2
Fundamentos Teóricos

2.1. Introdução

Neste capítulo, procuramos explicitar a perspectiva teórica em que nos apoiamos. O objetivo dessa pesquisa é oferecer indícios ou pistas tais que, por meio de uma nova abordagem do conceito de frações que toma como referência a reta numérica, o aluno possa vencer as dificuldades encontradas na passagem do campo aritmético para o campo algébrico.

Ao longo dos anos não têm faltado tentativas da comunidade de educação matemática para melhorar o ensino de frações (HART, 1981; NUNES, 1997; GIMENEZ, 1998; LAMON, 1999; BEZUK & CRAMER, 1986 LAPPAN & BOUCK, 1998; ROMANATTO, 1997, MOREIRA, 2004; DARLEY, 2007, entre outros). Exploraremos mais adiante as contribuições de cada um destes trabalhos, mas há muito ainda a ser feito.

A fundamentação teórica sobre a qual se desenvolveu esta proposta de ensino está apoiada, principalmente, no trabalho sobre frações de Wu.

Hung-Hsi Wu, professor desde 1973 do Departamento de Matemática da Universidade de Berkeley, envolveu-se com a Educação Matemática a partir de 1992, motivado por suas observações das dificuldades do ensino de matemática nas escolas. Wu propõe trabalhar o conceito de fração como medida de segmento de reta, bem como identificar fração como um número e fazer sua representação na reta numérica.

Segundo Wu, existem pelo menos dois gargalos na educação matemática no Ensino Fundamental: o ensino de frações e a introdução à álgebra. E, na orientação que propõe para o ensino de frações, enfatiza a clareza dos conceitos como um caminho para facilitar, adiante, a introdução à álgebra. Ele aponta áreas problemáticas tanto na teoria como na prática do ensino de frações, que podemos brevemente descrever como segue:

> (1) O conceito de fração nunca é definido claramente e sua afinidade com os números inteiros não é enfatizada suficientemente.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

(2) As complexidades conceituais associadas ao emprego de frações são enfatizadas desde o início em detrimento do conceito básico.

(3) As regras das operações aritméticas com frações são apresentadas sem relacioná-las às regras das operações com números inteiros, com os quais os alunos têm familiaridade.

(4) Em geral, explicações matemáticas de quase todos os aspectos essenciais do conceito de fração ficam faltando.

Destacamos, também, K. Hart, da Universidade de Londres, que publicou resultados de sua pesquisa sobre frações no Capítulo 5 de Hart (1981). Uma terceira pesquisa a citar é a de T. Nunes, na Universidade de Oxford. Suas obras refletem sua constante preocupação em relação ao desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças. Entre outras obras suas, podemos citar o livro Crianças Fazendo Matemática (1997), escrito em parceria com Peter Bryant.

Para promover atividades adequadas que pudessem ajudar elevar o nível de compreensão dos alunos nos apoiamos na teoria de Pierre van Hiele, da Universidade de Utrecht, Holanda. Em sua teoria, van Hiele sugere que as crianças progridem por meio de uma seqüência hierárquica de níveis de compreensão enquanto aprendem Geometria, e que a linguagem, o insight e o tipo de experiências vivenciadas desempenham papéis especiais nesse desenvolvimento. Tempos mais tarde sugere que esta mesma teoria pode ser aplicada a outros tópicos matemáticos ou a outros campos de ensino. Outra teoria em que nos apoiamos foi a de T. Carpenter, da Universidade de Wisconsin, USA, cujos textos apontam o que temos embutido como uma das principais características de nossa proposta didática: “aprender e ensinar com entendimento”.

No campo algébrico procuramos identificar as dificuldades dos alunos quando se iniciam em álgebra. Entre outros, podemos destacar L. Booth, do Department of Pedagogic and Scientific Studies in Education James Cook University of North Queensland. Booth utiliza como principal estratégia em sua pesquisa a identificação dos erros. Mais adiante nos detivemos nas pesquisas de C. Kieran, da Universidade de Quebec, Canadá. Sua pesquisa envolve duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. Segundo Kieran, uma das abordagens focaliza as operações dadas, é a abordagem aritmética. A outra

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

focaliza as inversas das operações dadas; é a abordagem algébrica. A abordagem aritmética traduziu-se pelo uso de procedimentos de resolução como substituição por tentativa e erro. A abordagem algébrica caracterizou-se pelo procedimento de resolução de equações por transposição de termos para o outro membro.

Destacamos ainda os autores J. Gimenez e R. Lins que defendem a introdução do pensamento algébrico em crianças numa faixa etária menor que a habitual. Além desses autores, em uma segunda etapa da pesquisa, utilizamos, para elaborar as atividades destinadas a avaliar nossos resultados, empregamos a tese de J. Darley, University of South Carolina, USA.

Nas seções seguintes, aprofundamos a discussão das dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de frações, confrontando a abordagem de Wu para o tratamento das mesmas com as de outros autores. Finalmente tratamos das dificuldades da introdução à Álgebra.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

2.2. Dificuldades na Aprendizagem de Frações

2.2.1. No Brasil

Para que possamos nos situar diante das dificuldades na aprendizagem de frações no Brasil, partimos dos resultados apresentados na análise do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB).

Fazendo um recorte nos temas do SAEB, por exemplo, no Tema III, (Relatório SAEB-2001, p.25-30) que trata de números e operações/álgebra e funções, podemos verificar, através das amostras representativas do alunado brasileiro de 4ª série e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio, que as dificuldades se assemelham.

Existe um razoável consenso entre os professores de que essas dificuldades decorrem de uma ênfase na simples memorização de regras e técnicas nas séries iniciais. Dentre as dificuldades dos alunos percebe-se que a ordenação de números, as operações de multiplicação e divisão de frações não são bem solidificadas. Os alunos da 4ª série do Ensino Fundamental apresentam dificuldades tanto nos procedimentos quanto na resolução de problemas. À medida que caminhamos para a amostra referente à 8ª série, as operações vão se tornando mais complexas, envolvendo o domínio de regras e sinais de operações com números decimais, o índice de acerto em contrapartida vai diminuindo.

Avançando para o Ensino Médio elas acabam se intensificando. Vê-se claramente que os conceitos fundamentais que já deveriam estar construídos passam ao largo.

Em 07/02/2007, o órgão de imprensa do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), publicou os resultados de atualização do panorama de qualidade da educação básica. O que podemos constatar é que os avanços são pequenos tanto em matemática quanto na língua portuguesa.

Esta análise baseada no SAEB nos permite vislumbrar a situação educacional caótica em que vivemos, mas não é a única. Olhando para o que acontece nos vestibulares discursivos, ou, se a tudo isto juntarmos a nossa prática pedagógica diária e as constantes reclamações dos professores, nos damos conta da gravidade da situação do nosso sistema educacional.

Em particular o conteúdo de frações tem dado margem a um número enorme de pesquisas dentro da Educação Matemática, tal é a sua relevância. Várias teses têm tratado desse conteúdo. Entre estas, por exemplo, consideremos a de Mauro Carlos Romanatto. Um dos resultados desta tese aparece no artigo "Número Racional: uma teia de relações". Nele, o autor ressalta que:

> O número racional é um assunto considerado importante na escolaridade básica de matemática e o modo como se apresenta para os alunos tal tópico tem se revelado na maioria das vezes como um obstáculo para a sua plena compreensão. Um dos aspectos que pode justificar tal situação é a própria complexidade com que esse assunto se manifesta. O número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos. Este estudo pressupõe que a plena compreensão do número racional passa por um trabalho significativo em todos os contextos em que tal assunto está presente. Isso porque, em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural. Relações como medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número são "personalidades" que o número racional assume, representadas por notações, da forma a/b, decimal e percentual (p.37).

Concordamos com o que foi colocado neste artigo por Romanatto. Ele menciona a necessidade de que "[...] *em cada contexto, a noção de número e as operações matemáticas devem ser reconceitualizadas em relação ao número natural* [...]". A cada momento do processo ensino e aprendizagem referente a este tópico, observamos a forma abrupta como é feita a passagem dos números naturais para os racionais, como se um não tivesse nada a ver com o outro. E,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

como bem colocou Romanatto em seu artigo, isto deve ser tratado como uma teia de relações.

Outra fonte de pesquisa que utilizamos e que aponta a complexidade desse conteúdo é a tese de doutorado de Plínio Cavalcanti Moreira (2004), cujo foco é o conhecimento matemático voltado para a licenciatura e a prática docente. No capitulo III, p. 94, ao tratar da construção dos números racionais positivos nas salas de aula, o autor ressalta que o mesmo é visto como extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que sua construção pode ser considerada uma das mais complexas. Este fato é ratificado por MA (1999), citado por vários pesquisadores. Em particular, WU (2001, p.7), diz:

O livro de Ma, Sabendo e Ensinando Matemática Elementar, que abre novos caminhos, acabou com o mito de que a matemática básica é simples. Em nenhum lugar neste livro a observação da autora fica mais evidente do que no ensino de frações. Frações são difícies não apenas para os alunos, mas também para seus professores, que de certa maneira, são eles mesmos vítimas de uma pobre educação matemática.

Ainda dentro das considerações de Moreira, (p.94), encontramos BEHR et al., (1983, p.91), que reforça estes argumentos:

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.

As afirmações tanto de Ma e Behr quanto de Romanatto e Moreira fundamentam a nossa hipótese, no sentido que o trabalho desenvolvido com os números racionais, em particular com os racionais positivos, deve ser de tal ordem que proporcione ao aluno a possibilidade de desenvolver sua capacidade de abstração. Como foi colocado especificamente por Behr "*o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas*". É como tal que sustentamos que ajuda o aluno na sua introdução no campo algébrico.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Por outro lado, podemos citar o estudo feito por Merlini, que, em sua dissertação, se propõe responder à seguinte questão de pesquisa (MERLINI, 2005, p.12):

> Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª série utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados de fração propostos por Nunes et al. (2003): número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo?

Respondendo à sua questão de pesquisa, MERLINI (2005, p. 209), após pontuar as principais estratégias de resolução encontradas nas respostas dos alunos da amostra tomada como referência, tende a concluir que não houve regularidade no desempenho dos alunos ao lidar com qualquer um dos significados, isto é, para um mesmo significado encontramos diferentes estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

Segundo MERLINI (2005, p. 203), este dado é relevante e preocupante se aceitamos a idéia de VERGNAUD (1983) de que o conhecimento deve emergir dentro de uma variedade de situações e cada situação, normalmente, não pode ser analisada com ajuda de apenas um conceito: "*[...] uma situação, por mais simples que seja, envolve mais de um conceito e, em contrapartida, um conceito não pode ser apropriado com base na vivência de uma única situação*" (MERLINI, 2005, p. 203).

Nestas condições, conclui [MERLINI] *"o modo do ensino do conceito de fração abordado nas escolas, privilegiando alguns significados (Parte-todo, e Operador multiplicativo), em detrimento de outros, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito"* (p.209).

Mais adiante, a autora ainda destaca que:

> os resultados obtidos pelos alunos da 5ª e 6ª séries no significado Parte-todo estão muito aquém do esperado, conclui que, pelo menos na população estudada, a maneira como o processo de ensino tem sido feito, oferece pouco recurso para favorecer a construção do conceito de fração (MERLINI, 2005, p.209).

Uma outra pesquisa que vem reforçar nossa hipótese é descrita na dissertação de mestrado de Alexandre Notari: "*Simplificação de Frações Aritméticas e Algébricas: Um Diagnóstico Comparativo dos Procedimentos*", (2002) cujo estudo desenvolveu-se em uma classe do Ensino Fundamental, 8ª série, e em outra do Ensino Médio, 1ª série, em duas escolas estaduais da cidade

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

de São Paulo. Sua pesquisa investiga os procedimentos utilizados pelos alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, na simplificação de frações aritméticas e algébricas, buscando, por um lado, verificar se estabelecem relações de equivalência entre a fração dada e a fração obtida pela simplificação e, por outro lado, conhecer as manifestações dos sistemas conceituais aritméticos e algébricos no tratamento dessas expressões. NOTARI (2002) teve como uma das metas de sua pesquisa produzir um diagnóstico sistemático dos principais erros e dificuldades manifestados por esses alunos na simplificação de frações aritméticas e algébricas.

Em suas conclusões, (NOTARI, 2002, p.84) aponta um grande número de erros nas atividades de simplificação das frações algébricas, os quais revelam a incompreensão das regras formais que regulamentam as transformações. Entre eles há predominância de erros devidos a uma generalização de regras de uma situação para outra, sem uma análise das condições que validam esta generalização.

Além das teses e dissertações citadas, encontramos vários livros que vêem reforçar nossa crença. Podemos citar, por exemplo, Números–Linguagem Universal, trabalho oriundo da equipe do Projeto Fundão, Terezinha Nunes & Peter Bryant, entre outros.

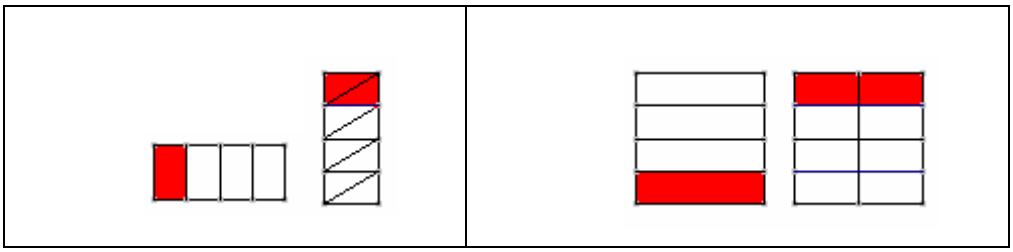
O livro "Números – Linguagem Universal" teve como objetivo principal propor situações de ensino onde fossem orientados os processos de raciocínio dos alunos para que os conceitos básicos sobre frações, números decimais, inteiros relativos e racionais fossem adquiridos com compreensão. Sem pretender ignorar os resultados obtidos pelos grandes matemáticos, que sistematizaram os conjuntos numéricos, e as relações entre elas, a equipe acredita, baseada em experiências de sala de aula, ser necessário o entendimento pelo aluno do processo de construção desses conceitos (p. 12). As atividades propostas estão diretamente relacionadas com os estudos de vários pesquisadores, nos quais também a nossa pesquisa se apoiou, tais como: BRASIL (1977, 1979), CARRAHER (1986), HART (1981), HART & RUDDOCK (1985), HIEBERT & BEHER (1988) e SANTOS (1993). A equipe do Projeto Fundão, ao elaborá-lo, planejou situações didáticas que explorassem os novos conjuntos numéricos, levando em conta os problemas de aquisição dos novos conceitos e tentando minimizar o impacto de tais dificuldades no processo de aprendizagem dos alunos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Pode-se ver, ainda, no livro de Terezinha Nunes e Peter Bryant, cujo propósito é apresentar uma descrição do raciocínio matemático das crianças, como elas pensam sobre problemas matemáticos e o que a matemática significa para elas. No capitulo 8 (p.191), referente a "Compreendendo Números Racionais" os autores colocam que:

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não a têm. Elas usam os termos fracionais certos; elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba.
>
> Uma forma comum de apresentar as crianças às frações é mostrar-lhes todos divididos em partes, alguns dos quais distinguidos do resto, por exemplo, pintados. As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com alguma instrução sobre algumas regras para calcular, permite que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre fração.

O trabalho interessante de KERSLAKE (1986) com adolescentes de 12 a 14 anos mostra o mesmo. Essas crianças se desempenharam muito bem em julgamento sobre a equivalência de frações nos itens registrados (Figura 1)



Todos os alunos entrevistados produziram frações equivalentes para os diagramas e pareceram muito familiarizados com o problema; alguns alunos acrescentaram que, se você remove a linha, os diagramas parecem iguais, e que era assim que eles sabiam que as frações eram as mesmas.

No entanto, diversas partes de pesquisa demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa. Por exemplo, no Brasil, CAMPOS et al. (1995) foram capazes de mostrar bastante claramente que este modo de introduzir frações, pode na realidade, conduzir as crianças a erro. [...] (NUNES & BRYANT, 1997, p.191).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

2.2.2. No Exterior

Investigando agora fora do Brasil, verificamos que as preocupações dos pesquisadores em Educação Matemática em relação ao tópico de frações ultrapassam nossas fronteiras. Vários trabalhos sobre frações têm sido apresentados em quase todos os encontros relacionados à Educação Matemática. As dificuldades de compreensão desse conteúdo desafiam-nos a encontrar soluções. Nos encontros de Psychology of Mathematics Education (PME), há vários grupos de pesquisadores voltados para esta área de interesse. Entre eles, podemos citar alguns artigos como: "Locating Fraction on a Number Line" de MARKKU HANNULA (2003)[1]. Este artigo, baseado numa pesquisa com 3067 alunos finlandeses, da quinta à sétima série e uma entrevista com 20 alunos, examinou a compreensão de estudantes quanto a frações. Duas tarefas representaram uma específica fração (3/4) em diferentes contextos: como parte de uma barra de oito pedaços (contexto de área) e como a localização em uma reta numérica. Os resultados sugerem que a compreensão dos alunos evoluiu muito da quinta para a sétima série. No entanto, comparações de Parte para o Todo dominam fortemente o pensamento dos estudantes e estes têm dificuldade em perceber a fração como um número na reta numérica, mesmo na sétima série.

Outro artigo que fez parte da fundamentação de nossa pesquisa foi "The Usefulness of performance assessment in Student's Understanding of Fractions in Korea", (PME -27)[2] de JI-WONSON (2003). Esse estudo teve como proposta examinar a maneira como a avaliação de desempenho afeta a compreensão conceitual de frações. Ao se referir a HIEBERT (1986), o estudo subdivide a compreensão de frações em conhecimento conceitual e conhecimento procedimental.

Outro artigo de interesse em nossa fundamentação foi o encontrado no PME 27 (2003) "Goal Sketches in Fraction Learning"[3]. Este artigo investiga como o conhecimento conceitual do valor de frações de alunos da 5ª série e da 7ª série (correspondem ao nosso Ensino Fundamental) muda à medida que a

[1]Artigo "**Locating Fraction on a Number Line**" de Markku S.Hannula. University of Turku, Department of Teacher Education. PME 27, vol. 3, p.17-24., 2003.
[2]Artigo de Ji-Won Son-Michigan State University, apresentado no PME-27, vol. 1 – p. 253, 2003. Trabalho baseado nas considerações do NCTM-2000.
[3] Goal Sketches in Fraction Learning: Artigo de Dr. Catherine Sophian & Sâmara Madrid-University of Hawai ´I at Mänoa, apresentado no PME 27, vol. 4, p.231-235, 2003.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

aprendizagem dos alunos progride. Para tal, pediu-se a alunos de 5ª e 7ª séries para resolver problemas em que teriam que encontrar uma fração entre duas frações dadas, e depois, avaliar soluções para problemas semelhantes que eram modelados por eles. Quando as frações dadas apresentavam o mesmo denominador ou o mesmo numerador, uma estratégia simples é manter o valor comum e escolher um valor intermediário para o outro componente. Alunos da 5ª série usaram esta estratégia, tanto nos problemas que apresentavam o mesmo numerador como naqueles com o mesmo denominador, e julgaram-na "muito esperta" quando foi modelada. Alunos da 7ª série transformaram as frações com o mesmo numerador em frações com o mesmo denominador, e frequentemente julgaram a estratégia de escolher um denominador intermediário como sendo "não esperta".

Como anteriormente colocado por HIEBERT e CARPENTER (1992) em "Learning and Teaching with Understanding", as autoras ressaltam que:

> Enquanto muitos alunos nos Estados Unidos, e mesmo professores, consideram a aprendizagem de matemática como basicamente uma questão de aprender procedimentos computacionais, psicólogos educacionais e educadores matemáticos concordam que a aprendizagem de matemática precisa ter um embasamento conceitual.

Voltando-nos agora para as considerações do National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), encontramos as mesmas preocupações. Por exemplo, no NCTM (2000, p.33), cujo foco estava voltado para frações [...] "*os alunos precisam solidificar seu entendimento de frações como número*". Em 2007, o NCTM tratou dos Pontos Focais de Currículo de Matemática desde o Pré-Jardim até à oitava série com as seguintes considerações:

A decisão de organizar o ensino em torno de pontos focais assume que a aprendizagem de matemática é cumulativa, com o trabalho nos níveis mais adiantados solidificando e aprofundando o que os estudantes aprenderam nos níveis anteriores, sem repetitivos e ineficientes re-ensinos (NCTM, 2007, p.33).

Um dos trabalhos apresentados a este NCTM foi o de Darley (2007). Este descreve a elaboração e análise de atividades baseadas no em sua tese de doutorado (DARLEY, 2005)**,** fazendo a ligação entre frações, reta numérica e, por fim, relacionando-os com tarefas algébricas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

2.2.2.1 Os Resultados sobre Frações do Programa CSMS

Usamos, especialmente, os resultados que HART (1981) disponibiliza sobre frações, para elaborar o primeiro teste diagnóstico que deu início a nossa pesquisa de campo e que foi reaplicado no início do ano letivo de 2007 com pequenas alterações. Este livro é o resultado de cinco anos de pesquisa realizada pela equipe de Matemática do programa Conceitos na Matemática Secundária e Ciências (CSMS)[4]. Ele visa estabelecer hierarquias de compreensão para 11 tópicos importantes que aparecem no currículo de Matemática da Escola Secundária no Reino Unido (UK). Escritos tanto para professores como para especialistas em currículos de matemática, ele fornece muitos *insights* para as dificuldades que as crianças enfrentam quando tentam resolver problemas matemáticos.

Esse relatório se baseia em um dos mais extensos programas de testes e avaliação em Matemática que foi realizado na Grã-Bretanha. As crianças foram entrevistadas usando itens produzidos para os tópicos individuais. Aproximadamente 10 000 crianças foram avaliadas usando os itens em forma de testes escritos.

Dez dos capítulos tratam de tópicos matemáticos específicos. Cada um descrevendo os métodos usados pelas crianças para resolver problemas, os erros que fizeram e os níveis de compreensão na hierarquia antes de apontar as implicações deste tópico para o ensino. Mais um capítulo é dedicado a comparações entre hierarquia e outro a implicações gerais para o ensino da Matemática.

O capítulo referente a Frações (p.66-81) (identificando e operando com elas) tem por base dois testes aplicados pelo grupo de Matemática CSMS, um a alunos de 12 e 13 anos e outro a alunos de 14 e 15 anos. A abordagem desenvolvida nesse capítulo parte do princípio de que o tópico de frações necessita de sua própria linguagem específica e se conjeturou que a linguagem que poderia fazer parte da experiência comum dos alunos de 3ª e 4ª séries (14 e 15 anos) não teria sido necessariamente ensinada na 1ª e 2ª séries (12 e 13 anos).

[4] Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS): Dez mil crianças, de idades entre 12 a 16 anos, foram avaliadas na pesquisa realizada pela equipe de Matemática do programa Conceitos na Matemática Secundária e Ciências. Entre os itens objeto dos testes, incluía-se o tópico de frações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

As questões formuladas para crianças mais jovens poderiam todas ser resolvidas com sucesso pela adição e subtração. O trabalho para crianças mais velhas contém alguns itens em comum com este trabalho, mas também envolve problemas que requerem multiplicação e divisão, por exemplo, questões sobre a área de um retângulo. Cada teste deste trabalho apresenta problemas e, além disso, um conjunto de cálculos, designado para tratar os problemas.

Considerando especialmente importante a percepção resultante dessa investigação de que

> [...] a criança se sente relativamente segura quando trabalha dentro dos números inteiros e com as restrições impostas por eles. O fato de que algumas restrições não se aplicam dentro do conjunto das frações e que as frações são inventadas para estender o sistema numérico além de contagem, frequentemente escapa deles. (HART, 1981.p.67,68).

Deste modo, esta pesquisa mostra a importância de trabalhar o tópico de frações no contexto dos números e, em vários momentos, deixa claro que a criança não conceitua fração como um número, um objeto bem determinado. E vai mais adiante, ao sustentar que, para a criança atingir este conhecimento, é necessário que sejam trabalhadas questões referentes a frações equivalentes e à ordem nas frações.

Segundo HART[5], embora ainda hoje, 2007, existam muitas pesquisas sobre frações as dificuldades sobre este tópico permanecem. Isto sugere que estas dificuldades se originem antes do estudo de frações e, portanto, que uma das prováveis causa dessa situação é a transição do conjunto de números naturais para o conjunto de frações.

Depois de passarmos por estas leituras, primeiro nos reportando à construção do conceito de fração, e, procurando compreendê-las, encontramos um ponto comum nas respectivas conclusões: Os alunos não conseguiram apreender o conceito de fração. Após um sério e árduo trabalho para que este objetivo fosse alcançado, os resultados ficaram aquém da expectativa dos pesquisadores.

Outro ponto de consenso é o caminho escolhido pelos pesquisadores para que o aluno atinja este objetivo. Diz respeito aos múltiplos significados com que a fração é apresentada aos alunos, ora como número, ora como parte-todo, quociente, medida, ora como operador multiplicativo. Isto se dá na tentativa de

[5] Depoimento via registro postal.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

fazê-los "melhor" compreender seu significado. Dessa forma são utilizadas estratégias de resolução de problemas, quer pelo professor quer pelo livro didático, que acabam, por fim, induzindo aos alunos a também utilizá-las.

Nossa proposta é, em vez de acumular diferentes aproximações através de vários conceitos imprecisos, construir o conceito de fração de forma precisa a partir da reta numérica utilizando o conceito de medida, fundamentada na proposta de H. Wu, que argumenta e defende este caminho.

2.3. A Proposta de Wu

Ao lermos os trabalhos de Wu, encontramos propostas de soluções para as dificuldades enfrentadas pelos alunos, que foram detectadas também por nós ao longo de nossa prática docente e discutidas nas teses e dissertações mencionadas na seção anterior.

Em um de seus trabalhos, WU (2002) propõe uma nova abordagem para o ensino do conceito de frações. Uma de suas idéias básicas é trabalhar o conceito de fração como medida de comprimento de segmento de reta (2002, p. 6-7).

Tomando como referência a reta numérica, Wu mostra como esta pode ser aproveitada de tal maneira a levar o aluno a realizar um melhor aprendizado na álgebra. A expectativa é que, ao ser introduzido no campo algébrico, por meio do ensino de frações, no 7º ano, o aluno consiga abstrair-se a ponto de conseguir superar as dificuldades que, de um modo geral, atingem os alunos nessa etapa do processo de aprendizagem.

Segundo WU (2002, p.122), um dos primeiros momentos onde o aluno realmente tem condições de compreender a computação de frações - geralmente no 6º e 7º anos – seria o momento adequado no currículo escolar para começar a enfatizar o componente abstrato matemático e fazer da abstração o elemento central do ensino na sala de aula.

Desta maneira estar-se-ia dando ao aluno uma vantagem na etapa correspondente à introdução à álgebra. A capacidade de se abstrair, essencial na álgebra, deve ser desenvolvida tão cedo quanto possível ao longo do currículo escolar. E o ensino de frações constitui oportunidade especialmente adequada para esse fim.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Dando à abstração seu devido lugar no ensino de frações, estaremos facilitando a passagem dos alunos para a álgebra. Mas, para isto, "*os professores devem ter conhecimento matemático para orientar seus alunos neste assunto bastante sofisticado*" (WU, 2002, p.122).

WU (2001, p.1), ressalta que o interesse na Educação Matemática pelo ensino de Álgebra tem tido grande repercussão e vem colocando este ensino em evidência. Ressalta que

> [...] há os que atravessam o portão de entrada com êxito e vão continuar avançando, enquanto que outros não irão, serão deixados permanentemente para trás – a taxa alta de fracasso em álgebra, especialmente entre alunos pertencentes a classes menos favorecidas, tornou-se com razão uma questão de preocupação social geral.

Muitas soluções de natureza pedagógica têm sido propostas, incluindo o ensino do "pensamento algébrico" começando no jardim de infância ou 1ª série. Wu defende, neste artigo, que:

> [...] a despeito de não importar o quanto se introduz do "pensamento algébrico" nas séries inicias e a despeito de como os méritos que tais exercícios possam ser, a taxa de fracasso em álgebra continuará sendo alta a menos que nós radicalmente mudemos o ensino de frações e números decimais.

Neste mesmo artigo, WU (2001, p.1) complementa que:

> O estudo de frações fornece uma rampa que leva o estudante suavemente da aritmética para a álgebra. Mas quando a abordagem de frações é defeituosa, a rampa desmorona, e os estudantes precisam escalar a parede da álgebra não com uma inclinação suave, mas como um ângulo reto (90º). Não é de surpreender que muitos não consigam. Para compreender por que frações têm o potencial para ser *o* melhor tipo de "pré-álgebra", nós devemos primeiro considerar a natureza da álgebra e o que a faz diferente da aritmética dos números inteiros.

Segundo WU (2001), ao serem introduzidos na álgebra, os estudantes precisam vê-la como a aritmética generalizada. Desta forma, a Álgebra aparece como uma extensão, uma versão mais abstrata e mais geral das operações aritméticas com números inteiros, frações e decimais. Generalidade, aqui, significa que a álgebra vai além do cálculo de medidas concretas e, em vez disso, foca nas propriedades que são comuns a todos os números sob discussão, sejam eles frações positivas, números inteiros, etc. Por exemplo, enquanto, na aritmética de números inteiros, $5 + 4 = 9$, por exemplo, tem um sentido concreto único, na Álgebra igualdades semelhantes se referem a todos os números, o tempo todo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Abstração, a outra característica da Álgebra, vai de mãos dadas com a generalidade. Para Wu, neste mesmo artigo (p.1):

> Não se pode definir abstração da mesma maneira que não se pode definir a poesia, mas, grosso modo, ela é a qualidade que focaliza a cada instante uma propriedade particular excluindo outra. Na álgebra, generalidade e abstração são expressas por notação simbólica. Da mesma maneira que não há poesia sem linguagem, não há generalidade ou abstração sem notação simbólica. A fluência com manipulação simbólica é, portanto, uma parte integral de proficiência em álgebra.

Uma idéia mais clara de como o estudo de frações se insere na preparação para a Álgebra se extrai de WU (2005, p.1)[6], onde o autor identifica, no currículo do Ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries, três tópicos principais: números racionais, introdução à álgebra e geometria básica, e explicita, com certo detalhe, o que se deve objetivar que os alunos saibam, nesse momento, sobre cada um desses tópicos. Discute ainda quão longe, no seu entender, precisamos ir antes que possamos esperar implementar estas idéias.

WU (2005, p.1) destaca que a importância dos números racionais no Ensino Fundamental (de 5ª e 7ª série) vem do fato de que o que os alunos aprendem nesse momento sobre estes tópicos teria de lhes bastar até, pelo menos, os primeiros anos da faculdade. Para a maioria, isto se aplica ainda mais por que o que eles aprendem nas 5ª a 7ª séries será tudo o que eles vão aprender acerca de números racionais para o resto de suas vidas. Neste estágio, os alunos ainda não estão prontos para o tipo de sofisticação matemática que é necessário para a completa compreensão dos números racionais e mesmo assim devem aprender bastante deste tópico para poderem funcionar nas séries seguintes e na vida.

O assunto de frações é conhecido por ser uma fonte de, nos termos de Wu, "mathphobia" (medo de matemática). Se isto não constitui um motivo suficiente para ensinar frações melhor, WU (2005, p.2) cita outro: "*a compreensão de fração é o passo crítico na compreensão de números racionais porque frações constituem a primeira introdução à abstração"* (2005, p. 2).

A forma que Wu propõe para lidar com este problema fica mais clara no seguinte texto:

> Enquanto a intuição sobre números inteiros pode ser baseada na contagem dos dedos, a aprendizagem de frações exige antes de tudo uma

[6] Key Mathematical Ideas in Grades 5-8**.** Texto de autoria de H. Wu, apresentado no NCTM de 2005, em abril de 2005.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

> substituição mental para seus dedos. Precisamos de modo claro dizer o que é uma fração. Uma fração tem de ser um número, e, portanto a definição de uma fração como 'parte-de-um-todo' não serve. O aluno precisa ver que as frações são a extensão natural dos números inteiros, de maneira que as operações aritméticas +, -, x, e ÷ de números inteiros podem ser estendidas de maneira natural para as frações. (WU, 2005, p.2)

Atualmente não se diz à maioria dos alunos o que significa multiplicar duas frações. Wu cita Kathleen Hart: "*Como podemos multiplicar dois pedaços de pizzas?"* (HART [2000]). Wu sustenta, então, que definir uma fração (ou qualquer número racional) como um ponto da reta numérica através do processo de partição serve admiravelmente para efetuar esta transição. Por exemplo, dividindo ao meio a metade de um segmento de reta, é fácil perceber que a metade de ½ é ¼.

O objetivo a ser atingido no ensino de frações consiste menos em capacitar os alunos para realizar as quatro operações de frações com facilidade que em habilitá-los a usar estas operações para resolver problemas:

> Sendo permitido o uso de calculadora para executar as 4 operações, o aluno minimamente hábil em computação não deve ver diferença, por exemplo, entre $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ e $\frac{357}{68}+\frac{17}{29}$. Ele também é capaz de calcular a divisão $\frac{\frac{23}{15}}{\frac{28}{49}}$ sem dificuldade (WU, 2005, p.2).

Para WU (2005, p.3), o ensino de frações fornece a oportunidade para familiarizar o aluno com a representação simbólica. Deste modo, os alunos podem ser gradual e lentamente acostumados ao uso de símbolos. Símbolos e generalidade caminham juntos. O ponto de vista de Wu é que evitar o uso de símbolos antes da Álgebra e jogar um monte de símbolos sobre os alunos ao começar o ensino de Álgebra é uma estratégia educacional ruim.

2.4 Álgebra

Outra importante parcela da revisão bibliográfica realizada diz respeito à introdução da álgebra no Ensino Fundamental. Na busca de uma literatura que venha ao encontro da fundamentação de nossa hipótese, encontramos duas questões concentrando a atenção dos pesquisadores no processo ensino-aprendizagem da álgebra no Ensino Fundamental: uma diz respeito à introdução

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

precoce da álgebra no Ensino Fundamental, a outra é quanto à apresentação da álgebra como aritmética generalizada.

Há uma corrente de autores que sustenta e aponta caminhos e estratégias viáveis a serem aplicadas em alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, para que a aprendizagem de conteúdos de Álgebra tenha aí seu início. Como exemplos de tais autores podemos citar KIERAN (1989, 1992, 1995), BOOTH (1984, 1995), USISKIN (1995), LINS e GIMENEZ (2001), LINS e KAPUT (2004), etc.

Outra corrente, em contrapartida, diverge dessa linha de ação. Entre estes destacamos KAPUT (1996). Este autor considera a Álgebra como generalização e formalização de regularidades e condições e, de modo especial, mas não exclusivamente, como raciocínio aritmético generalizado e raciocínio quantitativo generalizado. Em decorrência, atribui o fracasso escolar no campo da álgebra à formalização precoce da linguagem algébrica. Assim, afirma:

> [...] têm sido demonstrado que os esforços para relacionar a experiência dos estudantes aos formalismos, depois de estes terem sido introduzidos, não têm obtido resultados satisfatórios (KAPUT, 1996, p.89).

Sustenta ainda que esse processo de generalização não se inicia nos primeiros anos do Ensino Fundamental nem se finaliza neles, aparecendo também nos níveis mais complexos do pensamento matemático como, por exemplo, na teoria dos números algébricos e na criação de modelos matemáticos avançados.

Anos mais tarde, no 12th ICMI Study, Kaput, num trabalho desenvolvido com LINS (2004, p. 48) apresenta, como veremos mais abaixo, um novo ponto de vista sobre o raciocínio algébrico e uma visão mais ampla do ensino de álgebra, que permite que essa introdução possa ocorrer mais cedo. O objetivo desse estudo, segundo KAPUT e LINS (2004), é ajudar professores de álgebra a avançar na tarefa de criar novas abordagens no ensino da álgebra que incorporem tanto as práticas antigas que se mostram frutíferas como as novas possibilidades oferecidas pela tecnologia disponível e por recentes teorias sobre cognição e a aprendizagem. Para chegar a isto, rediscutem o sentido da expressão ensino de álgebra, buscando poder ir além de uma caracterização centrada em conteúdo.

LINS e GIMENEZ (2001, p. 9) mostram como a Álgebra e a Aritmética se relacionam, sem que isso implique em caracterizar a Álgebra como uma Aritmética generalizada. Na visão deles, hoje a Álgebra Escolar representa o mais severo corte da educação matemática escolar e a explicação para isso não está em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

que sua introdução na 6ª série ou 7ª série é precoce para a maioria dos alunos, que não teriam alcançado o nível de desenvolvimento intelectual requerido. Argumentam que, se isso fosse verdade, a única solução seria adiar a introdução da álgebra; essa solução foi adotada em outros países, na Inglaterra, por exemplo, com resultados negativos. E, dizem LINS e GIMENEZ (2001, p.10):

> Nossa leitura da produção de significados para a álgebra e para a aritmética sugere exatamente ao contrário: é preciso começar mais cedo o trabalho com álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra.

Por sua vez na leitura de BOOTH (1988, p.23), encontramos o seguinte comentário: *"A Álgebra é uma fonte de confusão e atitudes negativas consideráveis entre alunos"*. Esta constatação provém do resultado de um levantamento, feito na Inglaterra, de recordações de adultos sobre suas experiências em não aprender matemática na escola (Universidade de Bath, 1982).

BOOTH (1988) tenta descobrir o que torna a álgebra difícil, buscando identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nesta matéria e investigar as razões desses erros:

> Este caminho foi escolhido pelo grupo que desenvolveu o projeto de pesquisa Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM), levado a efeito no Reino Unido de 1980 a 1983 (BOOTH, 1984). Esta pesquisa envolveu alunos da oitava à décima série (idade de treze a dezesseis anos) que vinham estudando álgebra no contexto de um programa de matemática integrada deste a sétima série. Os mais novos geralmente já haviam trabalhado com itens como simplificação de expressões algébricas, fatoração (nos casos mais simples), resolução de equações lineares simples, substituição de fórmulas, etc. Os mais velhos em geral haviam estudado também frações algébricas e expoentes, equações quadráticas e sistemas de equações, gráficos envolvendo igualdades e desigualdades, além de fatoração e simplificações mais complexas. A despeito de idade e experiência em álgebra, verificaram-se os erros semelhantes em todas as séries.

Entrevistas com os alunos que cometiam esses erros mostraram (BOOTH, 1988) que muitos destes podiam ter origem nas idéias dos alunos sobre aspectos como:

> O foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas";
> O uso da notação e da convenção em álgebra;
> O significado das letras e das variáveis;
> Os tipos de relações e métodos usados em aritmética (BOOTH, 1988, p.23).

O parágrafo anterior confirma o que aponta o estudo desenvolvido no Brasil (SAEB, 2001), onde é constatada a semelhança dos erros entre alunos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

desde as séries iniciais, 4ª série do Ensino Fundamental, (trabalhando com expressões numéricas) como alunos da 8ª série do Ensino fundamental e alunos da 3ª série do Ensino Médio. De acordo com o Relatório do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, SAEB (2001, p.15):

Ao contrário da simples reprodução de procedimentos e de acúmulo de informações, os professores que ensinam Matemática devem considerar a resolução de problemas como o eixo norteador da atividade matemática. A resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidade como observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processo, além de estimular formas de raciocínio como intuição, indução, dedução e estimativa. Esta opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

KIERAN (1995, p.104.), desenvolve a pesquisa sobre os alunos que estão iniciando o estudo da álgebra. Ela enfatiza que a álgebra muitas vezes é vista como "aritmética generalizada". Segundo ela, essa expressão sugere que as operações aritméticas são generalizadas a expressões envolvendo variáveis. Assim, expressões como **x + 3** ou **2y + z** são consideradas no mesmo sentido de, por exemplo, **5 + 3** ou **2.7 + 8**, uma vez que **x**, **y** e **z** representam números. Na aritmética, um símbolo de adição entre dois números sempre indica que as duas parcelas devem ser somadas. Mas seu significado em álgebra nem sempre é esse. Por exemplo, na equação **2x+5 = 13**, o símbolo de adição em álgebra não significa que os termos numéricos dados no primeiro membro, 2 e 5, devam ser somados.

Segundo Kieran, a principal diferença entre a aritmética e a álgebra é a distinção entre as operações utilizadas no processo de resolver equações e as operações indicadas nessas equações. Nesta pesquisa ela aponta duas abordagens diferentes observadas entre seis alunos da sétima série, com treze anos de idade, que participaram de uma experiência de ensino durante três meses. A abordagem aritmética focalizava as operações dadas e a outra focaliza as inversas das operações dadas. A abordagem aritmética traduziu-se no uso de procedimentos de resolução como substituição por tentativa e erro. A abordagem algébrica caracterizou-se pelo procedimento de resolução de equações por "transposição de termos para o outro membro".

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Em um outro artigo, KIERAN (1989, p. 33) "The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective" diz que:

> No reconhecimento do uso de estruturas, entendemos estar a parte central da álgebra do Ensino Médio. Visto que a álgebra escolar pode ser considerada como sendo a formulação e a manipulação de afirmações gerais sobre números, as experiências prévias das crianças com a estrutura de expressões numéricas na escola elementar deveriam ter um importante efeito sobre sua capacidade de compreender a álgebra.

Por sua vez, USISKIN (1995, p.13-15) em "Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis**"** diz que:

> Num compêndio de aplicações da aritmética, concluem Usiskin e Max Bell, que é impossível estudar aritmética adequadamente sem lidar implicitamente ou explicitamente com variáveis. O que é mais fácil, "O produto de qualquer número por zero é zero" ou "Para todo n, n.0 = 0"? A superioridade da linguagem algébrica sobre o português (por exemplo) nas descrições de relações numéricas se deve a similaridade das duas sintaxes. A descrição algébrica assemelha-se a descrição numérica; a descrição em língua portuguesa não.

USISKIN (1988) destaca a importância da Álgebra, mesmo que seja vista simplesmente como Aritmética Generalizada. Chama a atenção para o fato de que: *"Historicamente, a invenção da notação algébrica em 1564 por François Viète teve efeitos imediatos. Em cinqüenta anos a geometria analítica foi inventada e trazida a uma forma avançada. Em cem anos surgiu o cálculo"* (USISKIN, 1988, p.14).

Mais recentemente, Rômulo Lins e James Kaput, liderando um grupo de estudos no 12th ICMI Study Conference Proceedings (2004) *"The Future of the Teaching and Learning of Algebra"*, avançam suas posições no capítulo 4, *"The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field"* (Desenvolvendo o raciocínio algébrico mais cedo: o estado atual da situação). Neste capítulo**,** o foco principal foi a abordagem precoce da álgebra, defendida pelos membros desse grupo**.**

A relevância desse estudo se concentra na constatação de que as crianças mais novas podem ter melhor desempenho em matemática do que se acreditava antes, possibilitando a adoção de objetivos mais ambiciosos para as séries iniciais. Isto não significa, diz LINS & KAPUT (2004, p. 47- 48), *"ensinar a mesma velha álgebra escolar da maneira usual a criança mais nova, apresentar-lhes novas*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

maneiras de pensamento algébrico e mergulhá-las na cultura da álgebra". Complementando,

> [...] este trabalho fornece uma base para o entendimento do desenvolvimento precoce do raciocínio algébrico e uma visão mais ampla do ensino da álgebra, em que isto possa ocorrer. Seu intento é ajudar professores de álgebra a avançar na tarefa de criar novas abordagens no ensino da álgebra que incorporem tanto as práticas antigas que se mostram frutíferas como as novas possibilidades oferecidas pela tecnologia disponível e por recentes pontos de vista sobre a cognição e a aprendizagem.

Para melhor entendimento do que significa o ensino precoce da álgebra, os autores analisam esta expressão buscando ir além de uma caracterização centrada no conteúdo. Segundo eles,

> existem muitas dificuldades em definir álgebra, especialmente se nós procuramos definições epistemológicas fechadas, uma vez que o conceito de álgebra depende de muitos fatores culturais, e outros que variam muito de comunidade para comunidade e mesmo dentro de uma mesma comunidade (LINS & KAPUT, 2004 p.48).

O grupo aponta duas características do pensamento algébrico. O primeiro envolve atos de generalização deliberada e a expressão de generalidade. O segundo envolve, normalmente como um esforço isolado, raciocínio baseado nas formas de generalizações sintaticamente estruturadas, incluindo ações sintaticamente e semanticamente orientadas**.** Para eles, esta é

> uma caracterização das formas amplas de raciocínio algébrico que nos ajudam a discutir formas de pensamento algébrico apropriadas para crianças novas, e as condições que possam promovê-las. Entre tais condições, por exemplo, está a necessidade de integração maior entre tópicos matemáticos diferentes, a fim de promover o desenvolvimento do pensamento sobre formas algébricas que resultariam em maior capacidade dos alunos para resolver problemas (LINS & KAPUT, 2004, p.48).

Para estes autores,

> o pensamento algébrico amplia o poder do aluno fornecendo-lhe instrumentos que permitam um grau maior de certos tipos de generalidade; é claro que isto já era aceito como verdade, por um bom tempo, só que desta vez estamos considerando a capacidade de alunos mais novos do que o normal (LINS & KAPUT, 2004, p.48).

O tema desse capítulo, "*Álgebra mais cedo"*, engloba tanto uma orientação para os lados (como integrar o ensino de álgebra com os outros tópicos em todos os níveis escolares) como para frente (as implicações de ensinar álgebra mais cedo para as séries seguintes). Em outras palavras, em vez de restringir o ensino de álgebra a algumas séries apenas ou a uma seqüência estreita de cursos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

ou ambientes de aprendizagem, podemos examinar a possibilidade de criar um novo mundo de álgebra desde o começo.

Segundo LINS e KAPUT (2004), atualmente existem dois entendimentos do que quer dizer "álgebra mais cedo".

O primeiro entendimento, amplamente aceito por muitos anos, se refere à primeira vez que aos alunos são introduzidos à álgebra na escola. Por muitos motivos diferentes - às vezes tradição, posições teóricas dominantes ou pelo impacto de estudos publicados, era provável que este primeiro encontro acontecesse quando os alunos tinham 12-13 anos, em outros casos até mais velhos.

O segundo entendimento, que ganhou terreno recentemente e muito devagar na comunidade de educação matemática, leva a álgebra mais cedo a se referir à introdução do raciocínio algébrico numa idade muito mais precoce, às vezes até para crianças de sete anos. A abordagem adotada por LINS e KAPUT (2004) tem como foco a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico e não o ensino e aprendizagem de pequenos pedaços específicos de conteúdo de álgebra. Qualquer conteúdo ou atividade que seja útil para ajudar o professor a atingir esse objetivo poderia fazer parte do ensino precoce da álgebra mais cedo.

Para LINS e KAPUT (2004), a maior aceitação do segundo ponto de vista tem a ver com o fato de que a comunidade de educadores matemáticos se deu conta apenas recentemente de que as crianças mais novas são capazes de fazer muito mais do que se supunha previamente. Mudanças nas posições sobre o conceito de aprendizagem e da maneira como o ensino formal deve ser organizado para integrar esses novos pontos de vista, levaram a uma concepção mais esclarecida sobre a maneira como os educadores matemáticos percebiam o trabalho das crianças.

Ao ser visto como um processo de longo prazo, o ensino da álgebra começou a incorporar a idéia de que o processo de adquirir familiaridade com aspectos específicos de atividades algébricas (por exemplo: fórmulas e notação literal, assim como expressões contendo operações indicadas) era tão relevante como dominar as estruturas sintáticas de formalismo tradicional. Mais ainda, sustentam esses autores que um começo precoce no ensino de álgebra não é apenas possível, mas necessário, e se concentrará a atenção nas formas diferentes

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

de como proceder neste ensino de álgebra precoce e também nas suposições chaves que as sustentam.

WU (2005, p.3) vai mais adiante:

> Atualmente, há um grande esforço para colocar "o pensamento algébrico" em todas as séries. Se eu entendo bem, este termo significa procurar padrões e trabalhar com manipulações e tecnologia. A intenção é louvável, mas este tipo de pensamento algébrico não é suficiente para promover o aprendizado de álgebra de uma perspectiva matemática; ele precisa ir além, na direção de usar os símbolos fazendo cálculos com eles quando isto é natural. Eu sugiro, por exemplo, que, nas séries iniciais, ao invés de escrever **15 + ---- = 22**, se experimente escrever, 'encontre um número x de maneira que **15 + x = 22'**. Quando ensinar a adição de frações, diga aos alunos que a fórmula $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ é válida para toda fração $\frac{a}{b} e \frac{c}{d}$, e o resultado disto é uma identidade para quaisquer números inteiros a, b, c, e d ($bd \neq 0$). Este é um tipo de pensamento algébrico que o aluno precisa.

Concordamos com Usiskin, Lins e Gimenez e outros pesquisadores aqui mencionados em que a álgebra não é só uma aritmética generalizada. O que pretendemos é usar a generalização, na resolução de problemas de Aritmética para enfrentar as dificuldades. É consenso entre todos esses pesquisadores, os alunos não conseguem ultrapassar essas dificuldades quando introduzidos no campo algébrico sem uma preparação prévia. O que pretendemos demonstrar é que podemos começar a enfrentar mais cedo os erros universais por eles cometidos. Esta preparação pode ser feita ao lidarmos com a generalização que ocorre na passagem dos números inteiros para os números fracionários. É essa idéia, de nos valermos de conteúdos específicos para ajudar o aluno a alcançar um patamar mais elevado de abstração, que pretendemos desenvolver ao longo desta dissertação.

2.5. Conclusão

Neste capítulo, apresentamos uma revisão da bibliografia em que baseamos a experiência relatada nos capítulos seguintes. Discutimos, também, amplamente relatos das dificuldades encontradas pelos estudantes tanto na aprendizagem de frações quanto na introdução á Álgebra e tratamos de alguns erros detectados na prática e nas formas de lidar com eles.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA

Para concluirmos gostaríamos de chamar a atenção para o que diz Ubiratan D'Ambrosio em seu livro **Educação Matemática - Da Teoria à Prática** (p.79):

> Entre teoria e a prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados.
>
> Toda teorização se dá em condições ideais e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido. Pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0410356/CA