2x = -4 + 2$
 $2x = -2$
 $x = -1$

b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:
 Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

$33 = n.º \text{ de alunos}$
 $X = \text{meninas} = 15$
 $Y = \text{meninos} = 18$
 $12 = \text{a diferença}$

$\begin{cases} X + Y = 33 \\ 2X - Y = 12 \end{cases}$
 $\frac{3X = 45}{X = 45 \div 3 = 15}$
 $X = 15$

$\begin{cases} 15 + Y = 33 \\ Y = 33 - 15 \\ Y = 18 \end{cases}$
 P.R.
 $(2 \cdot 15) - 12 =$
 $30 - 12 = 12$

R: há na classe 15 meninas e 18 meninos

Figura 7.113 – Prova Única – 2007 - 1ª questão – DANIELLE (1)

Observamos na Figura 7.113, o quanto esta aluna melhorou seu raciocínio algébrico. Tanto no item (a) quanto no item (b), constatamos que consegue resolver os sistemas propostos, trabalhando com segurança com termos semelhantes e os sinais operatórios. Em ambos, os itens atingem os objetivos estabelecidos. Alcançou nesta avaliação nota 6,05 em 7,0.

Marina

Questão 1 - (1,0p.)
a) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 2x - y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ 0 + 7y = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y = 5 \quad (2) \\ 2x - y = -4 \quad (-1) \end{cases}$

$\begin{cases} 5x + 6y = 10 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 2 = -4 \\ 2x = -4 + 2 \\ 2x = -2 \\ x = \frac{-2}{2} \\ x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} -2 - z = -4 \\ -1 = 5 - 6 \\ -1 = 5 - 6 \end{cases}$

$R: y = 2$
 $x = -1$

b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:
Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

$y = \text{meninas}$ $x = \text{meninos}$

$\begin{cases} y + x = 33 \quad (2) \\ 2y - x = 12 \quad (-1) \end{cases}$

$\begin{cases} 2y + 2x = 66 \\ -2y + x = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x = 54 \\ x = \frac{54}{3} \\ x = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} y + 18 = 33 \\ y = 33 - 18 \\ y = 15 \end{cases}$

$R: x = 18 \text{ (meninos)} \\ y = 15 \text{ (meninas)}$

Figura 7.114 – Prova Única - 2007- 1ª questão – MARINA (1)

Outra aluna que também não havia conseguido passar por média em 2006. A partir de 2007, foi melhorando seu desempenho a tal ponto que concluiu o ano letivo de 2007 sendo aprovada por média. Observamos que tanto no item (a) como no (b) consegue desenvolver os dois itens que envolvem cálculos algébricos com segurança. Nesta prova de valor máximo 7,0 alcançou um total de 6,0 pontos. (Figura 7.114)

Tayná

Questão 1 - (1,0p.)
a) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$\begin{cases} 2(5 - 3y) - y = -4 \\ 10 - 6y - y = -4 \\ -7y = -14 \\ y = \frac{-14}{-7} \\ y = 2 \end{cases}$

$R: x = -1$
 $y = 2$

b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:
Numa classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

$\begin{cases} x + y = 33 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 33 - y \\ 2(33 - y) - y = 12 \\ 66 - 2y - y = 12 \\ 66 - 3y = 12 \\ -3y = 12 - 66 \\ -3y = -54 \\ y = \frac{-54}{-3} \\ y = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 18 = 33 \\ x = 33 - 18 \\ x = 15 \end{cases}$

$R: x = 15$
 $y = 18$

Figura 7.115 – Prova Única - 2007- 1ª questão – TAYNÁ (1)

Esta aluna também não havia conseguido passar por média em 2006. Agora em 2007, teve um excelente desempenho. Podemos observar que tanto no item (a) como no (b) consegue desenvolver os dois itens que envolvem cálculo algébrico com segurança. É bom observar que esta aluna numa prova que valia 7,0, conseguiu 5,5 (Figura 7.115).

Virgínia

Questão 1 - (1,0p.)
a) Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3(2x - y) = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 6x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$7x = -7$$

$$x = \frac{-7}{7} = -1$$

$$-2 - y = -4$$

$$-y = -4 + 2$$

$$-y = -2$$

$$y = 2$$

$$R.: x = -1$$

$$y = 2$$

b) Escreva o seguinte problema como equações com duas incógnitas e, a seguir, resolva o sistema:
 Num classe há 33 alunos e a diferença entre o dobro do número de meninas e o número de meninos é 12. Quantas meninas e quantos meninos há na classe?

$$\begin{cases} x + y = 33 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

$$3x = 45$$

$$x = 15$$

$$15 + y = 33$$

$$y = 33 - 15$$

$$y = 18$$

$$R.: x = 15$$

$$y = 18$$

Figura 7.116 – Prova Única - 2007- 1ª questão – VIRGÍNIA (1)

Esta aluna durante o ano letivo de 2006 não apresentou um bom desempenho. Em 2007, continuou sendo uma aluna regular, porém, nesta prova única, embora tenha obtido nota 4,95 em 7,0, avançou no raciocínio algébrico, como podemos ver na 1ª questão da figura (Figura 7.116)

Questão 2		(1,5p.)
Calcule:		
a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + (8,333\dots)^0 - (-2)^5$	b) $\frac{6^6 \cdot 6^{-7} \cdot 6^4}{6^2}$	c) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{0,027}$

Marina

Questão 2 - (1,5p.) Calcule:

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + (8,333\dots)^0 - (-2)^3 =$
 $\frac{25}{16} + 1 - (-32) =$
 $\frac{25}{16} + 1 + 32 =$
 $\frac{25}{16} + \frac{32}{1} =$
 $\frac{25}{16} + \frac{512}{16} = \frac{537}{16}$

b) $\frac{6^6 \cdot 6^{-3} \cdot 6^4}{6^2} = \frac{6^7}{6^2} = 6^5 = 6^1 = 6$

c) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{0,027} =$
 $2 - 0,3 = 1,7$

Figura 7.117 – Prova Única - 2007- 2ª questão – MARINA (2)

Esta aluna veio melhorando seu desempenho, não apenas no cálculo algébrico, mas, também em relação ao raciocínio aritmético (Figura 7.117).

Tayná

Questão 2 - (1,5p.) Calcule:

a) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + (8,333\dots)^0 - (-2)^3 =$
 $\frac{25}{16} + 1 - (-32) =$
 $\frac{25}{16} + 1 + 32 = \frac{25}{16} + \frac{16}{16} + \frac{512}{16} = \frac{553}{16}$

b) $\frac{6^6 \cdot 6^{-3} \cdot 6^4}{6^2} = \frac{6^7}{6^2} = 6^5 = 6$

c) $\sqrt[4]{16} - \sqrt[4]{0,027} =$
 $2 - 0,3 = 1,7$
 $4 \cdot 4 = 16$
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Figura 7.118 – Prova Única - 2007- 2ª questão – TAYNÁ (2)

Mais uma vez comprova, agora em relação ao cálculo aritmético, como seu desempenho continuou a melhorar, obtendo os pontos integrais dessa questão (Figura 7.118).

Questão 6

Calcule:

a) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{1}{9} =$

b) $(15m^2n) \div (9m^2) =$

c) $(2x - 5)(1 + 2x)^2 =$

Danielle

Questão 6 (0,6p.) Calcule:

a) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{1}{9} =$
 $\frac{12a + 3 - 9a - 2}{18} =$
 $\frac{3a + 1}{18} = 3a + 1$ (marked incorrect with a red X)

b) $(15m^2n) + (9m^2) =$
 $\frac{15m^2n}{9m^2} = \frac{5n}{3}$

c) $(2x-5)(1+2x)^2 =$
 $(2x-5)(1+4x+4x^2) =$
 $2x + 8x^2 + 8x^3 - 5 - 20x - 20x^2 =$
 $-12x^2 + 8x^3 - 5 - 18x$

Figura 7.119 – Prova Única – 2007 - 6ª questão – DANIELLE (6)

Embora, não tenha concluído corretamente o item (a), observamos que acerta a simplificação no item (b) e, em relação ao item (c) consegue desenvolver o produto notável e efetuando a seguir a propriedade distributiva (Figura 7.119).

Mayra

Questão 6 (0,6p.) Calcule:

a) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} - \frac{1}{9} =$
 $\frac{12a + 3 - 9a - 2}{18} =$
 $\frac{3a + 1}{18}$ (boxed as R: $\frac{3a+1}{18}$)

b) $(15m^2n) + (9m^2) =$
 $\frac{15m^2n}{9m^2} = \frac{5n}{3}$ (boxed as R: $\frac{5n}{3}$)

c) $(2x-5)(1+2x)^2 =$
 $(2x-5)(1+4x+4x^2) =$
 $2x + 8x^2 + 8x^3 - 5 - 20x - 20x^2 =$
 $-12x^2 + 8x^3 - 5 - 18x$ (boxed as R: $-12x^2 + 8x^3 - 5 - 18x$)

Figura 7.120 – Prova Única – 2007 - 6ª questão – MAYRA (6)

Conseguiu resolver todos os itens das questões envolvidas em cálculo algébrico. No item (a) foi capaz de reduzir ao mesmo denominador e, trabalhou corretamente com termos semelhantes. Por sua vez, no item (c), trabalha com segurança com produtos notáveis e emprega a seguir a propriedade distributiva. (Figura 7.120)

Questão 7

(0,9p.)

- a) Fatore completamente e simplifique ao máximo $\frac{2x^3 + 2x^2y}{6x^2 + 6xy} =$
- b) Fatore completamente $16x^3y - 16x^2y^2 + 4xy^3 =$
- c) Resolva a equação $(3x + 2)^2 - 5x(2x - 1) = 2 - x^2$

A seguir mostraremos exemplos relevantes ao nosso estudo.

Danielle

Questão 7 - (0,9p.):

a) Fatore completamente e simplifique ao máximo $\frac{2x^3 + 2x^2y}{6x^2 + 6xy} = \frac{2x^2(x+y)}{6x(x+y)} \cdot \frac{2x^2}{6x} = \frac{x^2}{3x} = ?$

b) Fatore completamente $16x^3y - 16x^2y^2 + 4xy^3 = 4xy(4x^2 - 4xy + y^2) = 4xy(2x - y)^2$

c) Resolva a equação $(3x + 2)^2 - 5x(2x - 1) = 2 - x^2$

$$\begin{aligned}
 9x^2 + 12x + 4 - 5x^2 + 5x &= 2 - x^2 \\
 9x^2 + 12x - 5x^2 + 5x + x^2 &= 2 - 4 \\
 12x + 5x &= 2 - 4 \\
 17x &= -2 \\
 x &= \frac{-2}{17}
 \end{aligned}$$

$(3x + 2)(3x + 2)$
 $9x^2 + 6x + 6x + 4$

Figura 7.121 – Prova Única – 2007 - 7ª questão – DANIELLE (7)

No item (a) não simplificou completamente a expressão algébrica como era pedido. Entretanto, no item (b), fatora, identifica o produto notável, porém troca o sinal. E, no item (c), usa corretamente produtos notáveis, além de trabalhar com termos semelhantes, e finalmente resolve equação (Figura 7.121).

Lauani

Questão 7 - (0,8p.):

a) Fatore completamente e simplifique ao máximo $\frac{2x^3 + 2x^2y}{6x^2 + 6xy} =$
 $\frac{2x^2(x+y)}{6x(x+y)} = (x+y) \div (2x^2+6x)$
 ~~$R. (x+y) \div (2x^2+6x)$~~

b) Fatore completamente $16x^3y - 16x^2y^2 + 4xy^3 =$
 $4xy(4x^2 - 4xy + y^2) =$
 $4xy(2x - y)^2$ $R. 4xy(2x - y)^2$

c) Resolva a equação $(3x+2)^2 - 5x(2x-1) = 2 - x^2$
 $9x^2 + 12x + 4 - 10x^2 + 5x = 2 - x^2$
 $4x^2 + 12x - 10x + 5x + x^2 = 2 - 4$
 $10x^2 + 7x = -2$
 $10x^2 + x = \frac{-2}{-2}$
 $11x^2 = \frac{2}{-2}$
 $x^2 = \frac{2}{-2} \div \frac{11}{1}$
 $x^2 = \frac{2}{-2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{-22}$
 $x = \sqrt{\frac{1}{-22}}$

$R. \sqrt{\frac{1}{-22}} = x$

Figura 7.122 – Prova Única - 2007- 7ª questão – LAUANI (7)

Esta aluna pertence ao grupo dos alunos que apresentaram um desempenho regular tanto em 2006 quanto em 2007. No item (a) a aluna não conclui a simplificação. Entretanto, no item (b) observamos que consegue fatorar, identificar o produto notável e concluir corretamente. No item (c), mais uma vez desenvolve corretamente o produto notável, porém ao aplicar a propriedade distributiva esquece de colocar a potência do termo $(-10x^2)$. Carrega o erro e conclui a partir desse resultado (Figura 7.122)

Marina

Questão 7 - (0,9p.):

a) Fatore completamente e simplifique ao máximo $\frac{2x^3 + 2x^2y}{6x^2 + 6xy} = \frac{2x^2(x+y)}{6x(x+y)} = \frac{2x^2}{6x} = \frac{x}{3}$

b) Fatore completamente $16x^3y - 16x^2y^2 + 4xy^3 = 4xy(4x^2 - 4xy + y^2) = ?$

c) Resolva a equação $(3x+2)^2 - 5x(2x-1) = 2-x^2$

$$\begin{aligned}
 9x^2 + 12x + 4 - 10x^2 + 5x &= 2 - x^2 \\
 -x^2 + 17x + 4 &= 2 - x^2 \\
 -x^2 + 17x + 4 &= 2 - x^2 \\
 17x + 4 &= 2 - x^2 + x^2 \\
 17x + 4 &= 2 \\
 17x &= 2 - 4 \\
 17x &= -2 \\
 x &= \frac{-2}{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2x+2)(2x+2) &= \\
 4x^2 + 8x + 4x + 4 &= \\
 4x^2 + 12x + 4 &=
 \end{aligned}$$

Figura 7.123 – Prova Única – 2007 - 7ª questão – MARINA (7)

Nesta questão item (a) fatora a expressão algébrica como é pedido, porém, não completa a simplificação. No item(b) fatora parte da expressão, porém, não conclui esta fatoração e, portanto, não chega ao resultado final. Entretanto, no item (c), consegue resolver corretamente a equação (Figura 7.123).

Em dezembro ocorreu a última avaliação do ano letivo de 2007, Prova de Avaliação Final, com um total de **23** alunos, desses 14 eram remanescentes da 604. Nesta prova (PAF) tivemos uma taxa de desempenho bom. No quadro abaixo podemos observar o desempenho de ambos os grupos.

Quadro 7.9. Desempenho dos alunos na Prova de Avaliação Final

	Resultados da Prova de avaliação final Turma-604-803	Resultados da Prova de avaliação final Turma-604-803	Resultados da Prova de avaliação final (novos-803)	Resultados da Prova de avaliação final (novos-803)
Ma: média da prova final	Número de alunos	% de alunos	Número de alunos	% de alunos
Ma < 5	2	14 %	1	11%
5 ≤ Ma < 7	8	57 %	8	89%
Ma ≥ 7	4	29 %	0	0%

O desempenho final dos alunos ao término do ano letivo de 2007 da turma 803 ficou da seguinte forma:

Total de alunos aprovados: 31;

Total de alunos aprovados por COC: 6

Total de alunos reprovados: 1

No capítulo seguinte são mostrados os gráficos indicando o desempenho comparativo de ambos os grupos, isto é, os oriundos da turma 604 e os outros 10 alunos que vieram compor a turma 803.

Para analisar de forma sistemática a evolução constatada pontualmente ao longo destes 3 últimos capítulos, dividimos os alunos em grupos de desempenho distinto. O primeiro grupo ficou formado pelos alunos que apresentaram um bom desempenho em 2006 e conseguiram ao final desse ano passar por média. Esses alunos apresentaram um excelente desempenho em 2007 e, como consequência, foram novamente aprovados por média. (Ana Paula, Camila, Daniel, Ingrid, Lucas Simões, Mayra, Thayane e Priscila entre outros). Um segundo grupo identificado foi aquele formado pelos alunos que mostraram dificuldades no aprendizado em 2006 e ao longo do ano foram superando estas dificuldades, de modo a conseguirem no final desse ano letivo aprovação por média. Em 2007 mantiveram seu bom desempenho e no final conseguiram também ser aprovados por média. (Danielle e Laleska). Um terceiro grupo, ao final de 2006 foi aprovado mediante prova final (PAF) e, conseguiu ao longo do ano de 2007 melhorar seu desempenho de tal forma que, no final deste ano letivo, conseguiu passar por média (Tayná, Marina). Identificamos depois um quarto grupo com características bem definidas, formado por alunos que não passaram por média nem em 2006 nem em 2007 sendo aprovados após a PAF, como por exemplo, podemos citar, Virginia. Além destes alunos analisamos separadamente os alunos da turma 803 de 2007 não oriundos da turma 604 de 2006. Uma do grupo, Yasmin passou por média; os outros nove passaram ou por Prova de Avaliação Final ou por decisão do Conselho de Classe. Destacamos ainda que alguns resultados de alunos do primeiro grupo permitem deixar mais claro alguns pontos que mostram que a metodologia experimentada efetivamente contribui para a solução de problemas mais difíceis.

Ana Paula

2006				2007			
1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	Média	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	Média
8,0	9,5	9,3	9,0	6,7	7,9	7,9	7,5

Ana Paula, oriunda de escola particular, apresentou um excelente desempenho, tanto em 2006 quanto em 2007. Verificamos que se destacou em questões envolvendo o conceito de fração, como também em unidade de medida na reta numérica, reconhecimento de fração como número, representação correta de fração na reta numérica: operou corretamente com números inteiros e fracionários, identificou a unidade a ser considerada dependendo do problema a que se refere. Conseguiu lidar com grandezas proporcionais. Alcançou na Prova Única de 2006, nota 8,7 em 10. Terminou este ano letivo de 2006 com média 9,0. Ao final de 2007, esta aluna concluiu o ano letivo com média 7,5.

Camila

2006				2007			
1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	Média	1º Trimestre	2º Trimestre	3º Trimestre	Média
8,5	10	9,5	8,8	6,9	8,5	8,5	8,0

Camila, oriunda de escola particular, é outra aluna que também teve um desempenho muito bom tanto em 2006 quanto em 2007. Entre outras questões, podemos destacar a 1ª questão da prova de 21/7, 1ª certificação, que tratava de identificar frações equivalentes e sua representação na reta numérica, desenvolvida corretamente. Em outras avaliações trabalhou, também de forma correta, com as operações de números inteiros e fracionários. Por sua vez, nas 3ª e a 4ª questões da 2ª certificação, em 22/09, trabalhou com segurança com números decimais. Na Prova Única de 2006, pudemos observar a 7ª questão, que tratou da resolução de equações, desenvolvida pela aluna utilizando a idéia de equilíbrio entre os dois membros. Sua média nesta prova foi 8,25 em 10. Em 2007, continuou apresentando em excelente desempenho. Em vários desenvolvimentos aplicou corretamente a propriedade distributiva e trabalhou com generalizações. Terminou o ano letivo de 2006 com média 8,8. Em 2007, terminou o ano letivo com média 8,0.

Daniel

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
8,0	10	9,5	8,7	6,4	7,8	7,3	7,2

Daniel, aluno oriundo de escola pública, foi um dos alunos que apresentou um dos melhores desempenhos, principalmente no raciocínio que utilizou em cada questão proposta e, na forma de descrever cada um desses desenvolvimentos, tanto em 2006 quanto em 2007. Quando começamos o ano em 2006, por ocasião da aplicação do 1º teste diagnóstico, este aluno apresentou dificuldades em completar a 2ª parte da 1ª questão, na qual era necessário identificar a unidade em dois momentos diferentes e resolver o problema proposto. Entretanto, o 2º teste, mostrou como seu desempenho foi melhorando. Ao longo do ano letivo, à medida que a pesquisa se desenvolvia foi mostrando seu potencial. Outra etapa que apontou seu excelente desempenho foi, no teste de 12/05, identificar com clareza fração como número, além de representar corretamente na reta numérica, assim como com unidades não usuais, o círculo e o quadrado. Na Prova Única de 2006, mostrou que sabia estabelecer a correspondência entre as grandezas proporcionais envolvidas, fazendo a redução à unidade de medida. Completando a descrição do desempenho deste aluno, destacamos como, também na Prova Única, trabalhou a resolução de equações, usando com clareza e segurança a idéia de equilíbrio e mostrou dominar perfeitamente o conceito proporcionalidade. Obteve nota 9,35 numa prova cujo valor máximo era 10. Em 2006, terminou o período letivo com média 8,7 e, em 2007, terminou o ano letivo com média 7,2.

Ingrid

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
9,0	10	10	9,7	8,4	7,3	9,1	8,3

Ingrid, também é oriunda de uma escola pública. Quando comparamos os dois testes diagnósticos, podemos observar já a diferença que apresentou do 1º para o 2º teste. À medida que fomos caminhando em 2006, esta aluna cada vez mais foi mostrando melhor desempenho, como vimos no capítulo anterior. Mais adiante, vemos como trabalhou com familiaridade com unidades de medidas não usuais e sua desenvoltura em trabalhar com números inteiros e fracionários. Terminou o ano letivo de 2006 com média 9,7. Apresentou também excelente desempenho em 2007 e terminou o ano letivo com média 8,3.

Lucas Simões

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
7,5	9	10	8,9	8,6	7,6	8,9	8,2

Lucas Simões, oriundo de escola particular, apresentou um excelente desempenho tanto em 2006 como em 2007. No 1º teste diagnóstico verificamos que ainda não estava seguro em trabalhar com frações equivalentes, porém no 2º teste resolveu com segurança o que não havia conseguido realizar no teste anterior. À medida que caminhamos com os conteúdos programáticos estabelecidos para 2006, em cada avaliação este aluno foi demonstrando maior segurança. Pudemos constatar este fato, primeiro, em relação à representação de fração na reta numérica e no trabalho com expressões aritméticas. Quando atingimos a Prova Única de 2006, verificamos que seu desempenho cada vez ficou melhor, quer se tratando de proporcionalidade, quer se tratando de unidades de medidas de capacidade. Ainda nesta avaliação, na questão referente a equação, continuou a resolver com segurança. Quando foi tratada a culminância dos conteúdos estabelecidos para levar a bom termo a nossa proposta pedagógica, este aluno continuou respondendo satisfatoriamente ao que foi proposto. Terminou o ano letivo de 2006 com média final de 8,9, enquanto a média final do ano letivo de 2007 foi de 8,2.

Mayra

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
7,5	9,0	9,0	8,6	6,4	6,3	8,0	7,0

Outro exemplo deste grupo é a aluna Mayra, cuja origem é uma outra escola pública municipal. Ao longo desses dois anos, mostrou ser capaz de superar as dificuldades iniciais e por seu esforço conseguiu tanto em 2006 como em 2007 passar por média. Em relação ao primeiro teste diagnóstico, na 1ª questão, explicou em linguagem corrente cada uma das etapas da busca da unidade a ser considerada, primeiro levando em conta a parte hachurada e depois o disco inteiro. Já no 2º teste usou a forma icônica e linguagem informal. Observamos que avançou no sentido de identificar a unidade de medida considerada, como também

a representação correta de uma fração na reta numérica. Outro indicativo, mais adiante, do seu bom desempenho no campo algébrico foi a 1ª prova trimestral de 2006. Tanto na 4ª questão quanto na 5ª questão desta prova, vimos que apropriou a idéia de “generalização”. Alcança, nesta avaliação média 9,0 em 10. Ao final de 2006 sua média final é de 8,6. Finaliza o ano letivo de 2007 com média final 7,0.

Priscila

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
7,5	9,5	10	9,1	9,1	8,5	9,0	8,9

Priscila, oriunda de escola particular, não apresentou, no início da aplicação dos testes diagnósticos, intimidade com a unidade de medida. Entretanto, pouco a pouco, foi absorvendo o conteúdo ministrado. Na 2ª questão do 1º teste, tanto quanto no 2º na questão correspondente, utiliza a forma procedimental e executa corretamente a operação solicitada. Na 6ª questão do 1º teste diagnóstico, na 2ª etapa, confundiu o raciocínio multiplicativo com o aditivo; entretanto, na questão correspondente do 2º teste conseguiu resolver corretamente, mostrando ter aprendido este conceito. À medida que caminhamos no ano letivo de 2006, essa aluna vai se firmando nos conteúdos ministrados. Quando da aplicação de exercícios envolvendo proporcionalidade, confirma esta percepção ao desenvolver corretamente a 5ª questão da Prova Única de 2006, questão que envolveu os conteúdos de fração e suas respectivas operações, frações equivalentes e proporcionalidade, além de trabalhar com medida de capacidade. Terminou o ano letivo de 2006 com média 9,1. Em 2007, ao longo de todo ano letivo suas médias trimestrais são respectivamente, 9,1; 8,5 e 9,0. Sua média final é 8,9.

Thayane

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
8,0	9,0	10	9,1	9,2	7,7	8,0	8,3

Outra aluna que merece destaque é Thayane, também oriunda de escola pública, que mostrou desde o 1º teste diagnóstico e confirmou no 2º teste, saber trabalhar na busca da unidade. Reconheceu fração como número, representou corretamente uma fração na reta numérica, identificando sua localização. Em questões nas quais era necessário operar com os números decimais, o faz corretamente, além de identificar regras e padrões também envolvendo números

decimais. No teste de 30/10/2006, na 5ª questão envolvendo proporcionalidade, percebeu corretamente o fator de proporcionalidade, além de conter outros conteúdos que foram indicados por nós como importantes para o bom desempenho no campo algébrico. Por sua vez, na 15ª questão deste mesmo teste, envolvendo operações com números inteiros, em doze itens errou apenas um. Na Prova Única, observa-se que soube aplicar a propriedade distributiva e operar com expressões algébricas. Como resultado final, nesta prova, alcançou média 9,6. Terminou este ano letivo com média final de 9,1. Mais uma vez, verificamos que o bom desempenho em questões envolvendo os conceitos de fração como ponto na reta numérica, reconhecimento da fração como número, saber trabalhar com frações equivalentes, resultou em um excelente desempenho quando passamos a trabalhar com expressões algébricas. Em 2007, terminou o ano com média final 8,3.

Danielle

2006				2007			
1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média	1º TRI	2º TRI	3º TRI	Média
6,5	7,0	7,4	7,0	7,0	7,1	8,4	7,7

As respostas de uma aluna do segundo grupo, Danielle, aluna oriunda de escola pública, também evidenciam claramente o desenvolvimento da aprendizagem. Logo que iniciamos o ano de 2006, no 1º teste diagnóstico identificou a unidade, porém não conseguiu trabalhar com frações equivalentes. No 2º teste, em 2007, já se mostra capaz de identificar frações equivalentes. No 1º teste diagnóstico, mostra que ainda não domina o conceito de fração equivalente, mas, quando chega ao 2º teste, observamos que resolveu corretamente e com segurança os itens relativos ao mesmo conceito. Utiliza a forma icônica para justificar cada item e complementa com cálculos para indicar a solução.

Na análise das avaliações desempenho, verificamos que não começou bem o ano letivo de 2006. No 1º teste individual em maio de 2006, obteve nota 2,0 em 10. Mesmo assim, Danielle, na 2ª questão desse teste, conseguiu representar na reta numérica a fração $\frac{459}{230}$ corretamente, mostrando que dera mais um passo no sentido de reconhecer fração como número. O período que seguiu foi de turbulência no Colégio, com paralisações e greves. Várias listas de problemas e exercícios foram oferecidas durante o período de greve. Esta aluna compareceu

sempre para receber estas listas. Já na 1ª prova trimestral, 21/7, foi se sentindo mais segura e conseguiu nesta avaliação, nota 6,75 em 10. Participou de encontros de monitoria, e por ocasião do teste em dupla conseguiu melhorar seu desempenho. Na 2ª certificação, prova de 22/09, Danielle marcou os números, quer decimais ou fracionários, na reta numérica, identificando sua posição. Na 3ª certificação de 2006, identificamos também a evolução dessa aluna, observando ter sido capaz de trabalhar com proporcionalidade e unidades de capacidade. Concluiu o ano letivo de 2006 com média 7,0. Ao longo do ano de 2007, ficou a cada trimestre evidenciado como seu desempenho foi melhorando, concluindo o ano letivo com média final de 7,7.

Laleska

2006				2007			
1º TRI 7,0	2º TRI 9,0	3º TRI 8,7	Média 8,3	1º TRI 7,4	2º TRI 6,9	3º TRI 9,2	Média 8,0

Laleska, aluna oriunda de escola pública, quando iniciamos a aplicação do 1º teste diagnóstico, usava representações incorretas para indicar a divisão entre frações. No 2º teste ainda não conseguia representar satisfatoriamente seu pensamento. Entretanto, mais adiante, conseguiu trabalhar com a transformação de fração para a representação decimal. Esta aluna concluiu o ano letivo de 2006 com média final de 8,3 e, em relação ao ano letivo de 2007 sua média final foi de 8,0.

Virgínia

2006				2007			
1º TRI 5,5	2º TRI 7,0	3º TRI 6,0	Média 5,6	1º TRI 4,9	2º TRI 6,5	3º TRI 7,6	Média 6,4

No quarto grupo, com características bem definidas, formado por alunos que não passaram por média nem em 2006 nem em 2007, podemos citar a aluna Virgínia. Seu desempenho durante este período pode ser classificado como regular. Veio transferida de um colégio particular para o Colégio Pedro II por Mandado de Segurança. Ao final do ano letivo de 2006, concluiu o mesmo com média final de 5,6. No decorrer de 2007, como vimos acima, conseguiu trabalhar com sucesso questões que tratavam de abstração, bem como desenvolveu corretamente questões envolvendo cálculos algébricos. Na 3ª certificação de 2007

conseguiu alcançar média 7,6. Foi para a Prova de Avaliação Final (PAF) e terminou o ano letivo com média 6,4.

Nossa pesquisa, a partir da constatação de K. Hart e H. Wu da importância de o aluno conceituar a fração como número, empregou consistentemente a representação da fração na reta numérica. Ao mesmo tempo, na reta numérica, percebemos que fica mais fácil a identificação da unidade de referência e da sua importância na determinação do valor da fração. A análise desenvolvida neste capítulo mostrou que tanto os alunos dos grupos de pior desempenho inicial quanto os outros, todos se beneficiaram dessa construção, que lhes permitiu usar com segurança crescente as noções de frações equivalentes e proporcionalidade.

Na prova da 3ª certificação de 2007 pudemos destacar alunos que tendo apreendido o conceito de fração como número e, conseqüentemente a importância da unidade de medida de referência, souberam trabalhar com frações equivalentes. Os alunos do grupo da turma 803 que não provinham da antiga 604 encontraram maiores dificuldades. Gradativamente, foram melhorando, à medida que adquiriram segurança no uso do conceito de fração. Entretanto, seu desempenho em álgebra foi como os dos alunos dos outros grupos, melhor do que aquele que estamos acostumados a observar nesta série.