

3 O Mecanismo de Oscilação dos Neutrinos

Neste capítulo, vamos descrever o mecanismo de oscilação de neutrinos devido a massas e misturas.

Em geral, quando os neutrinos tem massas não nulas, os seus auto-estados de massas diferentes dos auto-estados de interação. Nós definiremos o auto-estado de massa por (ν_1, ν_2, ν_3) e os auto-estados de massas dos léptons carregados por (e, μ, τ) . Os auto-estados de interação correspondentes são (e^I, μ^I, τ^I) e $\vec{\nu} = (\nu_{Le}, \nu_{L\mu}, \nu_{L\tau})$. Na base de massa, as interações de corrente carregada leptônica são dadas por:

$$- \mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \bar{\mu}_L \bar{\tau}_L) \gamma^\mu U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \quad (3-1)$$

Aqui U é uma matriz 3×3 . Dado uma matriz de massa do lépton carregado M_ℓ e a matriz de massa de neutrino M_ν numa base de interação,

$$- \mathcal{L}_M = (\bar{e}_L^I \bar{\mu}_L^I \bar{\tau}_L^I) M_\ell \begin{pmatrix} e_R^I \\ \mu_R^I \\ \tau_R^I \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (\vec{\nu})^c M_\nu \vec{\nu} + \text{h.c.} , \quad (3-2)$$

podemos encontrar as matrizes diagonalizadas V^ℓ e V^ν :

$$V^{\ell\dagger} M_\ell M_\ell^\dagger V^\ell = \text{diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad V^{\nu\dagger} M_\nu^\dagger M_\nu V^\nu = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (3-3)$$

Aqui V^ℓ é uma matriz unitária 3×3 , enquanto V^ν é uma matriz unitária 3×3 . A matriz de mistura de neutrinos U pode ser encontrada diagonalizando:

$$U_{ij} = P_{\ell,ii} V_{ik}^{\ell\dagger} V_{kj}^\nu (P_{\nu,jj}), \quad (3-4)$$

onde P_ν é uma matriz diagonal com fases arbitrárias apenas para os estados de Dirac e para neutrinos de Majorana, sendo uma matriz unitária (67). Esta matriz U é análoga a matriz de mistura dos quarks conhecida como matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (68).

Usando esta matriz obtida na Eq.(3-4), podemos relacionar auto-estados de massas e auto-estados de sabores de neutrinos como:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (3-5)$$

onde $|\nu_\alpha\rangle$ com $\alpha = e, \mu, \tau$ são os auto-estados de sabores e $|\nu_i\rangle$ com $i = 1, 2, 3$ são os auto-estados de massas.

3.1

Oscilação em 2 Gerações

Embora existam três sabores de neutrinos, vamos considerar um sistema mais simples com apenas dois neutrinos, para ilustrar o aspecto fundamental do fenômeno de oscilação.

3.1.1

Oscilação no Vácuo

Para ser mais simples, primeiramente vamos ignorar o efeito de matéria e considerar oscilação do neutrinos no vácuo. Supondo que os dois neutrinos têm massas não nulas e diferentes $m_1 \neq m_2$, os auto-estados de sabores e massas estão relacionados como,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^2 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (3-6)$$

onde matriz de mistura 2×2 U é dada por,

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3-7)$$

O parâmetro θ é chamado ângulo de mistura e neste caso existe um única diferença de massa-quadrada $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$.

Dado um neutrino produzido como auto-estado de sabor $|\nu_\alpha(0)\rangle$ e num instante t ou após percorrer uma distância¹ $L \simeq t$:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{i=1}^2 U_{\alpha i}^* |\nu_i(t)\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i(0)\rangle e^{-E_i t}. \quad (3-8)$$

A probabilidade deste neutrino ser detetado como ν_β é,

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle|^2 = \left| \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 U_{\alpha i}^* U_{\beta j} \langle \nu_j(0) | \nu_i(t) \rangle \right|^2, \quad (3-9) \\ &= \delta_{\alpha\beta} - (2\delta_{\alpha\beta} - 1) \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m^2}{4E} L \right) \end{aligned}$$

onde usamos as relações

¹ Como as massas dos neutrinos são muito pequenas, em geral são ultra relativísticos, então é conveniente usarmos unidades naturais, $\hbar = c = 1$.

Tabela 3.1: Valores Característicos de L e E para várias fontes de neutrinos e experimentos. Adaptada de Ref. (69)

| Experimentos | L (m) | E (MeV) | Δm^2 (eV ²) |
|---------------------------------|---------------|---------------|---------------------------------|
| Solar | 10^{10} | 1 | 10^{-10} |
| Atmosférico | $10^4 - 10^7$ | $10^2 - 10^5$ | $10^{-1} - 10^{-4}$ |
| Reator | $10^2 - 10^3$ | 1 | $10^{-2} - 10^{-3}$ |
| Acelerador | 10^2 | $10^3 - 10^4$ | $\gtrsim 0.1$ |
| Acelerador (grande comprimento) | $10^5 - 10^6$ | 10^4 | $10^{-2} - 10^{-3}$ |

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \simeq p_i + \frac{m_i^2}{2E_i}. \quad (3-10)$$

e $p_i \simeq p_j \equiv p \simeq E$.

A probabilidade tem um comportamento oscilatório, com o comprimento de oscilação:

$$l_0^{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2} = \frac{\pi}{1.27} \left[\frac{E}{\text{MeV}} \right] \left[\frac{\text{eV}^2}{\Delta m^2} \right] \text{ m} \quad (3-11)$$

Podemos ver claramente que para que a probabilidade de oscilação eq.(3-9) não seja nula, é preciso termos as seguintes condições: $\theta \neq 0$ e $\Delta m^2 \neq 0$.

Um experimento é caracterizado por uma energia típica E do neutrino por um baseline L (distância entre fonte e detector). Para ter uma sensibilidade para uma dado valor de Δm^2 , o experimento tem que ser colocado com $E/L \approx \Delta m_{ij}^2$ ($L \sim l_0^{\text{osc}}$). Os valores típicos de L/E para diferentes tipos de fontes e experimentos de neutrinos estão resumidos na tabela 3.1.

Se $(E/L) \gg \Delta m^2$ ($L \ll l_0^{\text{osc}}$), a oscilação não tem tempo para ter um efeito apreciável pois $\sin^2(\pi L/l_0^{\text{osc}}) \ll 1$. O caso de $(E/L) \ll \Delta m^2$ ($L \gg l_0^{\text{osc}}$) exige considerações mais cuidadosas. Nós não levamos em consideração feixes de neutrinos monocromáticos, assim, ao invés de medirmos $P_{\alpha\beta} = P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$ os experimentos são sensíveis para a probabilidade média

$$\begin{aligned} \langle P_{\alpha\beta} \rangle &= \frac{n_{\text{alvo}} \int dE_\nu \frac{d\Phi}{dE_\nu} \sigma_{CC}(E_\nu) P_{\alpha\beta}(E_\nu) \epsilon(E_\nu)}{n_{\text{alvo}} \int dE_\nu \frac{d\Phi}{dE_\nu} \sigma_{CC}(E_\nu) \epsilon(E_\nu)} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - (2\delta_{\alpha\beta} - 1) \sin^2 2\theta \left\langle \sin^2 \left(\frac{L}{l_0^{\text{osc}}} \pi \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3-12)$$

onde Φ é o fluxo de energia do neutrino, σ_{CC} é a seção de choque para o processo na qual o neutrino é detetado, $\epsilon(E_\nu)$ é a eficiência do detetor e n_{alvo} é o número de alvo. Para $L \gg l_0^{\text{osc}}$ a fase oscilatória dá vários ciclos antes de ser detetado e a média para $\langle \sin^2(\pi L/l_0^{\text{osc}}) \rangle \simeq 1/2$.

3.1.2

Oscilação na Matéria

Nesta seção, vamos discutir o efeito de matéria para oscilação de neutrinos. Com a presença de matéria, a Hamiltoniana efetiva que descreve a interação de neutrino eletrônico com a matéria devido à corrente carregada pode ser descrita como

$$H_{\text{ef}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e, \quad (3-13)$$

onde G_F é constante de Fermi cujo valor numérico (59) é $1.16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Esta Hamiltoniana efetiva implica no seguinte potencial de corrente carregada V_{CC} para o neutrino² (11),

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e, \quad (3-14)$$

onde N_e é a densidade número de elétrons. Para $\bar{\nu}_e$, o V_{CC} tem um sinal negativo.

Por outro lado, o potencial efetivo devido à corrente neutra que é comum para todos os tipos de neutrinos e é descrito como

$$V_{CN} = -\frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_n, \quad (3-15)$$

onde N_n é a densidade número de nêutrons e usamos neutralidade de matéria, isto é, número de prótons é igual a número de elétrons. Usualmente este potencial pode ser ignorado quando consideramos os efeitos de oscilação de neutrinos pois não depende de sabor. Portanto, vamos considerar só potencial devido a CC na Eq.(3-14).

Esse potencial pode ser expresso em termos da densidade de matéria ρ ,

$$V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e \simeq 7.6 \times 10^{-14} Y_e \left[\frac{\rho}{\text{g/cm}^3} \right] \text{ eV}, \quad (3-16)$$

onde $Y_e = \frac{N_e}{N_p + N_n}$ é número de elétron por núcleon. Três exemplos de densidades de matérias que são relevantes para as observações:

- No centro da Terra, $\rho \sim 10 \text{ g/cm}^3$ and $V_{CC} \sim 10^{-13} \text{ eV}$;
- No centro do Sol, $\rho \sim 100 \text{ g/cm}^3$ e $V_{CC} \sim 10^{-12} \text{ eV}$;
- Em Supernova, $\rho \sim 10^{14} \text{ g/cm}^3$ e $V_{CC} \sim \text{eV}$.

Por simplicidade, vamos considerar o sistema de dois neutrinos misturados de ν_e com ν_x ($x = \mu$ ou τ). A equação que descreve a evolução dos neutrinos na presença de matéria é dada por³

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix}, \quad (3-17)$$

²Para um tratamento mais detalhado vide o apêndice A.

³Vide apêndice B.

cuja a hamiltoniana H é definida por,

$$\begin{aligned} H &\equiv \frac{1}{2E} \left[U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m^2 \end{pmatrix} U^\dagger \right] + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & (\Delta m^2/4E) \sin 2\theta \\ (\Delta m^2/4E) \sin 2\theta & (\Delta m^2/2E) \cos 2\theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3-18)$$

onde $a \equiv \sqrt{2}G_F N_e$ é o potencial de interação do neutrinos com a matéria.

Definimos o auto-estado de massa na matéria, ν_i^m , como os auto-estados de matriz de Hamiltoniana na Eq. (3-18). Eles estão relacionados com o auto-estado de interação através de uma rotação unitária $U(\theta_m)$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_x \end{pmatrix} = U(\theta_m) \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}. \quad (3-19)$$

Os autovalores de H correspondem as massas efetivas na matéria e são dados por (11, 12):

$$\mu_{1,2}^2(x) = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + 2aE \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - 2aE)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}, \quad (3-20)$$

enquanto que o ângulo de mistura na matéria é dado por:

$$\tan 2\theta_m = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m^2 \cos 2\theta - 2aE}, \quad (3-21)$$

Nas Figs. 3.1 and 3.2 são mostradas, respectivamente, as massas efetivas e o ângulo de mistura em função do potencial a , para $a > 0$ e $\Delta m^2 \cos 2\theta > 0$. Nota-se que, mesmo se os neutrinos fossem partículas sem massas, o efeito da matéria produz neles uma massa efetiva, dado pelo potencial V_{CC} .

A densidade ressonante (ou potencial) a_R é definida com o valor de a para o qual o θ_m dá máxima mistura. Como estamos no quadrante $(0, \pi/2)$, esse valor é máximo quando $\theta_m = 45^\circ$ o que implica $a_R = \Delta m^2 \cos 2\theta$.

Portanto, quando $\theta_m = \pi/4$, esperamos o maior efeito de oscilação, pois $\sin 2\theta_m = 1$ o que corresponde a amplitude de oscilação tem o seu valor máximo. O ângulo de mistura na matéria $\tan \theta_m$ muda de sinal no a_R , onde podemos ver na eq (3-21), para $a > a_R$, temos $\theta_m > \theta$, conforme mostra a Fig. 3.2.

O comprimento de oscilação na matéria é dada por,

$$l^{\text{osc}} = \frac{\Delta m^2}{\sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - 2aE)^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}} l_0^{\text{osc}}, \quad (3-22)$$

onde o comprimento de oscilação no vácuo, foi definido pela eq. (3-11). No

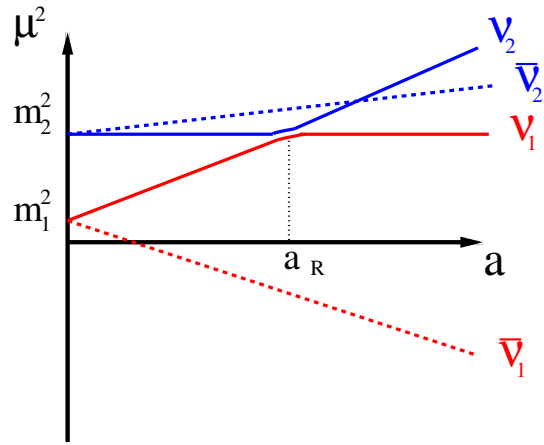


Figura 3.1: As massas efetivas adquiridas por um sistema com 2 neutrinos em função do potencial efetivo a (conforme a Eq. 3-20). Adaptado da Ref. (69).

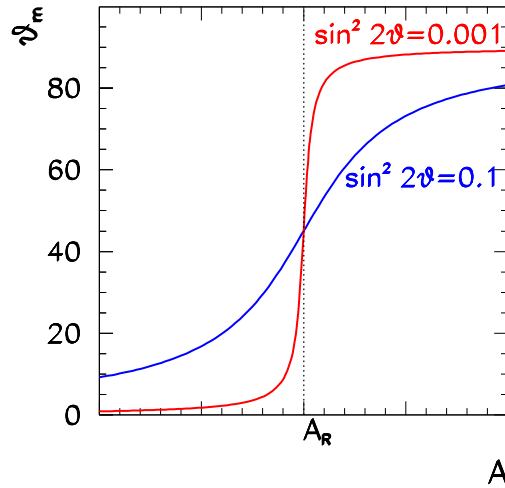


Figura 3.2: O ângulo de mistura na matéria para um sistema de dois neutrinos em função do potencial A para 2 diferentes ângulos de misturas no vácuo [conforme a Eq. (3-21)], Ref. (69).

ponto de ressonância, quando $a = \Delta m^2 \cos 2\theta / 2E$, o comprimento de oscilação na matéria é dada por

$$l_R^{\text{osc}} = \frac{l_0^{\text{osc}}}{\sin 2\theta}. \quad (3-23)$$

A largura (na distância) da região de ressonância, δr_R , correspondendo a $\delta a_R = \Delta m^2 \sin^2 2\theta / E$, é dado por:

$$\delta r_R = \frac{\delta a_R}{\left| \frac{da}{dr} \right|_R} = 2 \tan 2\theta \times h_R, \quad (3-24)$$

onde definimos a altura de ressonância como:

$$h_R \equiv \left| \frac{1}{a} \frac{da}{dr} \right|_R^{-1}. \quad (3-25)$$

3.2

Oscilação em 3 Gerações

A descrição combinada das anomalias dos neutrinos solar e atmosférico exige que todos os 3 sabores de neutrinos tomem parte na oscilação. As misturas dos neutrinos (9) para 3 sabores são descritas numa matriz de 3×3 . Tal matriz de mistura ⁴ pode ser parametrizada na forma padrão (59) como,

$$U_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \times \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} c_{13}c_{12}e^{-i\alpha_1/2} & s_{12}c_{13}e^{i\alpha_2/2} & s_{13}e^{-i\delta} \\ (-s_{12}c_{23} - s_{23}s_{13}c_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (c_{23}c_{12} - s_{23}s_{13}s_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & s_{23}c_{13} \\ (s_{23}s_{12} - s_{13}c_{23}c_{12}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (-s_{23}c_{12} - s_{13}s_{12}c_{23}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3-26)$$

onde $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$, sendo $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$, o ângulo de mistura entre i-ésimo e j-ésimo geração, δ é conhecida como a fase de violação de CP de Dirac e as fases α_1 e α_2 são as fases de Majorana ⁵, que existe para o caso que $\nu = \bar{\nu}$.

O ângulo de mistura θ_{12} foi medido por neutrinos solares (22, 23, 24, 25, 27) e o experimento KamLAND (28) enquanto que θ_{23} foi medido por neutrinos atmosféricos (16, 17, 19) e aceleradores (20, 21). Por outro lado, para θ_{13} , é conhecido um limite superior, obtido principalmente por dados de neutrinos vindos de reatores (29). Podemos observar na matriz U_{MNS} que o ângulo θ_{13} vem com a fase de violação de CP, e então se θ_{13} não for nulo e for relativamente grande, temos alguma possibilidade de observar o efeito de violação de CP.

Como veremos no próximo capítulo, os dados de neutrinos solares e atmosféricos exigem que a diferença de massa satisfaça:

$$\Delta m_{\odot}^2 \ll |\Delta m_{\text{atm}}^2|, \quad (3-27)$$

onde $\Delta m_{\odot}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$ é relevante para oscilação de neutrinos solares enquanto que, $\Delta m_{\text{atm}}^2 \equiv \Delta m_{32}^2 \equiv m_3^2 - m_2^2 \simeq \Delta m_{31}^2 \equiv m_3^2 - m_1^2$ é relevante

⁴Às vezes, esta matriz é chamada matriz de Maki-Nakagawa-Sakata (MNS) ou Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) ou Maki-Nakagawa-Sakata-Pontecorvo (MNPS).

⁵A probabilidade de oscilação não depende das fases de Majorana.

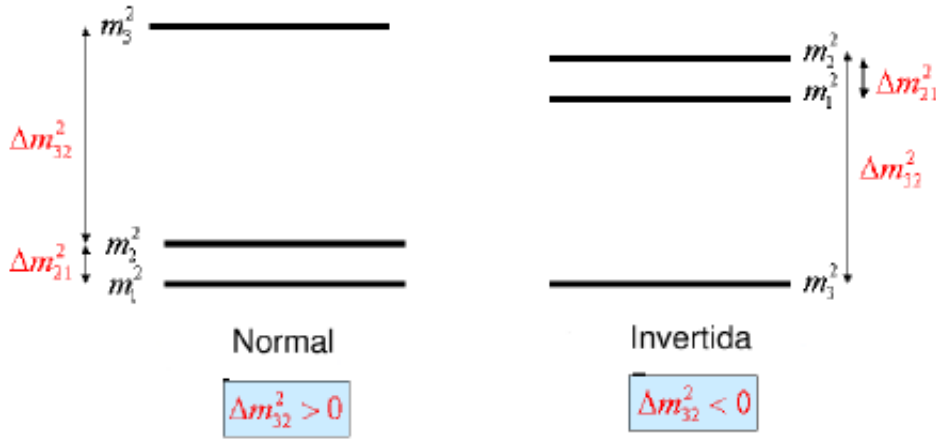


Figura 3.3: Os ordenamentos de massas dos neutrinos, sendo que na figura da esquerda temos a hierarquia normal enquanto a da direita, a hierarquia invertida.

para oscilação de neutrinos atmosféricos. Existem 2 possíveis ordenamento de massas na qual podemos escolher como:

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \ll \Delta m_{32}^2 \simeq \Delta m_{31}^2 = \Delta m_{\text{atm}}^2 > 0; \quad (3-28)$$

$$\Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \ll -\Delta m_{31}^2 \simeq -\Delta m_{32}^2 = |\Delta m_{\text{atm}}^2| > 0, \quad (3-29)$$

e pode ser esquematizado na Fig. 3.3, onde as figuras esquerda (hieraquia normal) e direita (hieraquia invertida) correspondem, respectivamente, às eqs. (3-28) e (3-29). A hierarquia normal é naturalmente relacionada com o ordenamento que temos para léptons carregados e quarks, $m_1 < m_2 < m_3$. Por outro lado, a hierarquia invertida implica que $m_3 < m_1 < m_2$ como mostrado na Fig. 3.3. A hierarquia correta ainda é desconhecida e descobri-la é considerado como uma das tarefas mais importantes.

A determinação da probabilidade de oscilação para neutrinos solares e atmosféricos vem da resolução da equação de movimento do sistema de neutrinos na matéria (sol ou Terra). Em três gerações de sabores, esta equação corresponde a:

$$i \frac{d\vec{\nu}}{dt} = H \vec{\nu}, \quad H = U \cdot H_0^d \cdot U^\dagger + V, \quad (3-30)$$

onde U_{MNS} é a matriz de mistura leptônica, e $\vec{\nu} \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T$, são os auto-estados de sabores, e H_0^d é a Hamiltoniana do vácuo que é dada por:

$$H_0^d = \frac{1}{2} \text{diag} (0, \Delta m_{21}^2, \Delta m_{31}^2), \quad (3-31)$$

e V é o potencial efetivo que descreve a interação de corrente carregada na matéria:

$$V = \text{diag} \left(\pm \sqrt{2} G_F N_e, 0, 0 \right) \equiv \frac{1}{2E} \text{diag} (a, 0, 0). \quad (3-32)$$

Os sinais + e - se referem a neutrinos e antineutrinos, respectivamente, e N_e é a densidade número de elétrons do Sol ou Terra.

No que segue, focalizamos na hierarquia normal da Eq. (3-28), na qual temos 5 parâmetros relevantes que são relacionados com experimentos na seguinte forma:

$$\Delta m_{\odot}^2 = \Delta m_{21}^2, \quad \Delta m_{\text{atm}}^2 = \Delta m_{32}^2, \quad (3-33)$$

$$\theta_{\odot} = \theta_{12}, \quad \theta_{\text{atm}} = \theta_{23}, \quad \theta_{\text{reactor}} = \theta_{13}. \quad (3-34)$$

Para transições no vácuo e na matéria, os resultados também se aplicam à hierarquia invertida, fazendo a seguinte transformação: $\Delta m_{32}^2 \rightarrow -\Delta m_{32}^2$.

A fórmula geral para a probabilidade de oscilação para a transição $\ell \rightarrow \ell'$ após percorrer uma distância L no vácuo é dada por

$$\begin{aligned} P(\nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell'}) &= \left| \sum_i U_{\ell i} U_{\ell' i}^* e^{-i(m_i^2/2E)L} \right|^2 \quad (3-35) \\ &= \delta_{\ell\ell'} - 4\Re \sum_i \sum_{j \neq i} U_{\ell i} U_{\ell' i}^* U_{\ell j} U_{\ell' j}^* \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E} \right) \\ &\quad + 2\Im \sum_i \sum_{j \neq i} U_{\ell i} U_{\ell' i}^* U_{\ell j} U_{\ell' j}^* \sin \left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E} \right). \end{aligned}$$

Podemos ver claramente que a probabilidade de oscilação (3-35) não depende das fases de Majorana. As oscilações descritas pela Eq.(3-35) violam o número individual de léptons de sabor, mas conserva o número de léptons total.

No vácuo e em 3 gerações, a fórmula geral pode ser simplificada em diversos casos de importância prática. Usando o fato empírico de que $\Delta m_{\odot}^2 < \Delta m_{\text{atm}}^2$, e considerando $\Delta_{\text{atm}} = \Delta m_{\text{atm}}^2 L/4E_{\nu}$ e $\Delta_{\odot} = \Delta m_{\odot}^2 L/4E_{\nu}$, temos as expressões aproximadas para as probabilidades de oscilações (70):

$$\begin{aligned} P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}) &\simeq \cos^4 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{\text{atm}} \quad (3-36) \\ &\quad - \Delta_{\odot} \cos^2 \theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} (\cos^2 \theta_{12} - \sin^2 \theta_{13} \sin^2 \theta_{12}) \sin 2\Delta_{\text{atm}} \\ &\quad - \Delta_{\odot} \cos \delta \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \cos 2\theta_{23} \sin(2\Delta_{\text{atm}})/2 \\ &\quad + \Delta_{\odot} \sin \delta \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{\text{atm}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) &\simeq \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{\text{atm}} \quad (3-37) \\ &\quad - \Delta_{\odot} \sin^2 \theta_{23} \sin^2 \theta_{12} \sin^2 2\theta_{13} \sin 2\Delta_{\text{atm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\Delta_{\odot} \cos \delta \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin 2\theta_{12} \sin(2\Delta_{atm})/2 \\
 & -\Delta_{\odot} \sin \delta \cos \theta_{13} \sin 2\theta_{12} \sin 2\theta_{13} \sin 2\theta_{23} \sin^2 \Delta_{atm},
 \end{aligned}$$

onde consideramos correções de primeira e segunda ordens para Δ_{\odot} e Δ_{atm} , respectivamente. É claro que, pela unitariedade da probabilidade, a probabilidade de sobrevivência $P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\mu})$ será dada por:

$$P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\mu}) = 1 - P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) - P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau}) \quad (3-38)$$

A presença da fase δ na matriz de mistura Eq. (3-26) implica na possibilidade de violação CP em oscilação de neutrinos no vácuo,

$$P(\nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell'}) \neq P(\bar{\nu}_{\ell} \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'}). \quad (3-39)$$

Ou seja, em princípio, a probabilidade de ν_{μ} oscilar para ν_e (chamado de canal de aparecimento) é diferente da probabilidade de $\bar{\nu}_{\mu}$ oscilar para $\bar{\nu}_e$. A grandeza de violação de CP e é caracterizada por:

$$\begin{aligned}
 P(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_e) - P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) &= -[P(\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_{\tau}) - P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_{\tau})] \quad (3-40) \\
 &= P(\nu_e \rightarrow \nu_{\tau}) - P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_{\tau}) \\
 &= -4J[\sin 2\Delta_{12} + \sin 2\Delta_{23} + \sin 2\Delta_{31}] \\
 &= 16J \sin 2\Delta_{12} \sin 2\Delta_{23} \sin 2\Delta_{31}
 \end{aligned}$$

onde

$$J \equiv \cos^2 \theta_{13} \sin \theta_{13} \cos \theta_{23} \sin \theta_{23} \cos \theta_{21} \sin \theta_{21} \sin \delta \quad (3-41)$$

é chamado de fator de Jarlskog (71).

Assim, o tamanho do efeito é o mesmo em todos os três canais, e a fase de violação de CP é observável apenas se as três massa forem diferentes, isto é, não degeneradas e todos os três ângulos não são nulos. A possibilidade de violação de CP no setor de léptons foi pela primeira vez discutida por Cabibbo (72) e Barger (73). Enquanto que a invariância de simetria de CPT implica que a violação de CP e a violação de T são equivalentes⁶.

No vácuo, a conservação de CP implica que $P(\nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell'}) = P(\bar{\nu}_{\ell} \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'})$. Esforços substanciais são reservados para testes de CP. O efeito de matéria pode induzir a desigualdade entre $P(\nu_{\ell} \rightarrow \nu_{\ell'})$ e $P(\bar{\nu}_{\ell} \rightarrow \bar{\nu}_{\ell'})$ mesmo que δ seja nula (ou π) e, assim, uma análise deve ser feita cuidadosamente para eles.

A expressão aproximada da probabilidade de oscilação com o efeito de matéria foi obtida por Cervera *et al.* (74), que, por exemplo, para $P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e)$

⁶A violação de T ou reversão temporal, significa que a oscilação depende da direção do tempo, isto é, $P(\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e) \neq P(\nu_e \rightarrow \nu_{\mu})$.

é dada por:

$$\begin{aligned}
 & P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) \\
 = & 4c_{13}^2 s_{13} c_{23} s_{12} s_{23}^2 \sin^2 \Delta_{31} \\
 & + 8 c_{13}^2 s_{13} s_{23} c_{23} s_{12} c_{12} \sin^2 \Delta_{31} [\cos \Delta_{32} \cos \delta \sin \Delta_{32} \sin \delta] \sin \Delta_{21} \\
 & - 8 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 s_{12}^2 \cos \Delta_{32} \sin \Delta_{31} \sin \Delta_{21} \\
 & + 4 c_{13}^2 s_{12}^2 [c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2 c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta] \sin^2 \Delta_{21} \\
 & - 8 c_{13}^2 s_{13}^2 s_{23}^2 (1 - 2 s_{13}^2) \frac{aL}{4E} \sin \Delta_{31} \left[\cos \Delta_{32} - \frac{\sin \Delta_{31}}{\Delta_{31}} \right] \quad (3-42)
 \end{aligned}$$

onde usamos as seguintes notações: $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $\Delta_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E_\nu}$ e o efeito de matéria é caracterizado por a , que já foi definido na Eq. 3-18.

A probabilidade de oscilação para $P(\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e)$ é obtida fazendo as seguintes substituições $\delta \rightarrow -\delta$ e $a \rightarrow -a$.

O primeiro termo da Eq. (3-42) nos fornece uma forte efeito, enquanto os termos da terceira e quarta linhas desta expressão correspondem a pequenas correções de conservação de CP , proporcionais a $\sin \Delta_{21}$ e $\sin^2 \Delta_{21}$. O termos com $\sin \delta$ na segunda linha viola a simetria CP , enquanto que o termo $\cos \delta$ a preserva. Finalmente o termos com $aL/4E_\nu$, na última linha, representa o efeito de matéria.