

### 3 CAMINHOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa se originou, como já destacado na Introdução, da angústia provocada tanto nos professores quanto nos alunos pelas dificuldades encontradas por estes na fase de introdução dos conceitos algébricos, nas 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> séries do Ensino Fundamental.

Professora regente do Colégio Pedro II, desde a década de 70, trabalhava com o Ensino Básico e, principalmente, com turmas do Ensino Médio. Anos mais tarde, sendo Coordenadora de Disciplina, passei a me envolver com turmas do Ensino Fundamental. Foi possível detectar, através de quadros estatísticos apresentados pelo Serviço de Supervisão e Orientação Pedagógica (SESOP) do Colégio, que nas séries 7<sup>a</sup> e 8<sup>a</sup> o índice de reprovação estava além do limite suportável estabelecido pelo Colégio, de 20%. Mais tarde, assumindo a Chefia do Departamento de Matemática da instituição, verifiquei que, de um modo geral, este quadro se repetia nas demais Unidades. O que fazer para resolver esta situação, ou pelo menos minimizá-la?

Tentamos soluções isoladas nas séries referidas e até conseguíamos alguns resultados positivos, mas eram soluções paliativas. Tempos depois, após várias leituras, já tendo iniciado o doutorado, deparei com trabalhos em que o matemático H. Wu, da Universidade da Califórnia, Berkeley, apresentava algumas propostas para lidar com essas dificuldades. Com a leitura desses trabalhos, meu desafio tornou-se colocá-las em prática na sala de aula. As outras fontes citadas no capítulo anterior vieram então juntar-se a essa.

A proposta de trabalho básica de Wu consiste em aproveitar o ensino do conteúdo de fração como medida de comprimento de segmento de reta para conduzir o aluno à compreensão da fração como número, levando-o naturalmente a perceber as restrições do conjunto dos números inteiros e como as frações estendem o sistema numérico. Nesse processo de generalização, confia-se que o aluno vai desenvolvendo a capacidade de abstração necessária nas etapas seguintes da aprendizagem de Matemática. Dessa forma, nossa premissa é que o

conceito de frações, assim colocado, se constitui como um facilitador nesta construção.

Nessa perspectiva, propus-me a investigar as seguintes questões:

1. É possível verificar que se o aluno consegue construir o conceito de fração como número usando a reta numérica e a generalização de padrões numéricos, então consegue dar o salto para a representação simbólica, chegando à abstração?
2. A introdução ao campo algébrico é realizada com mais facilidade quando o conceito de fração é trabalhado como número usando a reta numérica?
3. O trabalho de construção de fração como número usando a reta numérica pode influenciar positivamente no desempenho global do aluno em Matemática?

Um dos primeiros passos a ser dado para colocar em prática esta nova abordagem era a escolha da série onde melhor pudéssemos introduzir este conceito. O desafio seguinte foi conciliar a proposta curricular do Departamento Pedagógico de Matemática, inserida no Projeto Político Pedagógico do Colégio<sup>1</sup>, com a do projeto inovador, uma vez que, ao final do ano letivo, os alunos são submetidos a uma prova única, por disciplina, na Unidade Escolar. Nossa escolha recaiu na antiga 6ª série, na qual os baixos índices de aprovação estavam aliados ao fato de ser essa a série, segundo a nossa programação, onde se inicia o trabalho envolvendo termo desconhecido e os conceitos de variável e incógnita.

Passamos, então, a planejar essa experiência pedagógica. Para essa etapa, nos apoiamos nos princípios da avaliação iluminativa, cuja principal preocupação prende-se à descrição e a interpretação em lugar da mensuração e da predição. Os objetivos da avaliação iluminativa são os de estudar programas inovadores, com as seguintes características:

- Como este funciona;
- Como é influenciado pelas diversas situações escolares nas quais é aplicado;

---

<sup>1</sup> Projeto Político Pedagógico (PPP): Este documento representa a expressão de um processo democrático de discussão e elaboração, após terem sido ouvidas as vozes de todos os segmentos da comunidade do Colégio Pedro II presentes às reuniões.

- Quais as suas vantagens e desvantagens na opinião de seus principais interessados; e,
- Quais condições mais afetam as tarefas intelectuais e as experiências acadêmicas dos alunos.

Este desenho metodológico afinou muito bem com a pesquisa que queríamos desenvolver, pelo fato de ela ser avaliativa de uma proposta de ensino não usual.

### 3.1. A instituição

O Colégio Pedro II tem uma tradição de paradigma da escola pública de massa e de boa qualidade. Essa tradição está assentada em uma atenção aos conteúdos programáticos, especialmente na área da Matemática, iniciada por Euclides Roxo.

Euclides Roxo foi um ardoroso reformador do Ensino da Matemática no Brasil, tendo colaborado nas Reformas Francisco Campos<sup>2</sup> e Gustavo Capanema<sup>3</sup>. Introduziu em ambas os métodos que sempre preconizou e que estão contidos em seu livro “**A Matemática na Escola Secundária**”<sup>4</sup> (1937). Neste livro, Capítulo VII, aponta a necessidade da conexão entre as várias partes da Matemática e entre esta e as outras disciplinas do curso, destacando em particular, o ensino paralelo da aritmética, da álgebra e da geometria.

Pertencia a várias associações culturais, entre as quais a Associação Brasileira de Educação (ABE). Foi Presidente da Comissão Nacional do Livro Didático<sup>5</sup>. Frutos desse trabalho, encontramos várias obras no campo da Matemática, do Prof. Euclides Roxo, bem como alguns trabalhos de contribuição à solução dos nossos problemas de ensino. Dentre as obras de Roxo, podemos

---

<sup>2</sup> Reforma Francisco Campos, 14 de abril de 1932: Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário.

<sup>3</sup> Reforma Gustavo Capanema, 9 de abril de 1942: Por essa Lei, foram instituídos no ensino secundário um primeiro ciclo de quatro anos de duração, denominado ginásial, e um segundo ciclo de três anos.

<sup>4</sup> “A Matemática na Educação Secundária”: Euclides de Medeiros Guimarães Roxo – Catedrático de Matemática do Colégio Pedro II. Biblioteca Pedagógica Brasileira - Atualidades Pedagógicas – Série 3ª, vol. 25 Edições da Companhia Editora Nacional - São Paulo, 1937.

destacar: “**Lições de Arithmetica**”<sup>6</sup>, 1924. Este livro de Matemática elementar, mostra desde seu início a constante preocupação de Euclides Roxo em relação ao processo de ensino-aprendizagem. Isto pode ser observado neste trecho (Introdução p. 6):

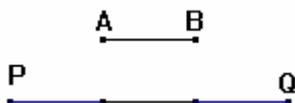
Procuramos deixar bem clara e precisa a significação de dada operação elementar. Não receamos, por isso, nos alongar um pouco, quando necessário, as definições, fazendo-as seguir das propriedades relativas. [...] A compreensão exacta dessas definições e propriedades tem muito mais importância que a demonstração e o enunciado das regras, o qual, em rigor, podia ser suprimido e estivemos a pique de fazê-lo: ninguém aprende uma operação decorando a respectiva regra.

No fim de cada capítulo encontrará o leitor um certo numero de exercícios resolvidos; são problemas typos e análogos aos que costumam ser propostos nas provas escriptas de exames [...].

No capítulo X deste mesmo livro, Euclides Roxo trata de frações ordinárias.

Chama de grandeza tudo o que é susceptível de aumento ou diminuição; a mais simples espécie de grandeza existente é o comprimento de uma reta limitada, isto é, um segmento. [...] Dela nos serviremos para estabelecer concretamente a nova noção de numero. Se uma certa grandeza contém exactamente uma segunda grandeza da mesma espécie, diz-se que a primeira grandeza é um múltiplo da segunda. Reciprocamente, a segunda grandeza é um submúltiplo ou uma parte alíquota da primeira.

Assim, se, dado os segmentos de reta AB e PQ, na figura abaixo, pudermos marcar, por exemplo, 3 segmentos iguais a AB, uns em seguida aos outros, a partir de P até Q, diremos que o segmento PQ contém AB 3 vezes exactamente e que AB é uma parte alíquota de PQ; é um terço ou o terço de PQ.



Podemos exprimir este fato, dizendo que o numero 3 é a medida de PQ, quando se toma AB para unidade de comprimento.

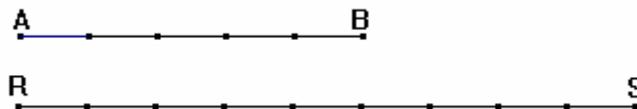
Suponhamos agora que, tomando ainda o segmento AB por unidade de comprimento, queremos medir RS e que não seja possível aplicar AB sobre RS um numero exato de vezes. Experimentamos então proceder do seguinte modo: dividiremos AB em um certo numero de partes iguais, em 5 partes, por exemplo; uma dessas partes será, pelo que vimos, um quinto de AB. Pode acontecer que o comprimento RS contenha uma dessas partes um número inteiro de vezes, 9, por exemplo; diremos então que RS é igual a

---

<sup>5</sup> Em 13/01/44, a Portaria 468, do Ministério da Educação e Saúde, referindo-se ao Decreto Lei 6339 de 11/03/44 criou a Comissão Nacional de Livro Didático e a Portaria 466, de 13/10/44 instituiu Euclides Roxo como seu presidente.

<sup>6</sup> “Lições de Arithmetica”: Euclides de Medeiros Guimarães Roxo – Catedrático de Matemática do Colégio Pedro II. Compendio oficialmente adotado pelo Collegio Pedro II -2ª edição, 1924. Para polêmicas sobre a obra “Lições de Arithmetica”. Ver Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil, Capítulo 3 – J. B. Pitombeira.

nove quintos da unidade,  $9/5$ , ou seja, que a relação do segmento RS para AB é a fração (que se enuncia nove quintos), ou ainda, que o número  $9/5$  é a medida de RS quando se toma AB para unidade.



A partir daí Roxo define fração como “a medida de uma grandeza que contém uma ou mais das partes iguais em que se dividiu a unidade” (ROXO, 1924, p.123-124).

Após definir fração ordinária, Euclides Roxo frisa que esta denominação é reservada às frações cujo numerador e denominador são números inteiros. Após comparar dois segmentos comensuráveis, apresenta a definição de razão:

A razão de duas grandezas (ou de uma grandeza para outra) é uma fração cujo numerador exprime quantas vezes a medida comum está contida na primeira grandeza e cujo denominador exprime quantas vezes a medida comum está contida na segunda.

Pode-se dizer também que a razão da primeira grandeza para a segunda é uma fração que serve de medida à primeira grandeza quando se toma a segunda para unidade (ROXO, 1924, p.229).

A ênfase dada por Euclides Roxo ao ensino de frações como medida de grandezas continua objeto de muitos estudos e pesquisas na literatura da Educação Matemática. Neste contexto se situa esta proposta de tese, de introduzir o conceito de fração como medida de comprimento de segmento de reta visando à compreensão de fração como número.

Acreditamos que no momento em que se deixa de aprofundar o conceito de fração e suas implicações para outros conteúdos matemáticos, acentua-se a fragilidade dos conteúdos programáticos na passagem do campo aritmético para o campo algébrico. Disto resultam as dificuldades apontadas nas pesquisas a este respeito. Entretanto, temos clareza de que elas não se restringem apenas ao Colégio Pedro II, ou ao Brasil. Temos encontrado vários estudos, em países como os Estados Unidos, Inglaterra, França, Holanda, dentre outros, que apontam as mesmas dificuldades em alunos dessa faixa etária. É necessário que retornemos a ousar fazer experiências metodológicas, de criar estratégias pedagógicas esperadas e reclamadas pela sociedade brasileira.

### 3.1.1 Grupo estudado

A pesquisa foi desenvolvida no Colégio Pedro II, Unidade Escolar Centro (UEC), sito à Rua Marechal Floriano, 80, Centro do Rio de Janeiro. Desenvolveu-se em sala de aula regular, de 6ª série. A Unidade Escolar contava, em 2006, com três turmas de 6ª série (602, 604 e 606). A pesquisa foi desenvolvida na turma 604, escolhida aleatoriamente. Era composta de 35 alunos com idade média de 12 anos, sendo 20 meninas e 15 meninos. Desses 35 alunos, 29 provinham da própria Unidade, sendo 25 oriundos da turma 504, 1 da turma 502 e 2 da turma 506, 1 aluno repetente da 6ª série. Uma aluna veio transferida da Unidade Escolar Humaitá II. Os outros 5 vieram transferidos por Mandado de Segurança.

Sendo também professora regente da turma em 2006, contamos com suporte técnico-pedagógico da Direção da Unidade, bem como seu Diretor, Prof. Flavio de Oliveira Norte, do Setor de Supervisão e Orientação Pedagógica (SESOP), da Secretaria de Ensino, órgão que coordena todo o processo de ensino-aprendizagem do Colégio. Contamos também com o apoio de um estagiário, licenciando de Matemática da Universidade do Rio de Janeiro (UFRJ). Este estagiário, quando iniciou seu trabalho junto à turma, foi devidamente esclarecido quanto ao trabalho que estava sendo desenvolvido e como deveríamos juntos atuar com o aluno em sala de aula. Além disso, também teria a função de observar, registrar as dificuldades dos alunos.

Na segunda etapa da pesquisa de campo, tivemos a colaboração da Professora Ana Patrícia Trajano de Souza, Coordenadora de Matemática em 2007. Colaborou no sentido de organizar e abrir espaço para que as atividades não previstas no conteúdo programático regular pudessem acontecer. Também contamos com a participação da Professora Eliana Giambiagi, que passou em 2007, a ser professora regente da turma da pesquisa, 803 em 2007 (604 em 2006). Atuou como elemento facilitador na aplicação das atividades extraordinárias desenvolvidas. Esta turma, 803, foi formada por 28 alunos oriundos da antiga 604 e de outros dez alunos, da própria Unidade Escolar ou transferidos de outra Instituição de Ensino.

As aulas de Matemática semanais nesta turma eram em número de 4, sendo duas na segunda-feira e as outras duas na sexta-feira.

O início dessa pesquisa se deu em 07/04 de 2006, pois o Colégio Pedro II havia passado por um período de greve e, por este motivo, o ano letivo de 2006 começou em 05/04. Tivemos um total de 108 aulas dadas. De 29/05/2006 a 02/07/2006 o Colégio esteve em nova greve. Retomamos em 03/07. Por este motivo as atividades se estenderam até 02/2007. A Prova Única<sup>7</sup>, estabelecida segundo o sistema de avaliação do Colégio, se deu em primeiro de dezembro de 2006. Os alunos que obtêm média inferior a sete (7,0), se submetem a uma nova avaliação, prova de avaliação final (PAF)<sup>8</sup>, realizada nesse ano letivo em fevereiro do ano seguinte (2007). Caso não alcancem grau cinco, ficam reprovados. O sistema de avaliação atual do Colégio é baseado, ainda, em certificações trimestrais. Em anexo, encontram-se os calendários previstos para 2006 e 2007.

### **3.2. O instrumento para comparação: sobre o começar e o terminar**

Como instrumento de comparação entre as situações inicial e final, aplicamos, logo no início do ano de 2006, um teste diagnóstico (Cf. Anexo 1), replicado, no início do ano letivo seguinte, 2007, com pequenas alterações (Cf. Anexo 2). Modificamos a ordem das questões, bem como acrescentamos uma questão que também trazia no seu bojo o objetivo bem definido da nossa proposta de pesquisa. Estes dois testes foram comparados e analisados. Os resultados são apresentados no capítulo 5.

Ao longo do ano letivo foram aplicadas outras avaliações individuais ou em dupla.

#### **3.2.1 Origem - época do instrumento; a que ele se propõe.**

O primeiro teste diagnóstico, aplicado em 07 de abril de 2006, teve como objetivo principal identificar o que o aluno reteve das séries anteriores do conteúdo de frações. Era composto de 6 (seis) questões, subdivididas num total de 9 (nove) itens. Compareceram a este primeiro teste 31 dos 35 alunos da turma. A sua elaboração foi baseada nos testes desenvolvidos por Hart (1981).

---

<sup>7</sup> Prova Institucional (PI): Prova Única por série em cada Unidade Escolar do Colégio Pedro II. Os alunos que alcançam média sete (7,0) são aprovados e entram em férias.

<sup>8</sup> Prova de Apoio Final (PAF): Os alunos que não atingem média anual sete (7,0), fazem esta prova. Caso não alcancem grau cinco, ficam reprovados.

O segundo teste, aplicado em 16/03, na primeira semana do início do ano letivo de 2007, teve como objetivo principal avaliar o avanço do aluno em relação ao tópico de frações, tomando como parâmetro de comparação o primeiro teste diagnóstico. Foi composto de 6 (seis questões), subdivididas num total de 10 itens. Foi alterada a ordem das questões. Transformamos a 2ª questão do 1º teste em um item da 1ª questão (d) do 2º teste, bem como, acrescentamos uma questão, sobre o mesmo tópico explorado, levando em conta o amadurecimento dos alunos após um ano de estudo. Tivemos 28 alunos da turma 604 participando deste segundo teste. Dos dez novos alunos que passaram a compor a turma 803 em 2007, 9 participaram deste segundo teste, pois, um aluno desse grupo faltou.

Os resultados foram tabulados e as comparações estatísticas entre os dois testes diagnóstico estão no Capítulo 5.

As modificações feitas por questão aparecem destacadas no quadro abaixo:

Quadro 3.1 – Modificações das questões do 1º e 2º teste diagnóstico

Questões antigas	Questões novas
1	3
2	1 [d]
3	4
4	5
5	6
6 [a, b, c]	1 [a, b, c]

Um dos fatos, apontado detalhadamente na análise descrita no capítulo 5, é que os nossos resultados em 2006 se assemelharam aos de Hart (1981).

Para confrontar nossos resultados com os de Hart no final da década de 70, início de 80, na Inglaterra, contatamos a pesquisadora que nos enviou o seguinte depoimento (abril de 2007):

Professores ainda estão ensinando frações e as crianças ainda continuam falhando no entendimento de frações. Podemos observar esta situação levando em consideração os resultados NAEP<sup>9</sup> (USA) e os testes do PISA<sup>10</sup> (via registro postal).

Esta avaliação de Hart em 2007, mais uma vez, reafirma, para nós, a necessidade de ensinar fração com significado.

<sup>9</sup> NAEP: National Assessment of Educational Progress.

<sup>10</sup> PISA: Programa Internacional de Avaliação de Alunos.

### 3.2.2 Retomada da Avaliação em 2007

Dando continuidade ao trabalho em 2007, para avaliar a eficácia da estratégia proposta, aplicamos uma seqüência de atividades, baseadas nos trabalhos de Darley (2005, 2007) “Arithmetic and Algebra Connections (Fractions and Rational Expressions)” e o artigo “Understanding Fractions as Numbers and Connections to Algebraic Properties, 2007”.

As atividades dessas aulas foram desenvolvidas ora individualmente, ora em dupla, permitindo identificar o crescimento de cada aluno envolvido na pesquisa. Cada uma das atividades atendia a um objetivo específico. Incluía tarefas com frações usando a reta numérica, tarefas de álgebra e finalmente tarefas combinando esses dois conteúdos.

### 3. 3. Instrumentos de coleta de dados da proposta.

Foi distribuído, para cada aluno, o material com o qual trabalhamos: o caderno de campo, onde o aluno registrava a correção de provas e testes, uma pasta onde guardavam as folhas que foram distribuídas ao longo da pesquisa e, o livro didático<sup>11</sup> trabalhado paralelamente, “Matemática para todos”, 6ª série, de Luiz Marcio Imenes e Marcelo Lellis, Editora Scipione, utilizado na pesquisa. Este livro faz parte da coleção adotada pelo Colégio Pedro II no Ensino Fundamental do 6º ano ao 9º ano. Esta coleção é a que mais se aproxima da nossa proposta pedagógica: ajuda o aluno no desenvolvimento do raciocínio, favorece o modo de pensar independente e contribui para que aprenda a tomar decisões. Além disso, convida os leitores a pensar, em vez de dar receitas prontas, propõe problemas ao invés de enfatizar exercícios repetitivos e mecânicos, procura relacionar a matemática com diversos aspectos do mundo em que vivemos. É um material que exige que o leitor se concentre, raciocine e trabalhe. Foi usado adequando-o, sempre que necessário, ao nosso trabalho da pesquisa.

---

<sup>11</sup> O livro didático é adotado segundo consulta interna aos professores do Departamento de Matemática, de acordo com a proposta do mesmo, baseado no Projeto Político Pedagógico (PPP) do Colégio.

### **3. 4. Procedimentos da realização da proposta.**

Durante todo o ano, foram feitos registros no caderno-diário, pontuando o que foi planejado juntamente com o que realmente foi implementado, como também atividades acadêmicas desenvolvidas no Colégio, tais como, “Semana da Cultura”, Olimpíadas de Matemática: Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas - OBMEP; Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM. Foram registradas, também, as alterações devidas a paralisações, greves, etc.

Além dos dois testes diagnósticos aplicados em abril de 2006 e em março de 2007, realizamos ao longo do ano letivo, um total de quinze outras avaliações, entre elas, testes individuais, testes em dupla, trabalhos em grupo, incluindo neste total a prova institucional (PI), bem como a prova de avaliação final (PAF).

Os exercícios propostos tiveram como objetivo desenvolver no aluno o pensamento algébrico - considerando como ponto de partida o conceito de fração como medida de comprimento. Damos ênfase a frações equivalentes, ordenação na reta numérica e operações numéricas, empregando a definição assim formulada em cada atividade.

A idéia básica dos exercícios e problemas oferecidos em testes, provas e desafios ao longo do ano letivo foi, sempre, aproveitar o conteúdo de frações como rampa para o aluno desenvolver seu pensamento algébrico. Quando introduzidos na álgebra, os estudantes precisam perceber os aspectos em que ela generaliza a Aritmética. Desta forma, a Álgebra aparece como uma versão mais abstrata e mais geral das operações aritméticas com números inteiros, frações e decimais. Há aí generalização no sentido de que a álgebra vai além do cálculo de números específicos e em vez disso foca nas propriedades que são comuns a todos os números sob discussão, sejam eles frações positivas, números inteiros, etc.

### **3.5. Registros do Pesquisador**

Além de documentado na forma referida acima, o desenvolvimento do programa foi registrado, aula após aula, em meu controle próprio como professora regente da turma. Estes registros constituíram a base para as análises desenvolvidas e apresentadas nos capítulos seguintes.