3
Solução exata usando autovalores e autovetores

O cálculo exato das prioridades de um problema pode ser feito por vários métodos, cujos principais seriam: o método dos mínimos quadrados (LSM), o método dos mínimos quadrados logarítmico (*logarithmic* LSM) e o método do autovetor (Harker e Vargas, 1987). Segundo estes autores, entretanto, o método do autovetor parece ser o único correto para tratar matrizes que não sejam consistentes.

Para formalizar a notação, chamemos cada matriz de julgamentos $n \times n$ de A, relacionando i com as linhas e j com as colunas, com i e j = 1, 2, ..., n.

A solução se dá a partir da estimação do vetor x da matriz, que é o vetor de prioridades. Esse vetor de prioridades deve satisfazer a relação $Ax = cx$, com c constante e $c > 0$. Para satisfazer essa relação, o vetor deve ser um múltiplo positivo do autovetor principal de A e c deve ser o autovalor máximo de A (Saaty, 2003).

Na teoria, a utilização da representação $Ax = cx$ significaria que estamos falando de matrizes quase consistentes. Por uma matriz quase consistente entende-se uma matriz $A = (a_{ij})$ que é uma pequena perturbação de uma matriz consistente $W = (w_i / w_j)$. Matrizes com alto grau de inconsistência não serão tratadas, por serem consideradas matrizes que contêm julgamentos aleatórios. Nesses casos os julgamentos teriam de ser refeitos ou passar por métodos de melhoria de consistência.

A representação dos pesos relativos w_i / w_j é eficiente para mostrar a dominância do julgamento de uma alternativa em relação a outra, e é muito usual na literatura. Se o tomador de decisão, por exemplo, afirma que a alternativa 1 é moderadamente melhor do que a alternativa 2 (nota 3 na escala), o elemento a_{12} da matriz vale 3/1, isto é, $w_i = 3$ e $w_j = 1$. E também se sabe que o elemento a_{21} vale 1/3. A matriz ganha a nova representação a seguir.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 6 – Representação racional da matriz consistente

Uma matriz quase consistente $A = (a_{ij})$ é uma pequena perturbação multiplicativa de uma matriz consistente $W = (w_i / w_j)$, e tem um autovetor x, que é uma pequena perturbação do autovetor w da matriz consistente. A relação entre as matrizes obedece ao produto de Hadamard $A = W \circ E$, onde a perturbação $E = (\varepsilon_{ij})$ afeta cada termo da matriz multiplicando-se a ele ($a_{ij}\varepsilon_{ij}$). Também vale que $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}^{-1}$. E quando não há perturbação, $\varepsilon_{ij} = 1$.

O produto de Hadamard entre duas matrizes, necessariamente de mesma dimensão, é a multiplicação direta entre os termos de mesma posição, então:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by \\ cz & dw \end{bmatrix}$$

É freqüente se ver na literatura a relação $Ax = cx$ do cálculo do autovetor e do autovalor representada por $Aw = \lambda_{\max} w$, onde $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ é o autovetor principal e $\lambda_{\max}$ é o autovalor máximo correspondente.

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} = \lambda_{\max} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

E na matriz quase consistente, o somatório em j das perturbações ε_{ij} de seus elementos em relação aos da matriz absolutamente consistente equivalem a $\lambda_{\max}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = \lambda_{\max} \tag{4}$$

Dito de outra forma, quando a matriz tiver uma inconsistência aceitável, ou seja, representar uma perturbação relativamente pequena, a soma de todos os ε_{ij} de uma linha qualquer é igual ao valor de $\lambda_{\max}$.

Em Saaty (2003), vemos que $\lambda_{\max} \geq n$. Somente quando a matriz for consistente, teremos todos os $\varepsilon_{ij} = 1$, e nesse caso $\lambda_{\max}$ se iguala a n (a ordem da matriz, ou ainda o número de alternativas). O desvio de $\lambda_{\max}$ em relação a n é então o que possibilita calcular a razão de inconsistência dos julgamentos.