

4

Extensão do modelo de Misme e Fimbel para a determinação da distribuição cumulativa da atenuação diferencial entre dois enlaces convergentes

4.1.

Distribuição cumulativa conjunta das atenuações nos dois enlaces convergentes

Inicialmente, calcularemos a distribuição cumulativa conjunta das atenuações a_1 e a_2 em dois enlaces convergentes de comprimentos D_1 e D_2 que formam entre si um ângulo θ . Esta configuração está representada pelos enlaces AB e AC na Figura 4.1.

Suponhamos uma célula de taxa de precipitação entre R e $R+dR$ e diâmetro $d(R)$. Esta célula define os lugares geométricos também apresentados por linhas tracejadas na Figura 4.1. Num sistema de coordenadas cuja origem coincide com o terminal A e cujo eixo x encontra-se alinhado com o primeiro enlace, as coordenadas dos vértices V_i' ($i = 1, \dots, 4$) do primeiro lugar geométrico são definidas pelo conjunto de expressões (3.5), após as necessárias adaptações de notação. As coordenadas dos vértices V_i'' ($i = 1, \dots, 4$) do segundo lugar geométrico são definidas da mesma forma, seguida de rotação θ das coordenadas no sentido anti-horário. Para que esta célula provoque, simultaneamente, uma atenuação superior a A_{o1} no primeiro enlace e A_{o2} no segundo enlace, é necessário que o centro da célula de chuva pertença, simultaneamente aos interiores dos dois lugares geométricos (referentes ao enlace desejado e referente ao enlace interferente); ou seja, que pertença à sua interseção. No exemplo da Figura 4.1, a interseção é representada pelo polígono $I_2 V_1'' I_1 V_4'$ (linhas contínuas).

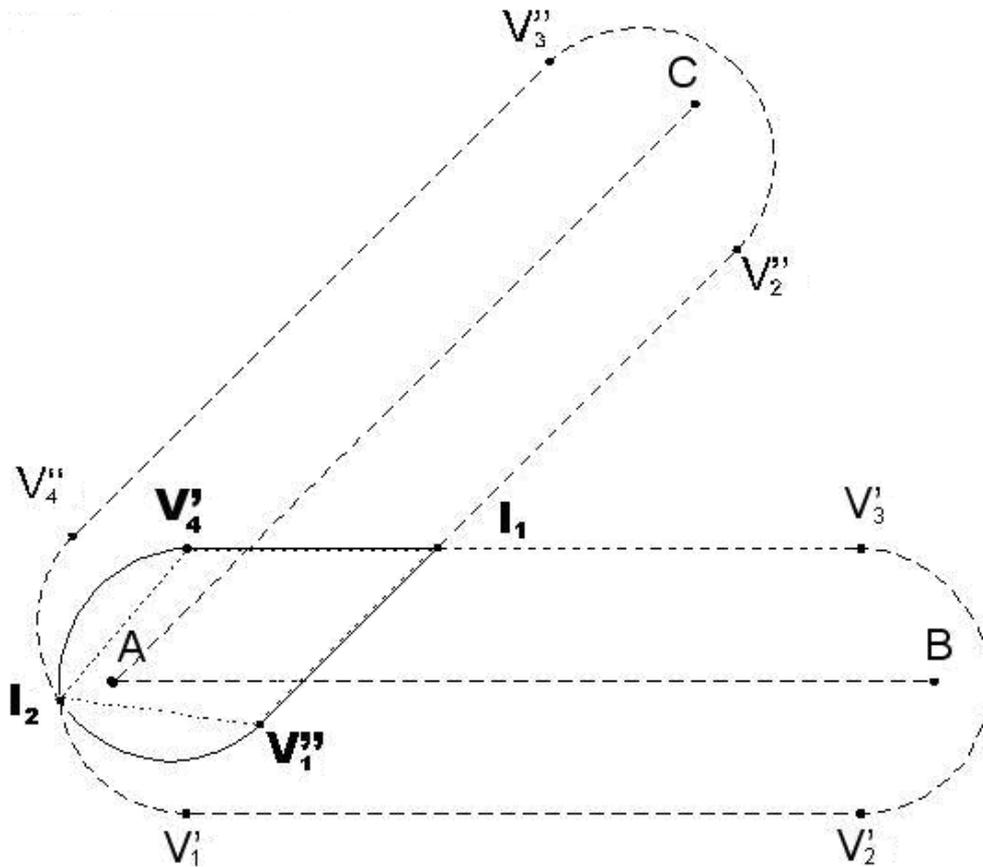


Figura 4.1 - Enlaces desejado AB e interferente AC, lugares geométricos correspondentes e interseção entre ambos (polígono $I_2V_1''I_1V_4'$)

Por um desenvolvimento análogo ao descrito no capítulo 3 (para um enlace), obtemos a distribuição cumulativa conjunta das atenuações nos dois enlaces

$$\Pr\{a_1 > A_{o1}, a_2 > A_{o2}\} = \frac{4}{\pi} \int_{R_{\min}}^{\infty} \frac{S_{\cap}(A_{o1}, A_{o2}, R)}{d^2(R)} p_r(R) dR = \frac{4}{\pi} \int_{P_{\min}}^1 \frac{S_{\cap}[A_{o1}, A_{o2}, R(P_r)]}{d^2[R(P_r)]} dP_r \quad (4.1)$$

onde $S_{\cap}(A_{o1}, A_{o2}, R)$ representa a área da interseção entre os dois lugares geométricos definidos pelos três parâmetros A_{o1} , A_{o2} , R , assim como pelos comprimentos dos dois enlaces e pelo ângulo entre eles. Esta área é calculada exatamente, por intermédio do algoritmo descrito na seção seguinte. Definida a configuração de interesse, as integrais apresentadas na expressão (4.1) são calculadas numericamente para cada par de valores de atenuações (A_{o1} , A_{o2})

definidos sobre uma grade uniforme. A equação (4.1) estende aquela apresentada por Stola [11], que analisou apenas o caso particular $A_{o1} = A_{o2}$.

4.2.

Determinação da área comum aos dois lugares geométricos relativos aos enlaces desejado e interferente

Inicialmente, a partir dos dados dos dois enlaces convergentes (comprimento de cada enlace e ângulo comum), das atenuações A_{o1} e A_{o2} e do diâmetro da célula de chuva $d(R)$, cada um dos dois lugares geométricos é caracterizado pelos seus quatro vértices e pelos seus quatro segmentos (de reta ou de arcos de circunferência), formados por vértices consecutivos. Observamos que os lugares geométricos são convexos, de modo que a interseção entre eles também será.

Os pontos que determinam a interseção são de dois tipos: (1) ponto interior, existente quando um vértice de um lugar geométrico está no interior do outro lugar geométrico; e (2) ponto de interseção, existente quando segmentos de lugares geométricos distintos se cortam. Um vértice de um lugar geométrico é considerado um ponto interior quando atende a um dos dois testes: (1) se encontra no interior do retângulo formado pelos vértices do outro lugar geométrico; ou (2) se encontra nos interiores dos segmentos de círculo do outro lugar geométrico. Por outro lado, os pontos de interseção são identificados pelos cruzamentos entre dois segmentos de reta, entre um segmento de reta e um arco de circunferência ou entre dois arcos de circunferência, pertencentes a dois lugares geométricos distintos. Todos estes pontos são determinados por intermédio de algoritmos apropriados de geometria computacional [19] e, em conjunto, definem os vértices da interseção entre os dois lugares geométricos.

Após determinarmos os pontos interseção e pontos interiores, temos uma coleção de vértices, sem ordenação. Para ordená-los e formarmos o polígono básico (que une os vértices da interseção por segmentos de reta, conforme mostra a linha pontilhada da Figura 4.1), escolhemos um ponto como vértice inicial (no canto superior esquerdo da coleção) e ordenamos os demais pontos em ordem crescente dos coeficientes angulares das retas que os unem a este vértice inicial. Este polígono básico também é convexo.

Após a formação do polígono básico, resta determinar se cada um dos lados do polígono interseção corresponde a um segmento de reta ou a um arco de circunferência. Para tanto, guardamos informações relativas à formação de cada vértice do polígono: (1) no caso de um ponto interior, os índices do vértice (1 a 4) e do lugar geométrico (1 ou 2) correspondentes; (2) no caso de um ponto de interseção, os dois índices dos segmentos (1 a 4) e dos correspondentes lugares geométricos (1 ou 2), bem como dos centros dos arcos de circunferência, quando aplicável. Com o auxílio destas informações adicionais, conseguimos determinar se dois vértices consecutivos do polígono interseção devem ser unidos por um segmento de reta ou por um arco de circunferência e, no segundo caso, a posição do centro do arco.

A área do polígono básico é igual à soma das áreas dos triângulos formados pelos seus lados e pelas diagonais traçadas a partir de qualquer de seus vértices. A área de cada triângulo é calculada pela metade do módulo do produto vetorial de dois dos seus lados. A área de cada segmento circular é facilmente calculada a partir do seu raio e ângulo interno. A soma de todas estas áreas é igual ao valor exato da área $S_n(A_{o1}, A_{o2}, R)$ comum aos dois lugares geométricos.

4.3.

Determinação da distribuição cumulativa da atenuação diferencial

Apresentaremos dois métodos, sendo preferido o segundo, por evitar uma derivação dupla e os possíveis erros numéricos associados, assim como por fornecer os mesmos resultados mais rapidamente.

O primeiro método determina, inicialmente, a função densidade de probabilidade conjunta $p_{a_1 a_2}(A_1, A_2)$ das atenuações a_1 e a_2 por intermédio da dupla derivação numérica da correspondente distribuição cumulativa complementar conjunta $C_{a_1 a_2}(A_1, A_2)$ calculada nos pontos da grade regular a partir da expressão (4.1)

$$p_{a_1 a_2}(A_{1o}, A_{2o}) = \frac{\partial^2}{\partial A_{1o} \partial A_{2o}} C_{a_1 a_2}(A_{1o}, A_{2o}) = \frac{\partial^2}{\partial A_{1o} \partial A_{2o}} \Pr\{a_1 > A_{o1}, a_2 > A_{o2}\} \quad (4.2)$$

Em seguida, para a determinação da distribuição cumulativa da atenuação diferencial $\Pr\{a_1 - a_2 > A_0\}$, devemos realizar a integração dupla da função densidade de probabilidade $p_{a_1 a_2}(A_1, A_2)$ na região de interesse, acima da reta ($a_1 - a_2 = A_0$), conforme indica a Figura 4.2. Isto é,

$$\Pr\{a_1 - a_2 > A_0\} = \int_0^{A_{1\max} - A_0} \int_{A_2 + A_0}^{A_{1\max}} p_{a_1 a_2}(a_1, a_2) da_1 da_2 \quad (4.3)$$

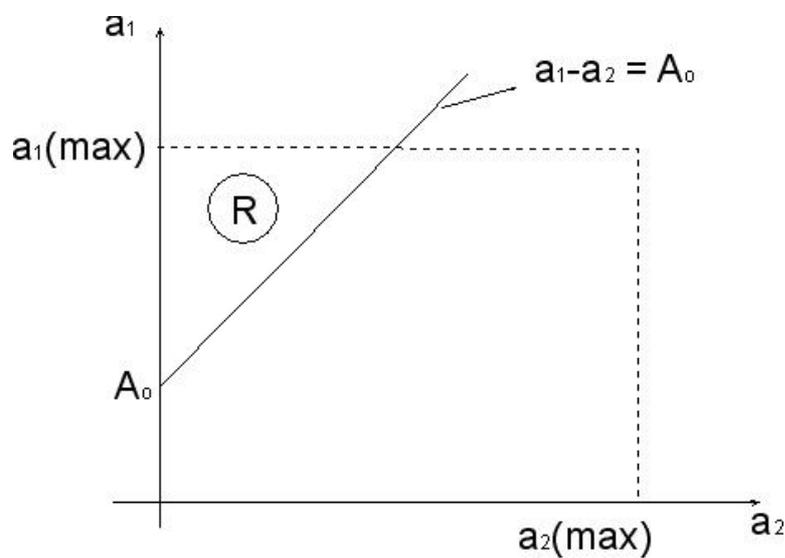


Figura 4.2 - Região (R) de interesse para a determinação de $\Pr\{a_1 - a_2 > A_0\}$ por intermédio da integração da função densidade de probabilidade $p_{a_1 a_2}(A_1, A_2)$.

No segundo método, fazemos a integração numérica da região de interesse, acima da reta ($a_1 - a_2 = A_0$), diretamente a partir da distribuição cumulativa conjunta das atenuações a_1 e a_2 . Para tanto, dividimos a área de interesse em grande quantidade de estreitos retângulos verticais de largura ϵ estabelecida pela grade uniforme, conforme mostrado em **negrito** na Figura 4.3.

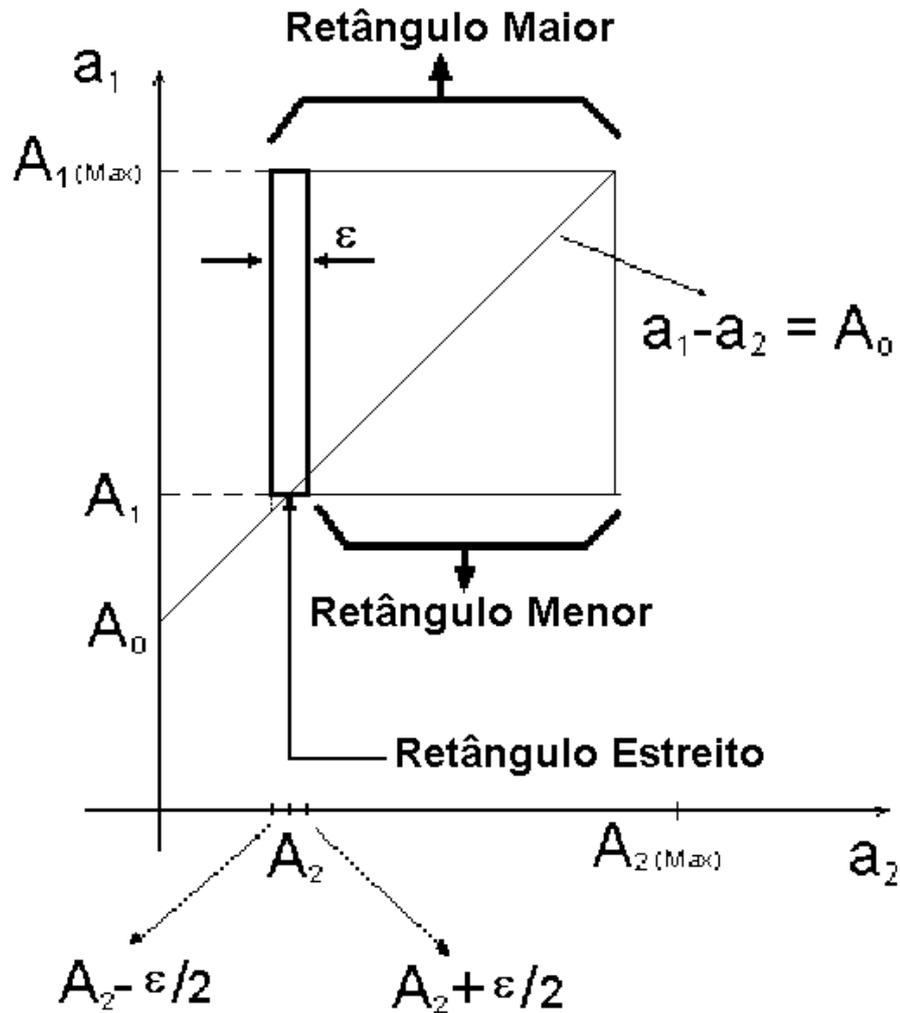


Figura 4.3 - Região de interesse (em negrito) para o cálculo parcial de $\Pr\{a_1 - a_2 > A_0\}$ diretamente a partir da distribuição cumulativa conjunta das atenuações a_1 e a_2

Em seguida, observamos que a probabilidade de ocorrência do evento caracterizado pelo retângulo estreito será dada pela diferença

$$\begin{aligned}
 & C_{a_1 a_2}(A_2 + A_0, A_2 - \varepsilon/2) - C_{a_1 a_2}(A_2 + A_0, A_2 + \varepsilon/2) = \\
 & = \Pr\{a_1 > A_2 + A_0, a_2 > A_2 - \varepsilon/2\} - \Pr\{a_1 > A_2 + A_0, a_2 > A_2 + \varepsilon/2\} = \\
 & = \int_{A_2 - \varepsilon/2}^{A_2 + \varepsilon/2} \int_{A_0 + A_2}^{A_{1\max}} p_{a_1 a_2}(a_1, a_2) da_1 da_2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

e que a área de integração definida no lado direito da expressão (4.4) só difere da sua correspondente na expressão (4.3) por incluir um pequeno triângulo acima da reta $a_1 = A_1 = (A_2 + A_0)$ e por ignorar outro pequeno triângulo abaixo da mesma reta. Estes triângulos, observados na Figura 4.3, são simétricos em relação ao vértice comum (A_1, A_2) , têm área iguais e pequenas em relação à do retângulo estreito. Adicionalmente, os dois triângulos são próximos e a função densidade de probabilidade conjunta das atenuações não apresenta descontinuidades. Portanto, as integrais de $p_{a_1, a_2}(a_1, a_2)$ nos interiores dos dois triângulos são aproximadamente iguais. Desta forma, a função distribuição cumulativa complementar da atenuação diferencial pode ser calculada diretamente a partir dos resultados da expressão (4.1) por intermédio da aproximação

$$\begin{aligned} \Pr\{a_1 - a_2 > A_0\} &\approx \sum_{i=1}^N \Pr\{a_1 > A_{2i} + A_0, A_{2i} - \epsilon/2 < a_2 < A_{2i} + \epsilon/2\} \approx \\ &\approx \sum_{i=1}^N [\Pr\{a_1 > A_{2i} + A_0, a_2 > A_{2i} - \epsilon/2\} - \Pr\{a_1 > A_{2i} + A_0, a_2 > A_{2i} + \epsilon/2\}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

abrindo o somatório todos os retângulos estreitos caracterizados na Figura 4.3. Testes realizados comprovaram que o somatório caracterizado na expressão (4.5) fornece uma excelente aproximação para a função distribuição cumulativa complementar da atenuação diferencial quando o valor de A_0 excede alguns decibéis.