2
Conceitos fundamentais para compreensão do método

Antes de lançar mão do método em questão devemos, entretanto, verificar alguns conceitos básicos:

2.1
Conceitos fundamentais sobre a teoria dos Quatérnios

2.1.1
Introdução histórica

Depois da invenção dos números complexos, uma questão em aberto era a classificação de corpos (não necessariamente comutativos) de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Hamilton tentou em vão, durante vários anos, definir tal corpo para dimensão 3. Certa vez, escreveu para seu filho:

> Todas as manhãs... quando descia para tomar café da manhã, seu irmão e você geralmente me perguntavam: *"Bem papai, você já consegue multiplicar três números complexos?"*, e eu era obrigado a dizer, com um sorriso sem graça na face: *"Não, eu apenas consigo somar e subtraí-los."*.

Finalmente, Hamilton resolveu o problema através da criação do corpo não-comutativo de dimensão real 4 contendo os complexos como sub-corpo, cuja multiplicação envolve os produtos escalares e vetorias em $\mathbb{R}^3$. Hamilton passou grande parte do resto de sua vida tentando obter uma aplicação importante para a sua descoberta mas, somente no final do século XIX foi feita a conexão dos quatérnios com o espaço-tempo de Minkowski e as transformações de Lorenz.

Além da utilização dos quatérnios proposta por essa dissertação, os quatérnios possuem aplicações em vários ramos da matemática, computação gráfica e robótica, etc.

2.1.2
A teoria dos quatérnios

Os quatérnios foram descobertos em outubro de 1843 e são representados por $\mathbb{H}$ em homenagem a Hamilton, seu criador. É uma álgebra de dimensão quatro e não comutativa, formada pelas bases padrão $\{1, i, j, k\}$. Nela, são válidas as seguintes regras:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2-1}$$

Podemos considerar um quatérnio como uma quádrupla de números reais do espaço $\mathbb{R}^4$:

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \tag{2-2}$$

ou de outra forma, utilizando-se das bases padrão:

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \tag{2-3}$$

Conceitualmente, podemos dividir um quatérnio em uma *parte real*, denotada por $\mathcal{R}$, composta pelo elemento q_0, e uma *parte pura*, denotada por $\mathcal{P}$, definida por $q_1 i + q_2 j + q_3 k$.

Dois quatérnios são iguais se, e só se, possuem elementos correspondentes iguais, isto é, dados os quatérnios $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \quad e \quad q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, temos que $p = q$ se, e só se, $p_0 = q_0, p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3$.

A *soma* de dois quatérnios é definida somando-se os elementos correspondentes:

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k \tag{2-4}$$

Cada quatérnio possui um *inverso aditivo* a ele associado, $-q$, que é obtido invertendo-se cada componente do quatérnio q.

Outra definição usual é a da *multiplicação de um quatérnio por um escalar* c, obtido da seguinte forma:

$$cq = cq_0 + cq_1 i + cq_2 j + cq_3 k \tag{2-5}$$

O *produto* entre dois quatérnios fica definido baseando-se em *regras especiais*:

$$ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik \tag{2-6}$$

Agora, utilizando as regras especiais e usuais de multiplicação, obtemos:
$p \cdot q = p_0 q_0 - (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + p_0(q_1 i + q_2 j + q_3 k) + q_0(p_1 i + p_2 j + p_3 k) +$

$$(p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k \tag{2-7}$$

Chamamos de *quatérnio conjugado* de um quatérnio $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, ao quatérnio obtido invertendo-se a parte pura do mesmo, isto é, $\overline{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$. Como a conjugação preserva a norma do quatérnio q, podemos facilmente obter uma regra importante da multiplicação:

$$\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p} \tag{2-8}$$

A *norma* de um quatérnio q é definida por:

$$|q| = \sqrt{\overline{q}\,q} \tag{2-9}$$

Observamos que o conceito de norma é o mesmo que a do comprimento de um vetor no $\mathbb{R}^4$, ou simplesmente, o mesmo conceito da norma euclidiana.

Chamamos de *inverso* de um quatérnio q ao quatérnio q^{-1} em que a propriedade seguinte se verifica:

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 \tag{2-10}$$

Multiplicando por $\overline{q}$ ambos os lados da equação (2-10), obtemos:

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2} \tag{2-11}$$

Uma classe muito importante dos quatérnios são os quatérnios que possuem módulo 1, chamados de *quatérnios unitários.*

Observamos que $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, ou seja, a norma usual euclideana $< p, q >= |p+q|^2 - |p|^2 - |q|^2 = (p+q)(\overline{p}+\overline{q}) - p\overline{p} - q\overline{q} \Rightarrow < pq >= \frac{1}{2}(p\overline{q} + q\overline{p})$.

Como espaço vetorial podemos identificar $\mathbb{H}$ com $\mathbb{R}^4$ através do isomorfismo:

$$q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \leftrightarrow (q_0, q_1, q_2, q_3)^T \tag{2-12}$$

ou pelo também isomorfismo entre o subespaço $\mathcal{P}$ dos quatérnios puros com $\mathbb{R}^3$:

$$q_1i + q_2j + q_3k \leftrightarrow (q_1, q_2, q_3)^T \tag{2-13}$$

Podemos, assim, escrever $\mathbb{H}$ decomposta pela base padrão:

$$\mathbb{H} = \{1\} \oplus \{i, j, k\} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{P} \tag{2-14}$$

logo, $\mathbb{H}$ é a soma direta dos subespaços ortogonais $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$. Em particular, $\{1, i, j, k\}$ é base ortonormal.

2.2 Produto Tensorial

Um grande mérito do produto tensorial está no fato do mesmo introduzir a multiplicação em uma álgebra. Com isso, uma álgebra onde o produto tensorial está presente é chamada de *álgebra associativa.*

Definição 2.2.1 *Sejam E, F espaços vetoriais definidos sobre o corpo $\mathcal{K}$. Um* forma bilinear $f : E \times F \to \mathcal{R}$ *é uma função $f(u, v)$, linear em cada uma das suas variáveis $u \in E, v \in F$. Mais precisamente, para quaisquer $u, u' \in E, v, v' \in F$ e $\alpha \in \mathcal{K}$, devem valer:*

$$\begin{aligned} f(\alpha u, v) &= \alpha f(u, v) \\ f(u, \alpha v) &= \alpha f(u, v) \\ f(u + u', v) &= f(u, v) + f(u', v) \\ f(u, v + v') &= f(u, v) + f(u, v') \end{aligned}$$

Com isso, as operações de soma e produto por um número fazem do conjunto $\mathcal{F}(E \times F)$ das formas bilineares $f : E \times F \to \mathbb{R}$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathcal{K}$.

Tomando as bases $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subset E$ e $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset F$, os números $f_{i,j} = f(u_i, v_j)$, definem uma matriz $f = [f_{i,j}] \in \mathcal{M}(m \times n)$ chamada de *matriz da forma bilinear* f relativamente às bases $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$.

Conhecidos os valores de $f_{i,j} = f(u_i, v_j)$, os quais podem ser tomados arbitrariamente, a forma bilinear $f : E \times F \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada, pois, para $u = \sum x_i u_i \in E$ e $v = \sum y_j v_j \in F$ quaisquer, tem-se:

$$f(u, v) = \sum_{i,j} x_i y_j f(u_i, v_j) = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i y_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \qquad (2\text{-}15)$$

A correspondência que associa a cada forma bilinear $f : E \times F \to \mathbb{R}$ sua matriz $f = [f_{i,j}]$, relativamente às bases $\mathcal{U} \subset E, \mathcal{V} \subset F$, é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathcal{F}(E \times F)$ e $\mathcal{M}(m \times n)$. Segue-se que $\mathcal{F}(E \times F)$ tem dimensão mn.

Definição 2.2.2 *Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathcal{K}$, de dimensão m e n, respectivamente. Seja $\{e_r : 1 \leq r \leq m\}$ uma base para V e $\{f_s : 1 \leq s \leq n\}$ uma base para W. Então $V \otimes W$ é um espaço vetorial mn dimensional sobre $\mathcal{K}$ com bases $\{e_r \otimes f_s : 1 \leq r \leq m, 1 \leq s \leq n\}$, equipado com a forma bilinear*

$$\otimes : V \times W \to V \otimes W$$

$$(\sum_{r=1}^{m} v_r e_r, \sum_{s=1}^{n} w_s f_s) \to^{\otimes} \sum_{r,s} v_r w_s (e_r \otimes f_s) \tag{2-16}$$

onde e_0, e_1, e_2, e_3 correspondem aos elementos da base padrão $1, i, j, k$, respectivamente.

Geralmente, denotamos $\otimes(u, w)$ por $(v \otimes w)$, onde $v \in V$, $w \in W$.

Considerando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como álgebras sobre o corpo $\mathcal{F}$, considerando o produto tensorial $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ sobre $\mathcal{F}$ e considerando $a, a' \in \mathcal{A}$ e $b, b' \in \mathcal{B}$ quaiquer, podemos afirmar, segundo (19), que é válida a seguinte propriedade:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \tag{2-17}$$

2.3
Alguns isomorfismos importantes...

Alguns isomorfismos importantes são citados em (9), e importantes para compreensão do método em questão. São eles:

✓ **Isomorfismo entre $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}_3)$**: Consideremos agora $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$, um subespaço vetorial de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, de dimensão 9.

Baseado no produto de Kronecker (7), vamos definir a função f : $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{M}(\mathbb{R}_3)$, $\quad f(p, q) = pq^T$, onde p e q são quatérnios puros.

Usando as propriedades do produto tensorial, podemos definir um isomorfismo:

$$\psi : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \to \mathcal{M}(\mathbb{R}_3)$$

com a propriedade:

$$\psi(p \otimes q) = pq^T \tag{2-18}$$

Uma observação importante é que tal isomorfismo não preserva a estrutura multiplicativa e portanto, não é um isomorfismo algébrico. Também $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ não é uma álgebra.

✓ **Isomorfismo entre $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$**: Devido ao exposto anteriormente, tentaremos criar um isomorfismo entre as álgebras 16-dimensionais $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

A fim de construir tal isomorfismo, consideremos a transformação $\mathbb{R}$ linear definida em (20):

$$\begin{gathered} \mathbb{H} \to \mathbb{H} \\ v \to pv\overline{q} \end{gathered}$$

e daí, definiremos a aplicação bilinear:

$$\mu : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$$

que induz uma aplicação linear:

$$\Phi : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$$

tal que

$$\Phi(p \otimes q) = \mu(p,q) \tag{2-19}$$

onde, podemos verificar que $\Phi(p \otimes q) = \mu(p,q)$ é um isomorfismo entre as álgebras 16-dimensionais $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$, uma vez que preserva a estrutura do espaço vetorial bem como preserva a estrutura multiplicativa. Dessa forma, obtemos uma base ortonormal $p \otimes q$ para $\mathcal{M}_4$.

Conforme o exposto até agora, e utilizando a função Φ, temos que, se $q = r + xi + yj + zk$, então:

$$\Phi(1 \otimes q) = \begin{pmatrix} r & x & y & z \\ -x & r & -z & y \\ -y & z & r & -x \\ -z & -y & x & r \end{pmatrix} \tag{2-20}$$

e

$$\Phi(q \otimes 1) = \begin{pmatrix} r & -x & -y & -z \\ x & r & -z & y \\ y & z & r & -x \\ z & -y & x & r \end{pmatrix} \tag{2-21}$$

Por comodidade de notação, vamos substituir a expressão $\Phi(p \otimes q)$, por $p \otimes q$.

Utilizando a propriedade (2-17) do produto tensorial podemos escrever $(p \otimes q) = (p \otimes 1)(1 \otimes q)$ e ainda, utilizando a forma matricial:

$$(p \otimes q) = \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \tag{2-22}$$

Definição 2.3.1 *Seja $p \otimes q \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. O conjugado de $p \otimes q$, denotado por $\overline{p \otimes q}$, é definido por:*

$$\overline{p \otimes q} = \overline{p} \otimes \overline{q} \quad \forall p, q \in \mathbb{H} \tag{2-23}$$

Observando (2-20) e (2-21), temos que

$$(\overline{p} \otimes 1) = (p \otimes 1)^T \quad e \quad (1 \otimes \overline{q}) = (1 \otimes q)^T \tag{2-24}$$

Assim, podemos observar que o isormorfismo preserva a estrutura multiplicativa de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e $\mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$ e tem a propriedade relacionar um elemento conjugado de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ com imagem em uma matriz transposta em $\mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$, ou seja, *uma conjugação em* $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ *corresponde a uma transposição em* $\mathcal{M}(\mathbb{R}_4)$.