



**NEIDE DA FONSECA PARRACHO SANT'ANNA**

**PRÁTICAS PEDAGÓGICAS PARA O ENSINO DE FRAÇÕES  
OBJETIVANDO A INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-  
Graduação em Educação da PUC-Rio.

Orientador: Gilda de La Rocque Palis  
Co-orientador: Maria Aparecida Campos Mamede Neves

Volume I

Rio de Janeiro  
Maio de 2008

**Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna**

**Práticas Pedagógicas para o ensino de Frações  
Objetivando a Introdução à Álgebra**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Educação da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof<sup>a</sup>. Gilda de La Rocque Palis**  
Orientadora  
PUC-Rio

**Prof<sup>a</sup>. Maria Aparecida Campos Mamede Neves**  
Co-orientadora  
PUC-Rio

**Prof. Celso Braga Wilmer**  
PUC-Rio

**Prof<sup>a</sup>. Elizabeth Belfort da Silva Moren**  
UFRJ

**Prof<sup>a</sup>. Lílían Nasser**  
UFRJ

**Prof<sup>o</sup> Paulo Fernando Carneiro de Andrade**  
Coordenador (a) Setorial do Centro de Teologia e Ciências Humanas -  
PUC - Rio

Rio de Janeiro, 16 de maio de 2008.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

### **Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna**

Graduou-se em Matemática na UFRJ. Ingressou no curso de pós-graduação em Matemática na PUC-Rio, obtendo o título de mestre em 2001. Tem experiência na docência de Matemática no ensino básico e no ensino superior. Participa de Projeto de Pesquisa em Educação Matemática, bem como possui trabalhos publicados nesta área.

#### Ficha catalográfica

Sant'Anna, Neide da Fonseca Parracho

Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à álgebra / Neide da Fonseca Parracho Sant'Anna ; orientadoras: Gilda de La Rocque Palis e Maria Aparecida Campos Mamede Neves. – 2008.

328 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Educação)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Educação – Teses. 2. Ensino de álgebra. 3. Pré-álgebra. 4. Educação básica. I. Palis, Gilda de La Rocque. II. Neves, Maria Aparecida Campos Mamede. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Educação. IV. Título.

CDD: 370

À minha família, Annibal, João Paulo, Leonardo Augusto e Ana Luiza, Julia e Lucas, esposo, filhos, nora e netos, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Ao meu pai Luiz e à minha mãe Dalva em memória.

À minha irmã Wanda, pela ajuda silenciosa, em tantos momentos com quem venho compartilhando as etapas vencidas e à amiga Maria Ciema, pelas sábias palavras de conforto e estímulo.

Ao meu Deus, autor e consumidor da minha vitória e que me ensinou, passo a passo:

A considerar atentamente na lei perfeita, lei da liberdade e nela perseverar, não sendo ouvinte negligente, mas operosa praticante, tornando-me bem-aventurada no que realizo.

(Tiago 1:25)

Obrigada meu Deus.

## **Agradecimentos**

À querida amiga e orientadora Professora-doutora Maria Aparecida C. Mamede Neve, sempre presente e atenta em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis dessa caminhada.

À amiga e orientadora Professora-doutora Gilda de La Roque Palis, fornecendo subsídios sem os quais não teríamos chegado às conclusões tão almejadas.

À Professora-doutora Elizabeth Belfort da S. Moren pelo incentivo e sugestões.

À amiga Professora-doutora Lilian Nasser pela orientação, carinho, atenção, apoio e confiança ao longo desse percurso.

Ao Professor-doutor Celso B. Wilmer pelo apoio e confiança.

Ao Professor-doutor João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho pela compreensão inestimável.

À amiga Professora-doutora Flavia Soares, sempre pronta a dar seu valioso e escasso tempo para colaborar diante das dificuldades advindas nesta caminhada.

À amiga Professora e mestre Mercedes Mercy, pela ajuda e confiança desde o início desse curso.

Aos integrantes do Projeto Fundação - UFRJ, em particular a querida Professora Emérita do Instituto de Matemática, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes pelo carinho e constante incentivo.

À amiga Professora Vera Maria Ferreira Rodrigues, Secretária de Ensino, hoje Diretora Geral do Colégio Pedro II, sempre presente e atenta às dificuldades características de uma Intuição de Ensino do porte do Colégio Pedro II.

À direção da Unidade Escolar Centro, Prof. Flavio de Oliveira Norte, a equipe de Matemática, em particular à Professora Ana Lúcia, Professora Ana Patrícia e ao Professor Francisco Roberto durante todo processo.

A toda equipe da Secretaria da Unidade Escolar Centro, pela constante presteza em fornecer dados necessários ao desenvolvimento da pesquisa.

A equipe do Setor de Supervisão e Orientação Pedagógica – SESOP, pela ajuda inestimável junto aos alunos e pais ao longo deste trabalho.

Ao Professor Geraldo Pinto Vieira, Chefe do Departamento de História do Colégio Pedro II, no período de 1985 a 1990, que com sua incansável dedicação possibilitou-me ter ao alcance um material de difícil acervo.

À Professora-doutora Vera Lucia Cabana Q. Andrade Coordenadora do Núcleo de Documentação e Memória - NUDOM do Colégio Pedro II e, em particular, a Bibliotecária Elizabeth Monteiro da Silva.

A todos que contribuíram direta e indiretamente na realização desse trabalho....

..... muito obrigada.

## Resumo

Sant'Anna, Neide da Fonseca Parracho; Palis, Gilda de La Rocque . **Práticas Pedagógicas para o ensino de Frações objetivando a introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro, 2008. 328p. Tese de Doutorado - Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A idéia central desta tese foi trabalhar o conceito de fração, identificando a fração como número e representando esse número na reta numérica, tendo como base as recomendações e experiências realizadas por Kathleen Hart, e principalmente Hung-Hsi Wu. Um conjunto de atividades foi desenvolvido, constituindo uma proposta de ensino de frações, posta em prática em turmas do sétimo ano e oitavo ano do Colégio Pedro II durante os anos letivos de 2006 e 2007. Parte substancial da tese é dedicada à descrição dos procedimentos metodológicos desenvolvidos para a aplicação dos princípios teóricos defendidos e de aspectos da implementação desses procedimentos em sala de aula. Grande número de exemplos das atividades realizadas é apresentado, dando-se destaque às respostas dos alunos às mesmas. O acompanhamento da evolução dos alunos é amplamente documentado. Os resultados são avaliados tanto do ponto de vista global quanto do ponto de vista de grupos diferenciados de alunos em diferentes níveis de qualificação prévia. O encaminhar de todo o trabalho investigativo leva a duas conclusões essenciais: a familiarização com o campo algébrico é alcançada com mais facilidade quando o conceito de fração é trabalhado na forma proposta; o envolvimento com as atividades e a compreensão pelos alunos da construção que estavam realizando em relação aos conceitos propostos devolvem o interesse das crianças pela aprendizagem da Matemática, fundamental para o êxito de qualquer proposta pedagógica.

## Palavras-chave

Ensino de Frações; Pré-álgebra; Educação Básica.



## Abstract

Sant'Anna, Neide da Fonseca Parracho; Palis, Gilda de La Rocque. **“Pedagogical practices for teaching fractions aiming at the introduction to algebra”**. Rio de Janeiro, 2008. 328 p. Tese de Doutorado - Departamento de Educação, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The main idea of this thesis was to work on the concept of fraction, identifying the fraction as a number and representing it in the line, taking as basis the recommendations and experiments of Kathleen Hart, and, mainly Hung-Hsi Wu. A set of activities was developed, generating a proposal for teaching fractions, led to practice in classes of students of 7<sup>th</sup> and 8<sup>th</sup> grade of Colegio Pedro II during the school years of 2006 and 2007. A substantial part of the thesis is devoted to the description of the methodological procedures developed for the implementation of the theoretical principles defended and of aspects of the implementation of these procedures in the classroom. Large number of examples is given of the activities performed, emphasis being given to the response of the students. The monitoring of the progress of the students is widely documented. The results are evaluated from the global point of view and considering distinct groups of students at different levels of prior qualification. The development of all the research work led essentially to two conclusions: the familiarization with the algebraic field is more easily reached when the concept of fraction is dealt in the proposed way; the involvement of the students with the activities and their understanding of the construction that they were doing with the concepts proposed returned them the interest for learning mathematics, the key to the success of any educational proposal.

## Keywords

Fractions Teaching; Pre-algebra; Basic Education

## Sumário

1 Introdução.....	19
2 Fundamentos Teóricos.....	25
2.1. Introdução.....	25
2.2. Dificuldades na Aprendizagem de Frações .....	27
2.2.1.No Brasil.....	27
2.2.2 No Exterior.....	33
2.2.2.1 Os Resultados sobre Frações no Programa CSMS .....	35
2.3. Proposta de Wu.....	37
2.4. Álgebra.....	40
2.5. Conclusão.....	47
3 Caminhos metodológicos.....	49
3.1. A Instituição.....	51
3.1.1 Grupo Estudado .....	54
3.2 Instrumento para comparação: sobre o começar e o terminar.....	55
3.2.1 Origem - época do instrumento: a que ele se propõe .....	55
3.2.2 Retomada da Avaliação em 2007.....	57
3.3 Instrumentos de coleta de dados da proposta.....	57
3.4 Procedimentos da realização da proposta.....	58
3.5 Registro do Professor.....	58
4 Procedimentos Didáticos Implementados e sua evolução.....	59
5.Análise comparativa dos Testes Diagnósticos: principais constatações sobre o desempenho.....	93
5.1 Análise da Primeira Questão.....	93
5.2 Análise da Segunda Questão.....	100
5.2 Análise da Terceira Questão.....	104
5.4 Análise da Quarta Questão .....	108

5.5 Análise da Quinta Questão.....	109
5.6 Análise da Sexta Questão.....	114
6 Análise e Resultados do Experimento em 2006.....	120
6.1 Primeiro trimestre .....	120
6.2 Segundo trimestre .....	144
6.3 Terceiro trimestre.....	150
7 Análise da proposta pelos resultados em 2007 .....	177
8 Avaliação Global.....	209
8.1 Análise da Evolução do Desempenho do aluno.....	209
9 Conclusões e Recomendações.....	222
9.1 Recomendações para Projetos Futuros.....	224
9.2 A Implementação e a Prática.....	226
10 Referências.....	229
Anexos.....	235

## Lista de figuras

Figura 5.1.....	95
Figura 5.2.....	95
Figura 5.3.....	96
Figura 5.4.....	96
Figura 5.5.....	96
Figura 5.6.....	97
Figura 5.7.....	97
Figura 5.8.....	98
Figura 5.9.....	98
Figura 5.10.....	99
Figura 5.11.....	99
Figura 5.12.....	100
Figura 5.13.....	102
Figura 5.14.....	102
Figura 5.15.....	103
Figura 5.16.....	103
Figura 5.17.....	104
Figura 5.18.....	104
Figura 5.19.....	105
Figura 5.20.....	106
Figura 5.21.....	106
Figura 5.22.....	107
Figura 5.23.....	107
Figura 5.24.....	108
Figura 5.25.....	111
Figura 5.26.....	111
Figura 5.27.....	112
Figura 5.28.....	112
Figura 5.29.....	113
Figura 5.30.....	113

Figura 5.31.....	116
Figura 5.32.....	117
Figura 5.33.....	118
Figura 5.34.....	119
Figura 6.35.....	121
Figura 6.36.....	122
Figura 6.37.....	122
Figura 6.38.....	123
Figura 6.39.....	124
Figura 6.40.....	125
Figura 6.41.....	125
Figura 6.42.....	126
Figura 6.43.....	127
Figura 6.44.....	128
Figura 6.45.....	130
Figura 6.46.....	131
Figura 6.47.....	132
Figura 6.48.....	134
Figura 6.49.....	135
Figura 6.50.....	136
Figura 6.51.....	137
Figura 6.52.....	137
Figura 6.53.....	138
Figura 6.54.....	139
Figura 6.55.....	140
Figura 6.56.....	141
Figura 6.57.....	142
Figura 6.58.....	143
Figura 6.59.....	143
Figura 6.60.....	146
Figura 6.61.....	147
Figura 6.62.....	148
Figura 6.63.....	148

Figura 6.64.....	149
Figura 6.65.....	150
Figura 6.66.....	151
Figura 6.67.....	152
Figura 6.68.....	153
Figura 6.69.....	154
Figura 6.70.....	154
Figura 6.71.....	155
Figura 6.72.....	156
Figura 6.73.....	156
Figura 6.74.....	157
Figura 6.75.....	158
Figura 6.76.....	159
Figura 6.77.....	160
Figura 6.78.....	162
Figura 6.79.....	162
Figura 6.80.....	163
Figura 6.81.....	164
Figura 6.82.....	165
Figura 6.83.....	165
Figura 6.84.....	166
Figura 6.85.....	167
Figura 6.86.....	167
Figura 6.87.....	168
Figura 6.88.....	168
Figura 6.89.....	169
Figura 6.90.....	170
Figura 6.91.....	170
Figura 6.92.....	171
Figura 6.93.....	172
Figura 6.94.....	172
Figura 6.95.....	173
Figura 6.96.....	174

Figura 6.97.....	175
Figura 6.98.....	176
Figura 7.99.....	179
Figura 7.100.....	180
Figura 7.101.....	180
Figura 7.102.....	181
Figura 7.103.....	183
Figura 7.104.....	184
Figura 7.105.....	185
Figura 7.106.....	185
Figura 7.107.....	186
Figura 7.108.....	186
Figura 7.109.....	187
Figura 7.110.....	188
Figura 7.111.....	188
Figura 7.112.....	191
Figura 7.113.....	193
Figura 7.114.....	194
Figura 7.115.....	194
Figura 7.116.....	195
Figura 7.117.....	196
Figura 7.118.....	196
Figura 7.119.....	197
Figura 7.120.....	197
Figura 7.121.....	198
Figura 7.122.....	199
Figura 7.123.....	200

## Lista de quadros e gráficos

Quadro 3.1: Modificações das questões do 1º e 2º teste diagnóstico.....	56
Quadro 4.1: Conteúdos programáticos da 6ª série (turma 604) da Unidade Escolar Centro.....	59
Quadro 4.2: Conteúdos programáticos da 6ª série da Unidade Escolar Centro (demais turmas).....	60
Quadro 4.3: Conteúdos programáticos da 8º ano da Unidade Escolar Centro (801,803 e 805).....	87
Quadro 5.1: Resultados relativos à 1ª questão do teste diagnóstico.....	94
Quadro 5.2: Resultados relativos à 2ª questão do teste diagnóstico.....	101
Quadro 5.3: Resultados relativos à 3ª questão do teste diagnóstico.....	105
Quadro 5.4: Resultados relativos à 3ª questão do teste diagnóstico examinado a luz do erro mais frequente.....	105
Quadro 5.5: Resultados relativos à 4ª questão do teste diagnóstico.....	109
Quadro 5.6: Resultados relativos à 5ª questão do teste diagnóstico.....	110
Quadro 5.7: Resultados relativos à 6ª questão do teste diagnóstico.....	115
Quadro 6.1: Desempenho dos alunos – 1º teste individual 12/05.....	120
Quadro 6.2: Desempenho dos alunos – 1ª Prova Trimestral 21/07.....	133
Quadro 6.3: Desempenho dos alunos no final do 2º trimestre .....	144
Quadro 6.4: Desempenho dos alunos – 2ª Prova Trimestral 22/09.....	144
Quadro 6.5: Desempenho dos alunos – 1º teste individual 3º trimestre....	150
Quadro 6.6: Desempenho dos alunos – Prova Única .....	161
Quadro 7.1: Desempenho dos alunos – na 5ª questão .....	178
Quadro 7.2: Desempenho dos alunos – na 6ª questão.....	179
Quadro 7.3: Desempenho dos alunos – na 7ª e 8ª atividade.....	182
Quadro 7.4: Desempenho dos alunos – na 3ª questão -7ª atividade.....	184
Quadro 7.5: Desempenho dos alunos – na 2ª questão-8ª atividade.....	186
Quadro 7.6: Desempenho dos alunos – na 3ª questão- 8ª atividade.....	187
Quadro 7.7: Desempenho dos alunos – na 4ª questão-8ª atividade.....	189
Quadro 7.8: Desempenho dos alunos – Prova única de 2007.....	192
Quadro 7.9: Desempenho dos alunos – Prova de Avaliação Final.....	200



Quadro 8.1: Origem dos alunos da turma da turma 604 .....	210
Quadro 8.2: Desempenho final das turmas da 5ª série de 2005.....	211
Quadro 8.3: Desempenho da 1ª certificação de 2006 .....	212
Quadro 8.4: Desempenho da 2ª certificação de 2006 .....	213
Quadro 8.5: Desempenho da 3ª certificação de 2006.....	213
Quadro 8.6: Desempenho final da 6ª série de 2006.....	214
Quadro 8.7: Médias do 1º trimestre de 2006.....	215
Quadro 8.8: Médias do 2º trimestre de 2006 .....	216
Quadro 8.9: Médias do 3º trimestre de 2006.....	216
Quadro 8.10: Médias finais do ano letivo de 2006.....	217
Gráfico 8.1: Comparação entre o desempenho do 1º trimestre da turma 803: antigos alunos da 604 x novos alunos.....	217
Gráfico 8.2: Comparação entre o desempenho do 2º trimestre da turma 803: antigos alunos da 604 x novos alunos.....	218
Gráfico 8.3: Comparação entre o desempenho do 3º trimestre da turma 803: antigos alunos da 604 x novos alunos .....	219
Gráfico 8.4: Comparação entre o desempenho anual da turma 803: antigos alunos da 604 x novos alunos .....	219
Gráfico 8.5: Comparação entre o desempenho final da turma 803: antigos alunos da 604 x novos alunos.....	220

## Lista de anexos

Anexo 1 - 1º Teste diagnóstico.....	235
Anexo 2 - 2º Teste diagnóstico.....	242
Anexo 3 - Definição de fração segundo Wu:	
Exercícios complementares.....	249
Anexo 4 - 1º teste individual - 1º trimestre – 2006.....	263
Anexo 5 - Lista de exercícios de apoio - junho – 2006.....	271
Anexo 6 - Lista de Exercícios - julho – 2006.....	281
Anexo 7 - Prova da 1ª certificação - julho – 2006.....	289
Anexo 8 - Prova da 2ª certificação - setembro – 2006.....	294
Anexo 9 - Teste individual – 3º trimestre - outubro – 2006.....	301
Anexo 10 - Prova Única - dezembro – 2006.....	309
Anexo 11 - Prova Avaliação Final (PAF) – 2006.....	313
Anexo 12 - Atividades 7ª- 8ª atividades - 2007:	
Reta Numérica - Expressões Algébricas 2007.....	317
Anexo 13 - Calendários Escolares - 2006 -2007.....	322
Anexo 14 - Relação de Conteúdos - Gráficos - 2006 -2007.....	325