

3

O modelo de Misme e Fimbel para o cálculo da distribuição cumulativa de atenuação devida à chuva em um enlace isolado

3.1.

Descrição do modelo

O modelo de Misme e Fimbel original [10] adota as seguintes características para a chuva:

- a precipitação intensa se apresenta sob a forma de células de chuva cilíndricas circulares verticais de taxa de precipitação R (mm/h) constante, situadas no interior de região extensa na qual a taxa de precipitação R_{res} (mm/h) é residual;
- o diâmetro d (km) de uma célula de chuva se relaciona à taxa de precipitação no seu interior por intermédio da relação

$$d(R) = d_o (100/R)^{\beta} \quad (3.1)$$

sendo adotados os valores $d_o = 2,2$ km e $\beta = 0,4$;

- a taxa de precipitação residual na região circular de centro coincidente com o do enlace que envolve a célula especificada pela expressão (2.1) é calculada pela equação

$$R_{res} = R_o (1 - e^{-cR/R_o}) \quad (3.2)$$

sendo selecionados os valores $R_o = 6,7$ mm/h, $c = 0,105$ e $D_o = 33$ km para o diâmetro da região;

- a taxa de precipitação em um ponto arbitrário da região de interesse varia aleatoriamente no tempo, sendo caracterizada pela sua distribuição cumulativa $P_r(R)$;

- a distribuição cumulativa $P_r(R)$ independe do ponto de observação na região de interesse;
- em cada instante de tempo, a atenuação em um enlace é causada por apenas uma célula de chuva;
- a atenuação específica γ (dB/km) se relaciona à taxa de precipitação por intermédio da relação $\gamma = k R^\alpha$, sendo os parâmetros k e α determinados em função da frequência de operação e da polarização de acordo com a versão mais recente da Recomendação ITU-R P.838 [12].

Suponhamos agora que a interseção entre uma célula de taxa de precipitação R e um enlace AB de comprimento D (km) é uma corda de comprimento L_0 (km), conforme mostra a Figura 3.1.

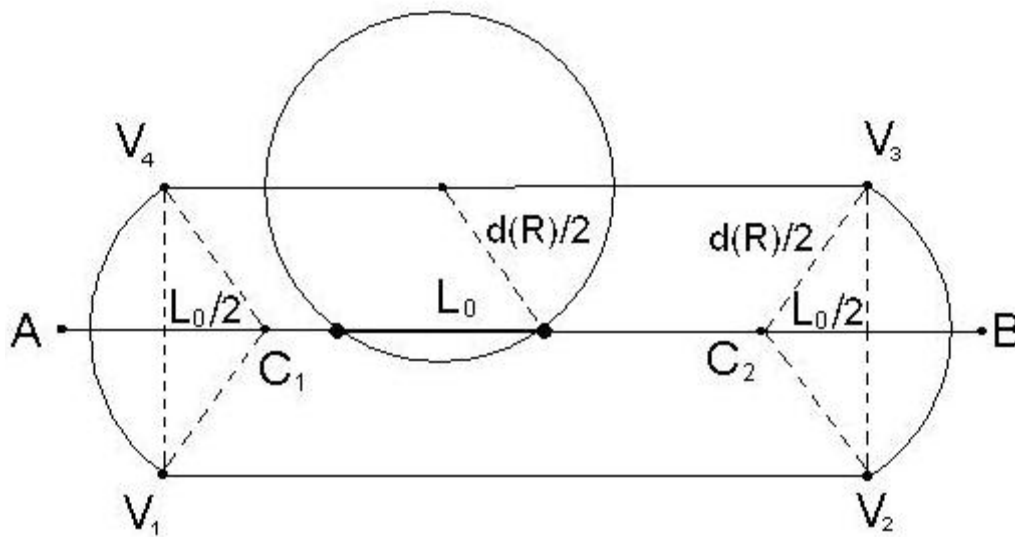


Figura 3.1 - Lugar geométrico dos centros de célula de chuva (círculos com diâmetro $d(R)$) que interceptam o enlace AB com um comprimento igual ou superior a L_0

A atenuação A_o (dB) provocada no enlace é

$$A_o = kR^a L_o + k(D' - L_o)R_{res}^a \quad (3.3)$$

onde $D' = D$ se $D < D_0$ ou $D' = D_0$ se $D \geq D_0$. Logo

$$L_o(A_o, R) = \frac{(A_o/k) - D'R_{res}^a}{R^a - R_{res}^a} \quad (3.4)$$

Observamos que, para cada valor de A_o , existe uma taxa de precipitação mínima $R_{\min}(A_o)$ que garante que, simultaneamente, $L_o(A_o, R_{\min}) \leq d(R_{\min})$ e $L_o(A_o, R_{\min}) \leq D$. Este valor deve ser determinado a partir das igualdades correspondentes.

Vamos considerar fixos os valores de A_o e R (maior que R_{\min}) e supor que a célula de diâmetro $d(R)$ pode se deslocar, desde que mantenha constante o valor L_o de sua interseção com o enlace. Observamos na Figura 3.1 que o centro da célula descreve um lugar geométrico composto, no caso geral, de dois segmentos de reta e dois arcos de círculo, sendo sua construção detalhada na seção 3.3. Num sistema de coordenadas cuja origem coincide com o terminal da esquerda e cujo eixo x encontra-se alinhado com o enlace, as coordenadas dos vértices e dos centros dos arcos de círculo que definem o lugar geométrico são as seguintes (para um sistema de coordenadas centrado na extremidade A do enlace AB):

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{L_o}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - L_o^2} \right) & V_2 &= \left(D - \frac{L_o}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - L_o^2} \right) \\ V_3 &= \left(D - \frac{L_o}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - L_o^2} \right) & V_4 &= \left(\frac{L_o}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - L_o^2} \right) \\ C_1 &= (L_o, 0) & C_2 &= (D - L_o, 0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Notamos que o lugar geométrico pode apresentar formatos diferentes do ilustrado na Figura 1. Por exemplo, se valores de A_o e R forem tais que $d(R) = L_o$, então $V_1 = V_4$, $V_2 = V_3$ e o lugar geométrico se transforma num segmento de reta. Por outro lado, se valores de A_o e R forem tais que $L_o = D$, então $V_1 = V_2$, $V_3 = V_4$ e o lugar geométrico será formado apenas por dois arcos de círculo cujos centros coincidem com as extremidades do enlace.

Com base no teorema da probabilidade total [6], podemos escrever a seguinte equação geral para a distribuição cumulativa da atenuação devida à chuva no enlace

$$\Pr\{A > A_o\} = \int_{R_{\min}}^{\infty} \Pr\{A > A_o | R\} q(R) dR \quad (3.6)$$

Nesta equação, $q(R) dR$ é a probabilidade de que exista uma célula de taxa de precipitação entre R e $R+dR$ e $\Pr\{A > A_o | R\}$ é a probabilidade de que esta célula provoque uma atenuação superior a A_o no enlace. Para tanto, o centro da célula deve estar situado no interior do lugar geométrico, cuja área $S(A_o, R)$ é igual a

$$S(A_o, R) = (D - L_o) \sqrt{d^2 - L_o^2} + \frac{1}{2} \left[d^2 \arctan \left(\frac{\sqrt{d^2 - L_o^2}}{L_o} \right) - L_o \sqrt{d^2 - L_o^2} \right] \quad (3.7)$$

O primeiro dos dois termos do lado direito da expressão (3.7) separados pelo sinal de adição representa a área do retângulo $V_1V_2V_3V_4$ formado pelos quatro vértices do lugar geométrico mostrado na Figura 3.1. O segundo termo representa a área dos dois segmentos de círculo mostrados na mesma Figura, centrados em C_1 e C_2 , e limitados pelas cordas V_1V_4 e V_2V_3 , respectivamente. Adicionalmente, a expressão confirma a necessidade das condições apresentadas acima para a determinação de R_{\min} , já que cada uma destas áreas deve ser real e positiva.

Podemos expressar a probabilidade de que uma célula da taxa de precipitação R provoque uma atenuação superior a A_o na forma

$$\Pr\{A > A_o | R\} = S(A_o, R) / S_{\text{ref}} \quad (3.8)$$

onde $S(A_o, R)$ representa a área calculada pela equação (3.7) e $(1 / S_{\text{ref}})$ é uma constante que representa a probabilidade de que esta célula se encontre dentro de uma área unitária. Observamos que a probabilidade expressa em (3.8) é proporcional à área $S(A_o, R)$ do lugar geométrico.

Suponhamos agora que a taxa de precipitação compreendida entre R e $R+dR$ é observada em um ponto arbitrário da região de interesse. Para que este evento ocorra, é necessário que uma célula de taxa de precipitação exista e que seu centro esteja localizado no interior de um círculo de raio $d(R)/2$ centrado no ponto. A probabilidade de que o evento ocorra é

$$p_r(R) dR = \frac{\pi d^2/4}{S_{ref}} q(R) dR \rightarrow q(R) dR = S_{ref} \frac{p_r(R) dR}{\pi d^2/4} \quad (3.9)$$

onde $p_r(R)$ é a função densidade de probabilidade da taxa de precipitação. Substituindo as expressões (3.8) e (3.9) na equação (3.6), encontramos finalmente

$$\Pr\{A > A_o\} = \frac{4}{\pi} \int_{R_{min}}^{\infty} \frac{S(A_o, R)}{d^2(R)} p_r(R) dR = \frac{4}{\pi} \int_{P_{min}}^1 \frac{S[A_o, R(P_r)]}{d^2[R(P_r)]} dP_r \quad (3.10)$$

A primeira integral na equação (3.10) foi apresentada no artigo original de Misme e Fimbel [10]. A segunda integral, que resulta da primeira após mudança de variáveis, utiliza a inversa $R(P_r)$ da distribuição cumulativa da taxa de precipitação e P_{min} , o valor desta distribuição cumulativa correspondente a R_{min} . A literatura especializada e as bases de dados contendo resultados experimentais geralmente apresentam a distribuição cumulativa da taxa de precipitação $P_r(R)$. A determinação de $p_r(R)$ por intermédio da derivação numérica de $P_r(R)$ pode produzir flutuações artificiais. Por estes motivos, poderíamos preferir realizar o cálculo da distribuição cumulativa da atenuação por intermédio da segunda integral da equação (3.10). Entretanto, poderíamos supor um modelo para $P_r(R)$ e estimar seus parâmetros com base na distribuição cumulativa medida. Neste caso, a determinação de $p_r(R)$ por intermédio da derivação analítica de $P_r(R)$ geralmente não apresenta dificuldades e a primeira integral da equação (3.10) pode ser utilizada sem cuidados adicionais, desde que o modelo represente adequadamente a distribuição medida. Esta alternativa foi utilizada por Misme e Fimbel [10], que adotaram um modelo lognormal para a taxa de precipitação.

3.2. Parâmetros utilizados

Desprezamos, por ser mínima, a influência da região com taxa de precipitação residual R_{res} . Isto simplifica as equações (3.3) e (3.4), que passam a ser representadas por

$$A_o = kR^\alpha L_o \quad (3.11)$$

$$L_o(A_o, R) = \frac{(A_o/k)}{R^\alpha} \quad (3.12)$$

Para a determinação da taxa de precipitação mínima R_{min} da equação (3.10), é necessário observar que o trecho interceptado pela célula de chuva é menor que seu diâmetro $L_o \leq d(R)$ e, também, menor que o comprimento do enlace $L_o \leq D$. Na situação limite, temos $L_o = d(R)$. Substituindo as expressões (3.12) e (3.1) nesta igualdade, obtemos a expressão para R_{min}

$$R_{min} = \left[\frac{A_o}{kd_o(100)^\beta} \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}} \quad (3.13)$$

Nas faixas de frequências utilizadas nesta dissertação, temos, para a polarização vertical de todos os enlaces utilizados, $a_v = 1,128$ e $k_v = 0,03350$ para $f = 15$ GHz e $a_v = 1,1088$ e $k_v = 0,0661$ para $f = 19$ GHz [12].

Diversos autores realizaram medidas do diâmetro real médio da célula de chuva em função da taxa de precipitação com o auxílio de radares localizados tanto em regiões de climas temperados [13]-[16] quanto na região amazônica [17],[18]. Os resultados destes estudos em regiões de climas temperados apresentaram uma concordância razoável com os parâmetros do modelo representado pela expressão (3.1). Entretanto, foi observado que, na região amazônica, os diâmetros das células de chuva podem ser superiores ao definido pela expressão citada, sendo, portanto, possível que o mesmo se aplique à região de São Paulo. Adicionalmente, verificamos que a combinação da hipótese de que a atenuação em um enlace é causada por apenas uma célula de chuva com os valores utilizados na expressão (3.1) para os parâmetros β e d_o não é capaz de

reproduzir as atenuações medidas, que alcançam 35 dB ou mais, nos enlaces relativamente longos (12 km a 43 km) que convergem na estação de Rua dos Ingleses, São Paulo. Para estender a aplicabilidade do modelo de Misme e Fimbel para estes enlaces, substituímos os valores originais dos parâmetros da expressão (3.1) por outros baseados no diâmetro efetivo da célula de chuva $d(R_p)$ tal que, para cada percentagem de tempo p ,

$$A_p = kR_p^\alpha d(R_p) = kR_p^\alpha d_o \left(\frac{100}{R_p} \right)^\beta \quad (3.14)$$

sendo os valores de A_p e R_p obtidos a partir das respectivas distribuições cumulativas medidas. Para a determinação dos valores dos parâmetros d_o e β , a expressão (3.14) foi reescrita na forma

$$\log[d(R_p)] = \log\left(\frac{A_p}{kR_p^\alpha}\right) = \log d_o + \beta \log\left(\frac{100}{R_p}\right) \quad (3.15)$$

As Figuras 3.2 e 3.3 apresentam os dados referentes aos enlaces: (1) convergentes na estação de Rua dos Ingleses, São Paulo, e com terminais nas estações Bradesco II (BRA), Censp 15 (C15), Barueri (BAR) e Paranapiacaba (PAR); e (2) convergentes no Masashino Electrical Communication Laboratory (ECL), Japão, e com terminais nas estações Shakujii, Shinkawa e Sakai. Os resultados dos ajustes de segmentos de reta aos dados pelo método dos mínimos quadrados, realizados para a estimação dos parâmetros d_o e β , estão mostrados na Figura 3.4. Os valores destes parâmetros, juntamente com dados adicionais dos enlaces, estão também apresentados na Tabela 3.1. Observamos que, conforme esperado, os valores efetivos dos parâmetros d_o e β são mais próximos dos valores reais medidos com o auxílio de radares para os enlaces curtos utilizados no experimento realizado no Japão. Na presente dissertação, utilizamos $d_o = 7,0$ km e $\beta = 0,4$ para comparações entre previsões de modelos e medidas realizadas em São Paulo e $d_o = 2,8$ km e $\beta = 0,14$ para comparações entre previsões de modelos e medidas realizadas no Japão. Observa-se que o valor do parâmetro d_o referente a São Paulo é intermediário entre os obtidos na Tabela 3.1 para os enlaces com

terminais em Bradesco II, Cenesp 15 e Barueri. Por outro lado, observou-se que a influência do parâmetro β nos cálculos é relativamente reduzida, de modo que seu valor original apresentado na equação (3.1) foi mantido. Para os cálculos correspondentes ao Japão, foram utilizados os valores apresentados na Tabela 3.1 para o enlace com terminal em Sakai.

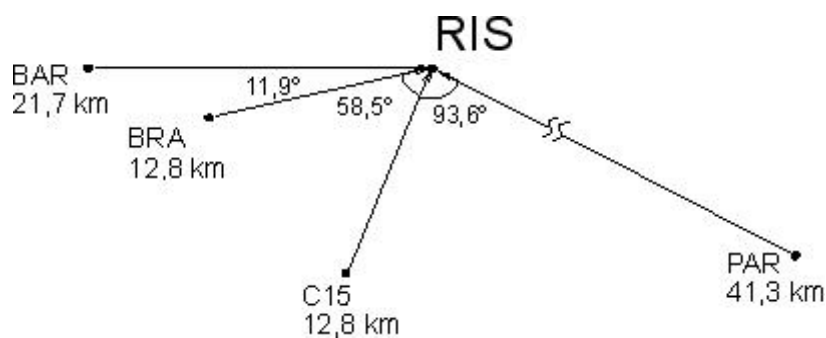


Figura 3.2 - Configuração dos enlaces convergentes na estação de Rua dos Ingleses (RIS), São Paulo

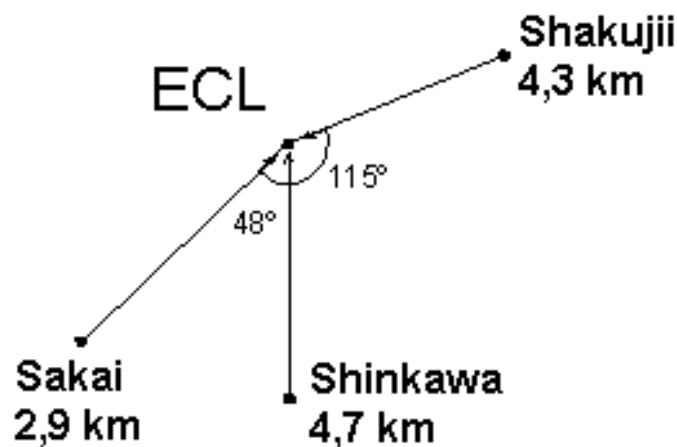


Figura 3.3 - Configuração dos enlaces convergentes no Masashino Electrical Communication Laboratory (ECL), Japão. Adaptada das referências [1]-[3].

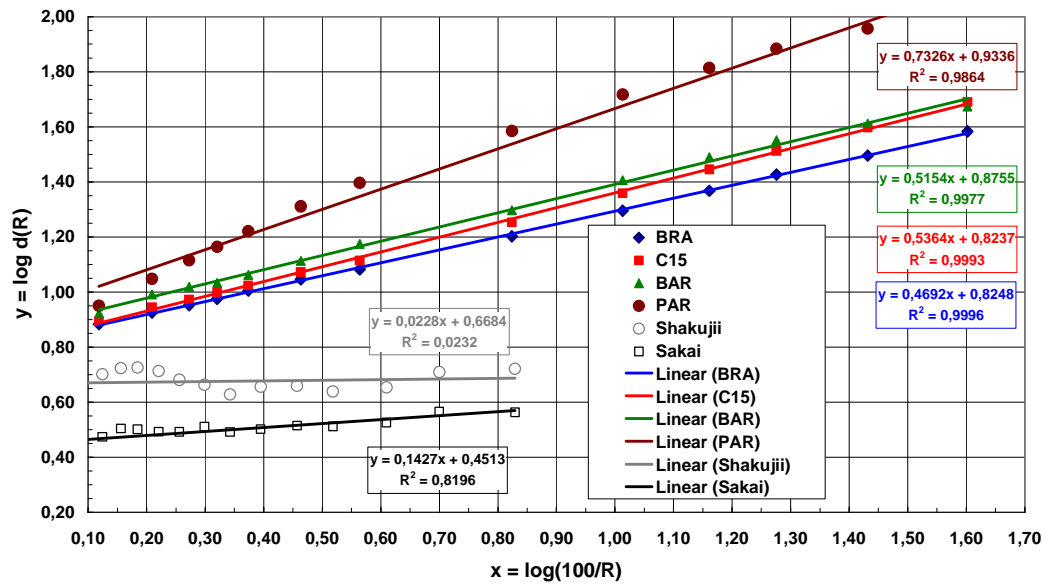


Figura 3.4 - Determinação dos parâmetros d_0 e β para os enlaces utilizados nas medidas. Dados do Japão adaptados das referências [1]-[3].

Tabela 3.1 - Dados dos enlaces utilizados nas medidas

Enlace	Comprimento	Frequência	d_0	β
Bradesco II	12,8 km	15 GHz	6,68 km	0,4692
Cenesp 15	12,8 km	15 GHz	6,66 km	0,5364
Barueri	21,7 km	15 GHz	7,50 km	0,5154
Paranapiacaba	41,3 km	15 GHz	8,58 km	0,7326
Shakujii	4,3 km	19 GHz	4,66 km	0,0228
Sakai	2,9 km	19 GHz	2,83 km	0,1427
Shinkawa	4,7 km	19 GHz	-	-