

5

Matrizes Hamiltonianas

Ao longo dos últimos 25 anos, o estudo das matrizes Hamiltonianas vêm ganhando interesse da comunidade científica. Isto se deve, em parte, a sua aplicação em áreas como teoria do controle, processamento de sinais, etc. Além disso, tal problema ainda está relativamente aberto devido ao alto custo computacional associado – $\mathcal{O}(n^3)$.

Geralmente, métodos utilizados para a obtenção de autovalores de uma matriz Hamiltoniana não preservam a estrutura da matriz. Em (18) é citado pela primeira vez um método numérico que preserva a estrutura da matriz Hamiltoniana, destacando-se por uma maior eficiência e pela sua robustez. Este capítulo descreve o método tipo Jacobi quaterniônico para matrizes Hamiltonianas, que também preservam a estrutura da matriz cliente através do uso de matrizes simpléticas.

5.1

Conceitos Importantes

Uma matriz real $2n \times 2n$ H da forma

$$H = \begin{bmatrix} E & F \\ G & -E^T \end{bmatrix}$$

é chamada Hamiltoniana se, dados $E, F, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$, temos $F^T = F$ e $G^T = G$. Podemos ainda caracterizar as matrizes Hamiltonianas pelo conjunto $\mathcal{H}$ de todas as matrizes Hamiltonianas $2n \times 2n$ tal que:

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} | (JH)^T = JH\}$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ e I é a matriz identidade de ordem n . Da mesma forma, podemos definir o conjunto de todas as matrizes anti-Hamiltonianas como:

$$\mathcal{W} = \{W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} | (JW)^T = -JW\}$$

Matrizes anti-Hamiltonianas possuem também a seguinte estrutura em bloco

$$W = \begin{bmatrix} A & B \\ C & A^T \end{bmatrix}$$

onde $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B^T = -B$ e $C^T = -C$.

Uma maneira importante de explorar a estrutura de matrizes Hamiltonianas ou anti-Hamiltonianas consiste em utilizar estruturas que preservam sua similaridade. A fim de obter tal estrutura, podemos utilizar matrizes reais simpléticas, definidas por:

$$\mathcal{S} := \{S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} | S^T J S = J\}$$

Matrizes reais simpléticas possuem as seguintes propriedades:

- formam um grupo multiplicativo com a operação de multiplicação;
- a inversa de uma matriz simplética também é uma matriz simplética;
- toda matriz simplética é não-singular;
- o produto de duas matrizes simpléticas também é uma matriz simplética;
- preservam a estrutura bilinear da matriz Hamiltoniana ou anti-Hamiltoniana;

Apartir dessa última propriedade podemos escrever:

Seja $\mathcal{S}$ uma matriz simplética, então:

$$\begin{aligned} H \in \mathcal{H} &\Rightarrow S^{-1} H S \in \mathcal{H} \\ W \in \mathcal{W} &\Rightarrow S^{-1} W S \in \mathcal{W} \end{aligned}$$

Consideremos uma bijeção em $\mathbb{R}^{2n \times 2n}$ definida por $A \mapsto JA$, onde $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$. Tal função leva matrizes simétricas em matrizes Hamiltonianas e matrizes anti-simétricas em matrizes anti-Hamiltonianas.

De posse da base quaterniônica definida no apêndice [A], podemos montar a seguinte tabela:

$\otimes$	1	i	j	k
1	W	W	H	W
i	H	H	W	H
j	H	H	W	H
k	H	H	W	H

Tabela 5.1: Matrizes 4×4 Hamiltonianas (H) e anti-Hamiltonianas (W)

Teorema 5.1.1 (i) Uma matriz Hamiltoniana pode ser decomposta na seguinte forma quaterniônica:

$$b(1 \otimes j) + p \otimes 1 + q \otimes i + r \otimes k$$

(ii) Uma matriz anti-Hamiltoniana tem a seguinte forma quaterniônica equivalente:

$$b(1 \otimes 1) + p \otimes j + 1 \otimes (ci + dk)$$

onde $p, q, r \in \mathcal{P}$ e $b, c, d \in \mathbb{R}$.

Segundo (14), podemos obter os valores de $p, q, r \in \mathcal{P}$ e $b, c, d \in \mathbb{R}$ da seguinte forma:

Seja H uma matriz simétrica Hamiltoniana:

$$b = \frac{1}{4}(h_{13} - h_{31} + h_{24} - h_{42}) \quad (5-1)$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(h_{21} - h_{12}), \quad p_2 = \frac{1}{4}(h_{24} - h_{13} + h_{31} + h_{31} - h_{42}), \quad p_3 = \frac{1}{2}(h_{41} - h_{14}) \quad (5-2)$$

$$q_1 = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}), \quad q_2 = \frac{1}{2}(h_{41} + h_{14}), \quad q_3 = \frac{1}{4}(h_{24} - h_{13} + h_{42} - h_{31}) \quad (5-3)$$

$$r_1 = \frac{1}{4}(h_{13} + h_{31} + h_{24} + h_{42}), \quad r_2 = -\frac{1}{2}(h_{21} + h_{21}), \quad r_3 = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) \quad (5-4)$$

Seja W uma matriz anti-Hamiltoniana:

$$c = \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22}), \quad c = \frac{1}{2}(w_{12} - w_{21}), \quad d = \frac{1}{2}(w_{14} + w_{32}) \quad (5-5)$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(w_{32} - w_{14}), \quad p_2 = \frac{1}{2}(w_{11} - w_{22}), \quad p_3 = \frac{1}{2}(w_{12} + w_{21}) \quad (5-6)$$

Utilizando o teorema 5.1.1, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 5.1.2 (a) $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é Hamiltoniana simétrica $\Leftrightarrow \exists q, r \in \mathcal{P}$ tal que $H = q \otimes i + r \otimes k$
 (b) $H \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é Hamiltoniana anti-simétrica $\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{P}, \exists b \in \mathbb{R}$ tal que $H = b(1 \otimes j) + p \otimes 1$
 (c) $W \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é anti-Hamiltoniana simétrica $\Leftrightarrow \exists p \in \mathcal{P}, \exists b \in \mathbb{R}$ tal que $W = b(1 \otimes 1) + p \otimes j$
 (d) $W \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é anti-Hamiltoniana anti-simétrica $\Leftrightarrow \exists c, d \in \mathbb{R}$ tal que $W = 1 \otimes (ci + dk)$

Eis o conjunto de fórmulas que permite escrever as matrizes citadas na proposição em sua forma quaterniônica:

simétrica Hamiltoniana:

$$q_1 = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22}), \quad q_2 = h_{14}, \quad q_3 = \frac{1}{2}(h_{24} - h_{13}) \quad (5-7)$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(h_{13} + h_{24}), \quad r_2 = -h_{12}, \quad r_3 = \frac{1}{2}(h_{11} - h_{22}) \quad (5-8)$$

anti-simétrica Hamiltoniana:

$$b = \frac{1}{2}(h_{13} + h_{24}), \quad p_1 = h_{21}, \quad p_2 = \frac{1}{2}(h_{31} - h_{42}), \quad p_3 = h_{41} \quad (5-9)$$

simétrica anti-Hamiltoniana:

$$b = \frac{1}{2}(w_{11} + w_{22}), \quad p_1 = w_{14}, \quad p_2 = \frac{1}{2}(w_{11} - w_{22}), \quad p_3 = w_{12} \quad (5-10)$$

anti-simétrica anti-Hamiltoniana:

$$c = w_{12}, \quad d = w_{14} \quad (5-11)$$

Afim de obtermos uma matriz de rotação simplética e ortogonal, torna-se necessario que a matriz cliente comute com a matriz $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$. Com isso, podemos escrever a equação quaterniônica seguinte:

$$(u \otimes v)(1 \otimes j) = (1 \otimes j)(u \otimes v) \quad (5-12)$$

ou, de outra forma:

$$u \otimes vj = u \otimes jv \Leftrightarrow u \otimes (vj - jv) = 0 \quad (5-13)$$

Como $\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão, temos $vj - jv = 0$, ou seja, o vetor v e o vetor j comutam. Isto só acontecerá se $v \in \{1, j\}$, ou $v = c + dj$, com $c, d \in \mathbb{R}$. Escrevendo em uma forma matricial, temos

$$(u \otimes v) \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} (u \otimes v)$$

A matriz que satisfaz a equação matricial acima é da forma $J = \begin{bmatrix} v & -v \\ v & u \end{bmatrix}$. Dessa forma, a matriz de rotação deverá possuir essa estrutura em bloco.

O nosso objetivo passa a ser o de encontrar uma matriz de rotação para cada tipo de matriz Hamiltoniana ou anti-Hamiltoniana:

5.2

Matrizes Hamiltonianas Simétricas

Dada uma matriz $H = q \otimes i + r \otimes k$, devemos encontrar uma matriz simplética ortogonal R tal que $RHR^T = (x \otimes y)(q \otimes i + r \otimes k)(\overline{x \otimes y})$ seja diagonal.

Considerando o isomorfismo definido em (3-18) e escrevemos:

$$\begin{aligned} \psi(H) &= \psi(q \otimes i) + \psi(r \otimes k) = qe_1^T + re_3^T = \\ &= \begin{bmatrix} q_1 & 0 & r_1 \\ q_2 & 0 & r_2 \\ q_3 & 0 & r_3 \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T = \psi(\sigma_1 u_1 \otimes v_1 + \sigma_2 u_2 \otimes v_2) \end{aligned}$$

Como ψ é um isomorfismo, podemos escrever $H = q \otimes i + r \otimes k = \sigma_1 u_1 \otimes v_1 + \sigma_2 u_2 \otimes v_2$, onde $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq 0$. A grande vantagem desse tipo de representação produz dois pares de vetores ortonormais entre si, $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$. A rotação pode, então ser decomposta em duas rotações: a primeira manda u_1 para i e u_2 para $\pm k$ e a segunda efetua o alinhamento do vetor v_1 no eixo i e do vetor v_2 na direção $\pm k$. Uma importante observação é que a rotação em duas partes nem sempre é necessária:

isto porque, algumas vezes, um dos vetores que compõem o par de vetores é nulo ou já estão alinhados entre si.

A primeira rotação, que alinha os vetores $\{u_1, u_2\}$ para os eixos i e $\pm k$, respectivamente, pode ser escrita da forma $R_1 = \phi(x \otimes x)$, onde x pode ser escrito da forma:

$$x = \frac{|i||u_1| - iu_1}{||i||u_1| - iu_1|} = \frac{1 - iu_1}{|1 - iu_1|}$$

Com isso, a rotação R_1 manda u_1 para o eixo i e transforma o vetor u_2 em algum vetor $\widehat{u}_2$ no plano- jk . A rotação R_2 , que alinha os vetores v_1 e v_2 , respectivamente, aos eixos i e $\pm k$ está definida da forma $R_2 = \phi(y \otimes y)$, onde:

$$y = \frac{1 - iv_1}{|1 - iv_1|}$$

Finalmente, obtemos a matriz de rotação simplética e ortogonal $\widehat{R}$, que pode ser escrita com $\widehat{R} = x \otimes y$ e escrevemos a equação:

$$\widehat{R}H\widehat{R}^T = (x \otimes y)(\sigma_1 u_1 \otimes u_2 + \sigma_2 u_2 \otimes v_2)(\bar{x} \otimes \bar{y}) = \quad (5-14)$$

$$= \sigma_1(xu_1\bar{x} \otimes yv_1\bar{y}) + \sigma_2(xu_2\bar{x} \otimes yv_2\bar{y}) = \sigma_1(i \otimes i) + \sigma_2(\widehat{u}_2 \otimes k)$$

onde $\widehat{u}_2 \in$ plano- jk .

Uma outra forma consiste em escrever a matriz $\widehat{R} = \phi(x \otimes y) = \phi(x \otimes 1)\phi(1 \otimes y)$, através da equação (2-17) e, utilizando os vetores $u_1 = (u_{11}, u_{12}, u_{13})$ e $v_1 = (v_{11}, 0, v_{13})$, obtemos:

$$\widehat{R} = \frac{1}{2\sqrt{d_u d_v}} \begin{bmatrix} d_u & 0 & -u_{13} & u_{12} \\ 0 & d_u & u_{12} & u_{13} \\ u_{13} & -u_{12} & d_u & 0 \\ -u_{12} & -u_{13} & 0 & d_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_v & 0 & v_{13} & 0 \\ 0 & d_v & 0 & v_{13} \\ -v_{13} & 0 & d_v & 0 \\ 0 & -v_{13} & 0 & d_v \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

onde $d_u = 1 + u_{11}$ e $d_v = 1 + v_{11}$.

Finalmente, afim de obtermos uma diagonalização completa podemos utilizar a seguinte matriz simplética:

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & \\ -\sin \theta & \cos \theta & & \\ & & \cos \theta & \sin \theta \\ & & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que $\widetilde{R}$ é simplética e ortogonal, então $R = \widetilde{R}\widehat{R}$ é também simplética e ortogonal.

Além do caso 4×4 , podemos estender o algoritmo para matrizes $2n \times 2n$, baseando-se no seguinte teorema:

Teorema 5.2.1 Para qualquer matriz simétrica Hamiltoniana $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ existe

uma matriz simplética ortogonal $\mathcal{S}$ tal que

$$\mathcal{S}^T H \mathcal{S} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}.$$

A extensão para matrizes simétricas Hamiltonianas de ordem $2n \times 2n$ pode ser obtida através da criação de submatrizes, responsáveis por diagonalizar a matriz aos poucos, através de sweeps. A cada iteração deve-se obter sweeps que cubra todas as regiões da matriz.

O uso de transformações ortogonais para o cálculo do espectro das matrizes Hamiltonianas tem a propriedade de preservar a norma da matriz cliente envolvida. Com isso, devido a simetria da matriz Hamiltoniana envolvida, a cada iteração a troca de blocos, para submatrizes 4×4 , o peso de cada linha envolvida é preservada, fazendo com que o peso dos elementos diagonais aumente, enquanto o peso dos elementos fora da diagonal diminuem. Essa “compensação” permite que a norma seja preservada e que o processo convirja para a solução desejada.

5.3

Anti-simétrica Hamiltoniana

Seja H uma matriz anti-simétrica Hamiltoniana. Dessa forma, podemos escrever $H = b(1 \otimes j) + p \otimes 1$, onde $b \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathcal{P}$. Como $1 \otimes j = J_4$, não existe rotação simplética ortogonal sobre o primeiro termo de H . Dessa forma, precisamos apenas de uma rotação que leva p em j . Fazendo

$$x = \frac{|p| - jp}{||p| - jp|}$$

obtemos a matriz de rotação de ordem 4×4 .

$$R = x \otimes 1 = \frac{1}{\sqrt{2|p|(|p| + p_2)}} \begin{pmatrix} |p| + p_2 & p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_3 & |p| + p_2 & -p_1 & 0 \\ 0 & p_1 & |p| + p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & -p_3 & |p| + p_2 \end{pmatrix} \quad (5-16)$$

resultando

$$RHR^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -|p| + b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |p| + b \\ |p| - b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -|p| - b & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5-17)$$

Corolário 5.3.1 Para toda matriz anti-simétrica Hamiltoniana $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ existe uma matriz simplética ortogonal $\mathcal{S}$ tal que

$$\mathcal{S}H\mathcal{S}^T = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a matriz de rotação para ordens superiores a 4 está definida como a inserção da submatriz 4×4 na matriz identidade de mesma ordem da matriz cliente.

5.4

Simétrica anti-Hamiltoniana

Uma matriz simétrica anti-Hamiltoniana pode ser escrita na seguinte forma quaterniônica $W = b(1 \otimes 1) + p \otimes j$. A matriz de rotação é a mesma matriz definida no caso anterior, que efetua a rotação de p em direção ao eixo j , donde obtemos a forma $RWR^T = b(1 \otimes 1) + |p|(j \otimes j)$, obtendo a matriz $\text{diag}(b + |p|, b - |p|, b + |p|, b - |p|)$. O caso das matrizes simétricas anti-Hamiltonianas se assemelham ao caso das matrizes anti-simétricas Hamiltonianas.

Corolário 5.4.1 *Para cada matriz simétrica anti-Hamiltoniana $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ existe uma matriz simplética ortogonal S tal que*

$$SW S^T = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Para ordem superiores a 4, a matriz de rotação consiste na matriz identidade de ordem igual à da matriz cliente, com a inserção da matriz 4×4 correspondente.

5.5

Anti-simétrica anti-Hamiltoniana

Uma matriz anti-simétrica anti-Hamiltoniana possui a seguinte forma quaterniônica equivalente: $W = 1 \otimes (ci + dk)$. A rotação que alinha o vetor $ci + dk$ no eixo i está baseada no quaternio unitário

$$x = \frac{|ci + dk| - i(ci + dk)}{||ci + dk| - i(ci + dk)|} \quad \text{ou} \quad x = x_0 + x_2j \quad (5-18)$$

obtendo a matriz de rotação

$$R = 1 \otimes x = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & x_0 \end{pmatrix}$$

A matriz final obtida se parece com

$$RWR^T = (1 \otimes x)(1 \otimes (ci + dk))(1 \otimes \bar{x}) = |ci + dk|(1 \otimes i) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c^2 + d^2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{c^2 + d^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{c^2 + d^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{c^2 + d^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Corolário 5.5.1 Para toda matriz anti-simétrica anti-Hamiltoniana $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ existe uma matriz simplética ortogonal S tal que

$$SW S^T = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$$

O caso anti-simétrico anti-Hamiltoniano, para matrizes com ordem superiores a 4 não é tão simples como nos casos anteriores. Como a diagonal das matrizes anti-simétricas anti-Hamiltonianas possuem valores iguais a zero, o peso da norma dos elementos fora da diagonal não podem ser transferidos para a diagonal. Uma solução caminha em direção ao aumento da ordem da submatriz de rotação.

Considerando uma matriz anti-simétrica anti-Hamiltoniana de ordem 8×8 . A matriz $W = \begin{bmatrix} A & C \\ C & -A \end{bmatrix}$ com blocos anti-simétricos $A, C \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$. Podemos reduzir a matriz W para uma matriz desejada $\widetilde{W} = \begin{bmatrix} \widetilde{A} & 0 \\ 0 & -\widetilde{A} \end{bmatrix}$, onde $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ é simétrica e tridiagonal. Tal matriz $\widetilde{W}$ pode ser obtida de duas formas:

- através de finitas reduções para matrizes anti-Hamiltonianas descritas por Van Loan em (22). Este método envolve quatro matrizes simpléticas de Householder com ordens 8×8 e três transformações simpléticas de Givens.
- utilizando quatro transformações de Givens: três delas de ordem 4×4 e uma delas de ordem 2×2 .

A seguir, faremos a exposição do método descrita em (22), que utiliza matrizes ortogonais e simpléticas. Com isso, dado $Q \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, então a equação $J^T Q J = Q^{-T} = Q$ implica que:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ -Q_2 & Q_1 \end{bmatrix}, \quad Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

As matrizes simpléticas e ortogonais de Householder possuem a forma:

$$H(k, w) = \begin{bmatrix} \text{diag}(I_{k-1}, P) & 0 \\ 0 & \text{diag}(I_{k-1}, P) \end{bmatrix}$$

onde $P = I - 2ww^T$, onde $w \in \mathbb{R}^{n-k+1}$.

Caso $w = 0$, assumimos $H(k, w) = I_{2n}$. Notamos que $H(k, w)$ é a soma direta de duas matrizes comuns $n \times n$ de Householder.

Por outro lado, as transformações simpléticas de Givens são da forma:

$$J(k, \theta) = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

onde $C = \text{diag}(I_{k-1}, \cos \theta, I_{n-k})$ e $S = \text{diag}(0_{k-1}, \sin \theta, 0_{n-k})$.

Dessa forma, o algoritmo para matrizes anti-simétricas anti-Hamiltonianas consiste na utilização das matrizes de Householder para inserir zeros em uma grande

quantidade de entradas, e das rotações de Givens para a inserção de zeros apenas nas entradas desejadas.

Eis os algoritmos para matrizes de Householder (algoritmo H) e o algoritmo para rotações de Givens (algoritmo G):

ALGORITMO H

Dados $k(1 \leq k < n)$ e $y, z \in \mathbb{R}^n$, o seguinte algoritmo determina $w = (w_k, \dots, w_n)$ tal que:

$$H(k, w) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}$$

onde $x_i = 0$ para $i = k + 1, \dots, n$:

Início do Algoritmo H

- 1 $\sigma := \sqrt{z_k^2 + \dots + z_n^2}$
- 2 $w_k := z_k + \text{sgn}(z_k)\sigma$
- 3 Para $i = k + 1, \dots, n$
- 4 $w_i := z_i$
- 5 Fim Para

Fim do Algoritmo H

Dado $k(1 \leq k < n)$ e $y, z \in \mathbb{R}^n$, o algoritmo seguinte calcula $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$ para a matriz de rotação de Givens:

$$J(k, \theta) = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix}. \quad (5-20)$$

obtemos o seguinte algoritmo:

Início do Algoritmo J

- 1 $\sigma := \sqrt{y_k^2 + \dots + z_k^2}$
- 2 Se $\sigma = 0$ Então $c := 1$ e $s := 0$
- 3 Senão $c := \frac{y_k}{\sigma}$ e $s = \frac{z_k}{\sigma}$

Fim do Algoritmo J

Eis um quadro evolutivo do algoritmo proposto em (22), para a primeira e segunda colunas:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \hline 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \rightsquigarrow \text{Householder} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \hline 0 & \bullet & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

[illegible]

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \times & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \times & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \rightsquigarrow 2 \times 2Givens \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

5.6

Resultados Numéricos

Face ao exposto neste capítulo, embora o método computacional possua alguns cálculos de natureza complexa, segundo (14) o método mostrou-se bastante preciso para matrizes Hamiltonianas. Da mesma forma, a convergência teórica demonstrada anteriormente, pode ser facilmente verificada conforme as tabelas abaixo:

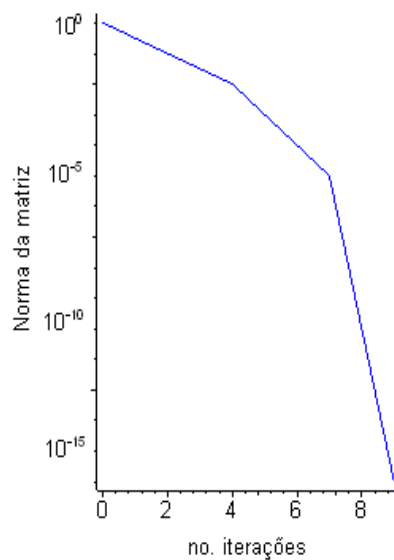


Figura 5.1: Convergência para uma matriz simétrica Hamiltoniana de ordem 100 utilizando o método qJ

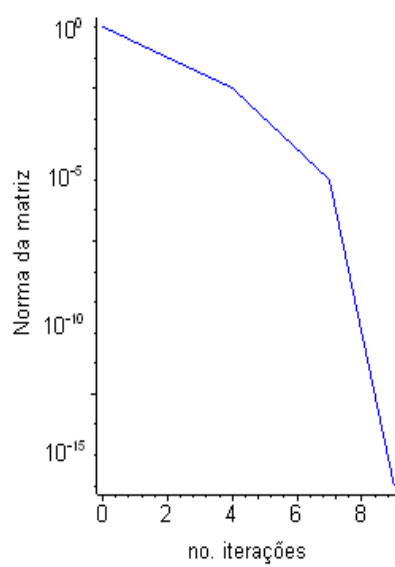


Figura 5.2: Convergência para uma matriz anti-simétrica anti-Hamiltoniana de ordem 100 utilizando o método qJ