

3 FLUÊNCIA NOS EVAPORITOS

O Capítulo 3 se destina à revisão conceitual e histórica dos modelos constitutivos de fluência da literatura, em que são citados os principais trabalhos e linhas de pesquisas. A fluência sob tensão variável com o tempo também é tema tratado neste capítulo. Ainda, destacam-se a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido e a Teoria de Endurecimento por Deformação. Ambas são discutidas a partir de uma breve revisão bibliográfica e da dedução das equações utilizadas pelo Abaqus para um estado multiaxial de tensões.

3.1. Conceituação de Fluência aplicada ao Evaporito

Na ciência dos materiais, a fluência, ou “*creep*”, é o termo usado para descrever a tendência de um material a se deformar ao longo do tempo para aliviar tensão. A deformação do material ocorre em consequência do longo tempo de exposição a níveis de tensão que estão abaixo da tensão última do material. A fluência é mais freqüente nos materiais que são submetidos a altas temperaturas por longos períodos. A ocorrência da fluência varia em função das propriedades dos materiais, das tensões de sobrecarga aplicada, do tempo e da temperatura de exposição. A fluência é de grande interesse aos geotécnicos que trabalham com rochas salinas em perfurações de poços de petróleo em águas ultraprofundas, pois normalmente estes poços operam sob altas tensões e temperaturas.

As rochas de sal pertencem a um grupo de rochas sedimentares chamado Evaporito, depositado pela evaporação da água salina. Segundo Poiate et al (2006), o sal é um material geológico não usual que, sob tensões constantes, significativas deformações são esperadas em função do tempo, das condições de carregamento e das propriedades físicas. Em outras palavras, o sal possui comportamento de fluência, sendo a principal diferença no comportamento mecânico em relação às demais rochas sedimentares.

De acordo com Costa (1984) e Costa et al (2005), o comportamento “*creep*” (ou fluência) é a evolução das deformações plásticas com o tempo

devido à aplicação contínua de tensão. Nos evaporitos, a fluência é influenciada sensivelmente pela espessura da camada de sal, pela temperatura de formação, pela composição mineralógica, pelo teor de água, pela presença de impurezas e pela extensão em que a tensão diferencial é aplicada no corpo salino.

Amaral et al (1999) analisaram informações de poços perfurados através de espessas seções de evaporitos, onde foi constatada uma taxa de deformação excessivamente alta na parede dos poços, tais como 0,05 pol/h. Esta taxa que o sal pode fluir é dependente de alguns parâmetros, tais como temperatura, tensão diferencial e tipo de sal.

Diversos autores (Costa, 1984; Assis, 1990; Oliveira, 2004) também reforçam que a velocidade de deformação por fluência ($d\varepsilon/dt$) é fortemente dependente do nível de tensão aplicada. A Figura 3-1 apresenta um gráfico para níveis de tensão, em que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$, a uma temperatura constante. Observa-se que, quanto maior o nível de tensão, maior será a velocidade de deformação por fluência ou taxa de deformação, o que pode ser comprovado pelas inclinações das curvas deste gráfico. Vale ressaltar que σ_1 , σ_2 e σ_3 são constantes ao longo de cada ensaio.

Costa (1984) também estabeleceu esta mesma relação com a temperatura, ou seja, quanto maior a temperatura (T), maior será a velocidade de deformação por fluência ou taxa de deformação. A Figura 3-2 apresenta um gráfico com nível de tensão constante variando a temperatura, em que $T_1 < T_2 < T_3$. Vale destacar que T_1 , T_2 e T_3 permanecem constantes durante cada ensaio.

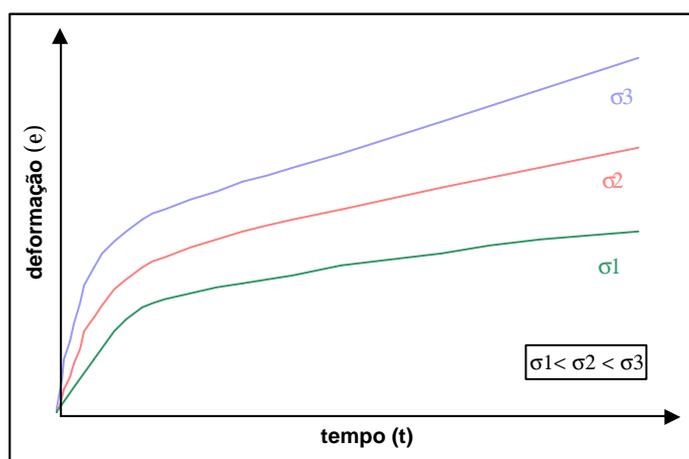


Figura 3-1: Curvas de Fluência para variações de tensão a temperatura constante.

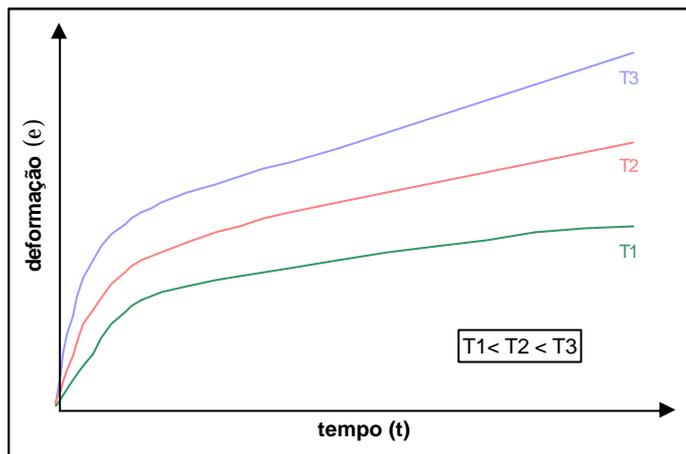


Figura 3-2: Curvas de Fluência para variações de temperatura a uma tensão constante.

Têm sido ensaiados diversos corpos de prova de evaporitos para melhor compreender seu comportamento em poços de petróleo. Entretanto, depois de diversas análises, Oliveira et al (1985) relataram que “a fluência, a rigor, é incontrolável”. Isto porque, mesmo que a contrapressão do fluido de perfuração se equipare às tensões no poço, haverá um fluxo espontâneo inerente ao depósito com pequena taxa de deformação e segundo uma direção preferencial estabelecida.

Uma alternativa utilizada para combater a fluência, segundo alguns estudos (Oliveira, 1984; Poiate et al, 2006), é aumentar o peso do fluido de perfuração para que as tensões, assim como as deformações, diminuam. Isto é importante para que dê tempo de completar o poço, incluindo o tempo necessário para intervenção do poço sem revestimento. Ainda que a intervenção no poço seja bem sucedida, uma pequena taxa de deformação ativa as tensões em seu revestimento e compromete a completação, podendo chegar até ao abandono do poço, como foi o caso do poço 1-RJS-118, relatado no Capítulo 2.

3.2. Estágios de Comportamento de Fluência

A evolução das deformações com o tempo é caracterizada em laboratório por três estágios de comportamentos, como pode ser visualizado na Figura 3-3 e Figura 3-4, que representam um ensaio típico de fluência sobre um corpo de prova.

De acordo com Costa (1984) e Dowling (1999), se um nível constante de tensão e temperatura é aplicado no corpo sólido no início de ensaio, ocorre uma pequena deformação elástica que evolui para o primeiro estágio chamado de

transiente ou fluência primária. Neste estágio, logo que a tensão diferencial é aplicada, a taxa de deformação é muito alta, ou seja, possui uma elevada velocidade de fluência. Esta taxa de deformação ou velocidade de fluência diminui monotonicamente até uma taxa constante de deformação, como pode ser observado na Figura 3-3. Neste instante, inicia-se o segundo estágio (também denominado de regime permanente ou estacionário, ou ainda, fluência secundária), que se caracteriza por apresentar uma velocidade de deformação constante com o tempo. Por outro lado, no terceiro estágio (também chamado de fluência terciária) ocorre a aceleração da taxa de fluência, isto é, da taxa de deformação com o tempo, representado na Figura 3-3. Nesta fase, a acelerada deformação do material por fluência leva rapidamente à ruptura do corpo sólido. Isto é explicado pelo micro fraturamento em um plano preferencial que forma macro-fissuras. Nos materiais rochosos, este cisalhamento pelo deslocamento de dois planos de fratura gera aumento de volume e pode ser explicado pelo fenômeno da dilatância.

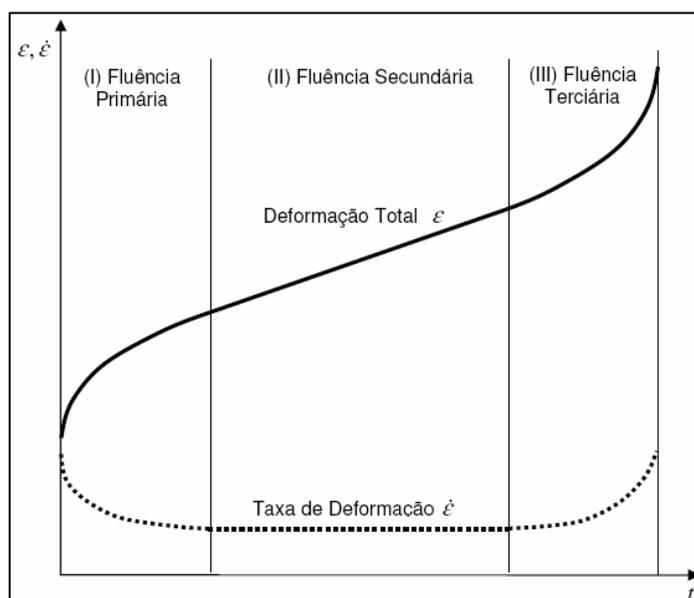


Figura 3-3: Os três estágios da fluência analisados pela deformação e taxa de deformação (Findley et al, 1976; Oliveira, 2004 ; Costi, 2006).

Além dos três estágios de comportamento citados anteriormente, a recuperação das deformações é outro fenômeno característico de materiais em regime de fluência, que pode ser melhor visualizada na Figura 3-4 . Costa (1984) e Medeiros (1999) afirmam que o corpo sólido recuperará a configuração original e seguirá a trajetória PQR se a tensão for subitamente reduzida a zero durante a fase de fluência primária. O trecho PQ é caracterizado por uma recuperação

rápida e instantânea. Por outro lado, o trecho QR representa uma recuperação lenta que tende assintoticamente a zero, ou seja, ocorre a recuperação da configuração original do corpo de prova, não restando deformações plásticas.

Da mesma forma que na fluência primária (quando o material se encontra em regime de fluência secundária) a repentina redução do nível de tensões terá como resposta uma recuperação elástica instantânea, representada pelo trecho TU, seguida de uma recuperação lenta, representada pelo trecho UV. Todavia, esta recuperação de deformações (quando o material se encontra em regime de fluência secundária) tende assintoticamente para uma deformação permanente, o que não ocorre quando o corpo sólido está em regime de fluência primária.

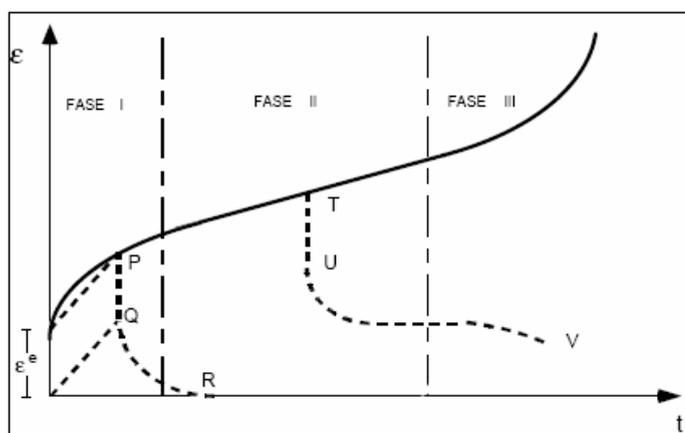


Figura 3-4: Comportamento típico de um material sob regime de fluência (Costa , 1984; Gravina, 1997; Medeiros, 1999).

3.3. Modelos Constitutivos de Fluência da Literatura

Muitos modelos na literatura foram utilizados para descrever o comportamento de fluência nas rochas. A maioria deles foram inicialmente derivados de estudos de metais e depois adaptados para a mecânica das rochas. Tais modelos podem ser divididos em três grandes grupos: empíricos, físicos e reológicos.

Os modelos geralmente descrevem somente uma parte da curva típica de fluência, apresentada na Figura 3-3. Alguns modelos representam somente o regime transiente; outros, somente o regime permanente. Existem também modelos que são uma combinação das deformações de fluência primária e secundária. No entanto, a modelagem da terceira fase de fluência é muito complexa. O presente trabalho está focado no estudo da fluência primária e secundária.

3.3.1. Leis Empíricas de Fluência

Os modelos empíricos são equações matemáticas deduzidas a partir da observação e ajuste entre o comportamento de uma curva típica de fluência e o seu resultado experimental para um problema segundo o estado uniaxial de tensões e deformações. De acordo com Costa (1984), apesar de esta lei representar somente a fluência primária, bons resultados foram obtidos a partir da comparação de resultados “*in situ*” da mina de Taquari-Vassouras com as simulações numéricas.

Foram utilizadas algumas premissas para que se pudesse formular um modelo. Por exemplo, considerou-se a deformação dependente somente do nível de tensão aplicada e da temperatura num tempo específico. Portanto, os modelos empíricos não levam em consideração, por exemplo, a forma com que se atingiu o estado de tensões e as temperaturas estudadas.

Outro aspecto importante é que as equações empíricas normalmente são provenientes do estudo dos metais. Para a utilização na representação do comportamento das rochas, as constantes empíricas são ajustadas em função dos resultados experimentais.

As equações empíricas podem ser subdivididas de acordo com a função matemática governante: potencial, logarítmico e exponencial.

3.3.1.1. Lei Potencial

O modelo empírico potencial é o mais utilizado na literatura (Findley, 1976; Costa, 1984; Assis, 1990; Oliveira, 2004) em virtude da sua simplicidade e do seu bom ajuste aos primeiros resultados obtidos de fluência, especialmente para os ensaios realizados sob pressão e temperatura constantes. Este modelo pode ser expresso da seguinte forma:

$$e^f = K s^c t^b T^a, \quad (3.1)$$

em que:

e^f é a deformação transiente de fluência;

s é a tensão desviadora;

t é o tempo;

T é a temperatura;

K , a , b e c são constantes empíricas.

Como a lei potencial é aplicada à fase transiente da curva de deformação por fluência, existem algumas sugestões para incorporação da fase permanente. Por outro lado, a fluência secundária é melhor formulada pelas leis físicas, que serão explicadas no item 3.3.2.

Para alguns metais e outras aplicações envolvendo pequenos acréscimos de tempo, considerando a fluência primária, a seguinte equação tem sido largamente utilizada para a deformação por fluência (Findley, 1976):

$$\epsilon^f = K \mathbf{s}^c t^b, \quad (3.2)$$

em que:

ϵ^f é a deformação transiente de fluência;

\mathbf{s} é a tensão desviadora;

t é o tempo;

K , b e c são constantes empíricas.

A equação apresentada nada mais é que o caso particular da Lei de Bailey-Norton. Isto porque é a união das equações propostas por cada um desses dois autores em 1929.

3.3.1.2. Lei Logarítmica

A lei logarítmica tem a mesma forma da lei potencial e também descreve apenas a fluência primária. Todavia, a variável tempo é expressa com uma função logarítmica:

$$\epsilon^f = K \mathbf{s}^c \ln(t) T^a, \quad (3.3)$$

em que:

ϵ^f é a deformação transiente de fluência;

\mathbf{s} é a tensão desviadora;

t é o tempo;

T é a temperatura;

K , a e c são constantes empíricas.

A equação 3.3 pode ser reduzida, considerando a tensão e temperatura constantes:

$$\epsilon^f = K \ln(t) \quad (3.4)$$

A grande desvantagem desta lei logarítmica é que a taxa de fluência torna-se infinita em valores de tempo que tendem a zero. Para solucionar este problema foi proposta a seguinte lei:

$$\dot{\epsilon} = K \ln(1 + ht) \quad (3.5)$$

A lei logarítmica apresenta bom ajuste em relação à curva experimental nas situações com baixa temperatura e para curtos períodos de tempo. Para os outros cenários, a lei logarítmica não descreve satisfatoriamente o comportamento do material.

3.3.1.3. Lei Exponencial

A lei apresentada a seguir descreve a deformação transiente da fluência como uma função exponencial da temperatura. O restante da equação é similar a outros modelos empíricos já apresentados:

$$\dot{\epsilon} = K S^c t^b e^{\frac{j}{T}}, \quad (3.6)$$

em que j é mais uma constante empírica.

Existem também diversas outras leis exponenciais na literatura que tentam representar o comportamento da fluência secundária, formuladas a partir da observação do material depois da fase de redistribuição de tensões, como a de Ludwick, proposta em 1909:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \left(e^{\frac{s}{s_0}} \right), \quad (3.7)$$

na qual:

$\dot{\epsilon}_0$ é a taxa de deformação no regime permanente de fluência;

s é a tensão diferencial.

Eyrich apresentou uma formulação em 1956 a partir da equação 3.7, incluindo a influência da temperatura:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \left(e^{-\frac{Q}{RT}} \right) \sinh \left(\frac{s}{s_0} \right), \quad (3.8)$$

em que:

$\dot{\epsilon}_0$ é a taxa de deformação no regime permanente de fluência;

Q é a energia de ativação;

R é a constante universal dos gases;

T é a temperatura;

s é a tensão diferencial.

De acordo com Costa (1984), Assis (1990) e Gravina (1997), as equações exponenciais em função da temperatura, como a 3.8, podem ser aplicadas em análises de problemas de mudanças de temperatura durante a deformação por fluência. Um exemplo em que a temperatura se eleva com o tempo é o armazenamento de lixo radioativo em minas subterrâneas de sal.

3.3.2. Leis Físicas de Fluência

Segundo Frayne & Mraz (1991), na década de 1980, leis físicas constitutivas de fluência foram recomendadas pela literatura internacional para representar o comportamento dos evaporitos baseado em mecanismos de iteração por meio de certos intervalos de tensões, de estado de deformação, de taxa de deformação, de temperatura e de microestrutura.

Munson publicou alguns estudos (Munson, 1984; 1991) nos quais as leis físicas constitutivas para a fluência secundária são apresentadas por meio de mapas de mecanismos de deformação baseados em faixas de temperatura e tensão diferencial em que um específico mecanismo micromecânico controla a deformação por fluência do sal (Apêndice A). São basicamente três mecanismos que regem o comportamento de fluência dos materiais: “*dislocation climb*”, “*dislocation glide*” e um mecanismo indefinido. Por não haver termos adequados em português para descrever esses dois primeiros mecanismos, eles serão descritos na língua inglesa, como na literatura.

3.3.2.1. Mecanismo “*dislocation climb*”

O “*dislocation climb*” é o mecanismo mais estudado pelos pesquisadores e é controlado por um fenômeno chamado ativação térmica. Isto porque um aumento da temperatura de um corpo sólido gera uma maior oscilação de seus átomos em torno de uma posição de equilíbrio. Simultaneamente a esse processo, ocorre também a redistribuição molecular da estrutura do material, que provoca o aumento da capacidade de fluência. Sendo assim, quanto maior a temperatura a que o material está submetido, maior será a velocidade de fluência para um determinado estado de tensão.

Nas situações em que a temperatura está no intervalo de moderada a alta e o material está sujeito a um baixo regime de tensão diferencial, a fluência é controlada pelo “*dislocation climb*” e pode ser expressa pela seguinte equação (Munson & Devries, 1991):

$$\dot{\epsilon}^f = A_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{s}}{G} \right)^{n_1} \cdot e^{\left(-\frac{Q_1}{RT} \right)}, \quad (3.9)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação de fluência na condição de regime permanente;

A_1 é uma constante;

\mathbf{s} é a tensão generalizada;

G é o módulo de cisalhamento;

Q é a energia de ativação;

R é a constante universal dos gases;

T é a temperatura absoluta;

n é o expoente de tensão.

3.3.2.2.

Mecanismo “*dislocation glide*”

A fluência estacionária é controlada pelo “*dislocation glide*” quando o corpo está submetido a elevados níveis de tensões. Esse modelo é caracterizado pela superposição de vários mecanismos de deslizamento durante o processo de fluência.

Este mecanismo, segundo Munson (1984;1991) pode ser representado por uma seno-hiperbólica do nível de tensão diferencial aliado a fatores de ativação térmica:

$$\dot{\epsilon}^f = H \cdot \left(B_1 e^{-\frac{Q_1}{RT}} + B_2 e^{-\frac{Q_2}{RT}} \right) \sinh \left(\frac{q \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)}{G} \right), \quad (3.10)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação de fluência;

H é “*Heaviside step function*”;

\mathbf{s} é a tensão;

G é o módulo de cisalhamento;

Q é a energia de ativação;

R é a constante universal dos gases;

T é a temperatura absoluta;

B_1, B_2 são constantes.

3.3.2.3.

Mecanismo Indefinido

O mecanismo indefinido é assim denominado por não estar associado a nenhum modelo micromecânico, mas pode ser empiricamente definido baseado em ensaios de laboratório e apresenta a mesma forma do mecanismo “*dislocation climb*”:

$$\dot{\epsilon}^f = A_2 \cdot \left(\frac{\mathbf{s}}{G} \right)^{n_2} \cdot e^{\left(-\frac{Q_2}{RT} \right)}, \quad (3.11)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação de fluência na condição de regime permanente;

A_2 é uma constante;

\mathbf{s} é a tensão generalizada;

G é o módulo de cisalhamento;

Q é a energia de ativação;

R é a constante universal dos gases;

T é a temperatura absoluta;

n é o expoente de tensão.

A fluência é controlada pelo mecanismo indefinido nas situações em que o evaporito está sujeito à baixa temperatura e ao baixo regime de tensão.

3.3.2.4.

Equação Constitutiva

Munson (1991) desenvolveu uma equação constitutiva para a fluência, na qual considera a possibilidade de três mecanismos baseados nas condições de temperatura e tensão. As condições de temperatura e de tensão diferencial a que o sal está submetido são fatores preponderantes para maior ou menor parcela de cada mecanismo.

Por exemplo, o “*dislocation climb*” é um mecanismo de ativação térmica que depende da tensão. Já o mecanismo indefinido leva este nome porque não está associado a nenhum modelo micromecânico; entretanto, neste caso, tem-se um modelo empírico definido por ensaios laboratoriais. E o mecanismo

“*dislocation glide*” é formado por modelos micromecânicos de deslizamento, em que todos são termicamente ativados e são dependentes exponencialmente da tensão.

Por outro lado, a equação constitutiva proposta por Costa et al (1997, 2005) e Poiate et al (2006), correspondente à lei de fluência, é formada por um duplo mecanismo de deformação. É uma simplificação da equação desenvolvida por Munson (1991), em que só são considerados os mecanismos “*dislocation glide*” e o mecanismo indefinido.

Ainda segundo Costa (1997, 2005) e Poiate (2006), foi analisado um evaporito com um comportamento elástico/visco-elástico, adotando um duplo mecanismo da lei de fluência, como apresentado na equação 3.12:

$$\dot{\epsilon}^f = \dot{\epsilon}_0^f \cdot \left(\frac{s_{ef}}{s_0} \right)^n \cdot e^{\left(\frac{Q}{RT_0} - \frac{Q}{RT} \right)}, \quad (3.12)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação de fluência na condição de regime permanente;

$\dot{\epsilon}_0^f$ é a taxa de deformação de referência de fluência no estado permanente;

s_{ef} é a tensão efetiva de fluência;

s_0 é a tensão efetiva de referência;

Q é a energia de ativação (kcal/mol), $Q = 12$ kcal/mol;

R é a constante universal dos gases (kcal/mol.K), $R = 1,9858 \text{ E } -03$;

T_0 é a temperatura de referência (K);

T é a temperatura da rocha (K).

Costa et al (2005) acrescentam que os parâmetros deste regime permanente de fluência foram baseados nos resultados dos ensaios triaxiais de fluência e aplicados no modelo numérico, corrigindo a taxa de deformação de fluência pelo o fator de ativação térmico.

3.3.3. Modelos Reológicos

Os modelos reológicos podem ser usados para representar o comportamento de materiais que variam com o tempo, como a fluência nos evaporitos. Tais modelos são capazes de simular as tensões e deformações de materiais viscoelásticos sob carregamento uniaxial.

Dentre os modelos da literatura, dois modelos serão apresentados para representar o comportamento mecânico unidimensional dos materiais: sólido elástico e fluido viscoso. A combinação e associação destes modelos resultam num bom ajuste as curvas experimentais.

3.3.3.1. Modelos básicos

O comportamento de um sólido elástico linear pode ser simplificado por um elemento de mola que segue a lei de Hooke, ou seja, a tensão resultante da aplicação de uma força em um material é diretamente proporcional à sua deformação, sendo expresso pela equação 3.13.

$$\mathbf{s} = E \cdot \mathbf{e} , \quad (3.13)$$

em que:

\mathbf{s} é a tensão;

E é o módulo de elasticidade do material;

\mathbf{e} é a deformação.

A representação deste modelo elástico é feita com um modelo de mola, no qual a constante da mola (k) representa o módulo de elasticidade do material. A elasticidade linear de Hooke é expressa pela relação entre força (F) e deslocamento (U), dada pela equação (3.14) e pela Figura 3-5.

$$F = k \cdot U \quad (3.14)$$

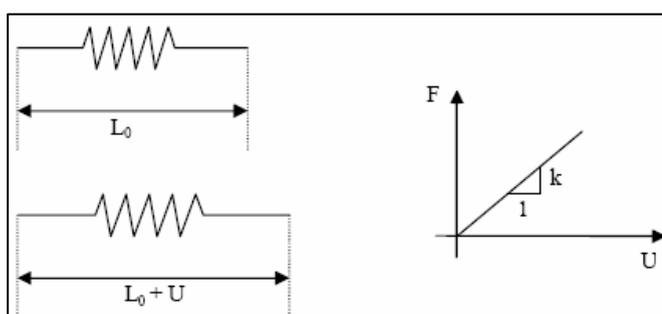


Figura 3-5: Modelo de Mola

Outro modelo básico também muito utilizado na literatura é a representação de um fluido viscoso que pode ser simplificado por um sistema de amortecedor, uma vez que é considerado um fluido newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação. Neste caso, a constante de proporcionalidade entre a tensão (\mathbf{s}) e a taxa de deformação ($\dot{\mathbf{e}}$) é a viscosidade (\mathbf{m}), como apresentado na equação (3.15):

$$\mathbf{s} = \mathbf{m} \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{e}} \quad (3.15)$$

A simplificação deste modelo é feita por um elemento de amortecedor, em que a relação entre a força (F) e a taxa de deslocamento é dada pelo coeficiente de viscosidade do material conforme a equação (3.16) e a Figura 3-6.

$$F = k \cdot \dot{U} \quad (3.16)$$

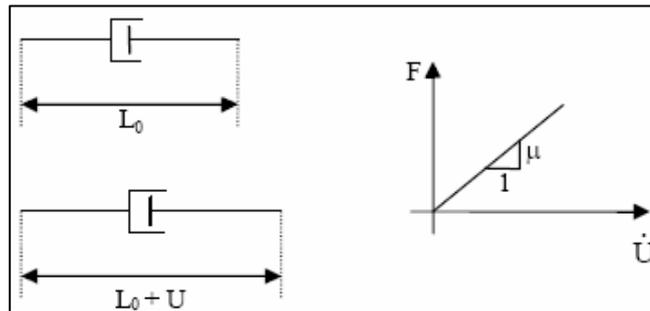


Figura 3-6: Modelo Amortecedor

A combinação e a associação de elementos simples de mola e de amortecedor formam outros modelos que melhor se ajustam às curvas experimentais dos materiais sujeitos a fluência, tais com o Modelo de Maxwell, de Kelvin e de Burgers.

3.3.3.2. Modelo de Maxwell

O Modelo de Maxwell consiste na associação em série de um elemento de mola com um elemento de amortecedor, como apresentado na Figura 3-7a. Nesta situação, a tensão \mathbf{s} é a mesma em ambos elementos do sistema. A origem das equações constitutivas da mola e do amortecedor já foram comentadas no subitem 3.3.3.1 e estão apresentadas nas equações 3.17 e 3.18, respectivamente.

$$\mathbf{s}_k = k \cdot \mathbf{e}_2 \quad (3.17)$$

$$\mathbf{s}_m = \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{e}}_1 \quad (3.18)$$

A deformação total é calculada por meio da soma das deformações dos sistemas, já que os elementos estão acoplados em série:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_k \quad (3.19)$$

Da mesma forma, a taxa de deformação é dada pela soma das parcelas que também estão em série:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{\mathbf{e}}_m + \dot{\mathbf{e}}_k \quad (3.20)$$

Derivando a equação 3.17 para que possa substituir os dois termos na equação 3.20, tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{k} + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{m}} \quad (3.21)$$

A partir da equação 3.21, percebe-se que, se o amortecedor tornar-se rígido ($\mathbf{m} = \infty$), o modelo de Maxwell se reduz à mola. O mesmo acontece com a mola. Caso seja rígida ($k = \infty$), o modelo se reduz ao fluido newtoniano.

A resolução da equação diferencial 3.21, considerando, por exemplo, $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ e $t = t_0$ como condições iniciais, é dada pela equação de uma reta (3.22), admitindo deformação nula em $t = t_0$ a uma aplicação de tensão constante.

$$\mathbf{e}(t) = \frac{\mathbf{s}_0}{k} + \frac{\mathbf{s}_0}{\mathbf{m}} t, \quad (3.22)$$

em que:

$\frac{\mathbf{s}_0}{k}$ é valor da intercessão do eixo das coordenadas (\mathbf{e});

$\frac{\mathbf{s}_0}{\mathbf{m}}$ é a inclinação da reta.

A representação desta solução do modelo de Maxwell pode ser visualizada na Figura 3-7b. Neste mesmo esquema, quando ocorre o descarregamento em t_1 , pode-se também observar uma recuperação da deformação da mola ($\frac{\mathbf{s}_0}{k}$) enquanto a deformação do amortecedor ($\frac{\mathbf{s}_0}{\mathbf{m}} t$) não se altera.

Caso uma deformação inicial \mathbf{e}_0 seja imposta em $t = t_0$ e mantida constante ao longo do tempo, o nível de tensões se eleva para $k \cdot \mathbf{e}_0$, devido à reação elástica instantânea da mola. No entanto, como pode ser observado na Figura 3-7c, ocorre a relaxação na tensão com o tempo. Neste caso, a solução da equação diferencial 3.21 é dada por:

$$s(t) = k e_0 e^{-\frac{kt}{m}}$$

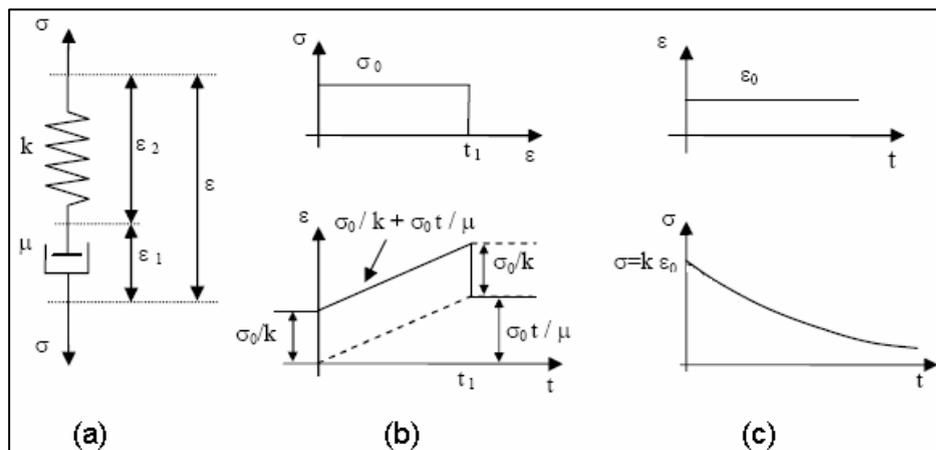


Figura 3-7: Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell possui algumas limitações para simular fielmente o comportamento de materiais viscoelásticos. Um exemplo é que este modelo não tem capacidade de representar a recuperação dependente com o tempo. Outra limitação do modelo é que ele não mostra a taxa de deformação decrescente sob um nível de tensão constante no caso de um estágio primário ou transiente de fluência.

3.3.3.3. Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin é formado por um elemento de mola e um elemento de amortecedor ligados em paralelo, conforme esquema da Figura 3-8a. Segundo este modelo, constata-se as seguintes relações de tensões e deformações:

$$s = s_k + s_m \quad (3.23)$$

$$e = e_k = e_m \quad (3.24)$$

A origem das equações constitutivas da mola e do amortecedor já foi comentada no subitem 3.3.3.1 e estão apresentadas nas equações 3.25 e 3.26, respectivamente.

$$s_k = k \cdot e \quad (3.25)$$

$$s_m = m \cdot \dot{e} \quad (3.26)$$

Substituindo as equações 3.25 e 3.26 na 3.23, tem-se a equação constitutiva do modelo de Kelvin:

$$s(t) = k \cdot e(t) + m \cdot \dot{e}(t) \quad (3.27)$$

Para um estado de tensão constante (s_0) em um tempo $t_0=0$, a solução da equação diferencial 3.27 representa a deformação viscoelástica de fluência por meio da seguinte expressão:

$$e(t) = \frac{s_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (3.28)$$

A taxa de deformação também sob uma tensão constante (s_0) é dada por:

$$\dot{e} = \frac{s_0}{m} \left(e^{-\frac{kt}{m}} \right) \quad (3.29)$$

Pela equação 3.28 e 3.29 (representada na Figura 3-8b), pode-se perceber que a velocidade de deformação tende a zero quando o tempo tende a infinito, pois a curva em questão é assíntota à horizontal num valor de deformação de $\frac{s_0}{k}$. Tal expressão pode representar satisfatoriamente a fluência primária de algumas rochas.

De acordo com o comportamento mecânico do modelo de Kelvin, no instante inicial de aplicação de tensão, o elemento amortecedor suporta toda esta força, que é transferida gradativamente ao elemento de mola.

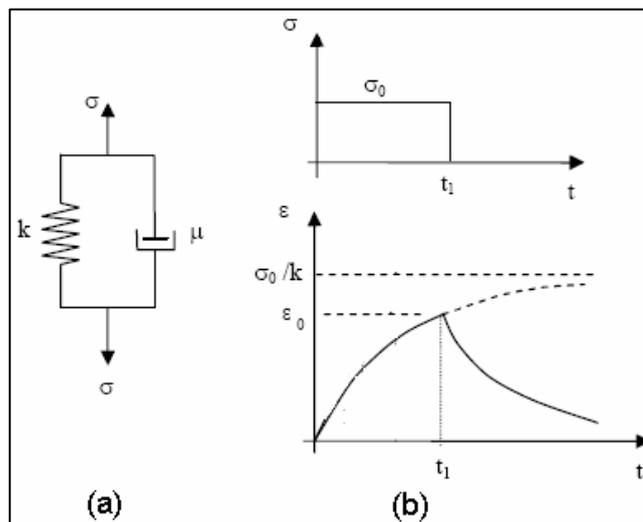


Figura 3-8: Modelo de Kelvin

No caso do descarregamento, o modelo de Kelvin representa uma aproximação da recuperação viscoelástica das deformações de alguns materiais. Nesta situação, apresentada na Figura 3-8b, basta descarregar a tensão para

zero após uma aplicação inicial de tensão (\mathbf{s}_0) e deformação (\mathbf{e}_0). A partir da equação 3.27, tem-se que:

$$k \cdot \mathbf{e} + \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{e}} = 0 \quad (3.30)$$

A solução da equação 3.30 pode ser expressa por:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 \cdot e^{-\frac{kt}{\mathbf{m}}} \quad (3.31)$$

Assim como o modelo de Maxwell, o modelo de Kelvin também possui algumas limitações para simular o comportamento de materiais viscoelásticos. Uma incoerência do modelo proposto por Kelvin é que ele não exibe a deformação independente do tempo no carregamento. Além disso, este modelo não consegue representar a deformação permanente após o descarregamento.

3.3.3.4.

Modelo de Burgers

Os modelos compostos foram propostos para sanar algumas inconsistências dos modelos apresentados nos subitens 3.3.3.2 e 3.3.3.3. O modelo de Burgers é um modelo composto de quatro parâmetros. Isto porque é formado por meio da associação em série dos modelos de Maxwell e de Kelvin, como pode ser visualizado na representação esquemática da Figura 3-9.

Segundo o modelo de Burgers, como os elementos de Maxwell e de Kelvin estão acoplados em série, a deformação total do sistema é dada pela soma das deformações desses dois elementos, apresentados na Figura 3-9:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad (3.32)$$

No entanto, a tensão atuante é igual em cada um dos dois elementos:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 \quad (3.33)$$

Substituindo as equações constitutivas de Maxwell, $\dot{\mathbf{e}}_2 = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{k_2} + \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{m}_2}$ (3.21), e

de Kelvin, $\mathbf{s} = k_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{m}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_1$ (3.27), na equação 3.33 e, utilizando também a equação 3.32, chega-se à seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{m}_1 \cdot \ddot{\mathbf{e}} + k_1 \cdot \dot{\mathbf{e}} = \left(\frac{\mathbf{m}_1}{k_2} \right) \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \left(1 + \frac{k_1}{k_2} + \frac{\mathbf{m}_1}{\mathbf{m}_2} \right) \cdot \dot{\mathbf{s}} + \left(\frac{k_1}{\mathbf{m}_2} \right) \cdot \mathbf{s} \quad (3.34)$$

Considerando um estado de tensão constante ($s = s_c$), a equação diferencial pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_1 \cdot \ddot{e} + k_1 \cdot \dot{e} = \left(\frac{k_1}{m_2} \right) \cdot s_c \quad (3.35)$$

A resolução da equação diferencial 3.35 é dada pela expressão a seguir:

$$e(t) = \frac{s_c}{k_2} + \frac{s_c}{k_1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k_1 t}{m_1}} \right) + \frac{s_c}{m_2} \cdot t \quad (3.36)$$

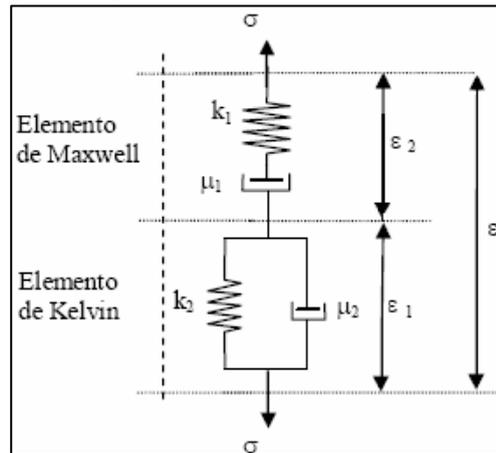


Figura 3-9: Representação esquemáticas do Modelo de Burgers

O comportamento de fluência de um material, utilizando o modelo de Burgers, pode ser visualizado na Figura 3-10. Por esta representação gráfica, pode-se perceber que o modelo de Burgers consegue reproduzir a deformação elástica instantânea inicial ($e_0 = \frac{s_c}{k_2}$). Além disso, este modelo é capaz de simular a deformação na fase de fluência transiente e, ainda, a deformação da fluência secundária com velocidade de deformação constante ($\frac{s_c}{m_2}$).

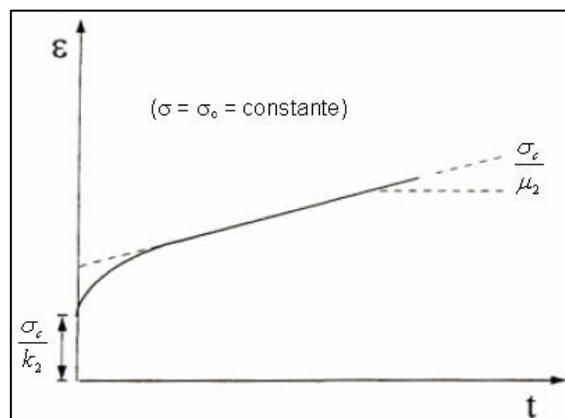


Figura 3-10: Ensaio de Fluência representado pelo Modelo de Burgers

No caso de um descarregamento, Jaeger & Cook (1979) deduziram a equação 3.37 para o ensaio de recuperação das deformações pelo modelo de Burgers. Neste ensaio, foi considerada inicialmente uma tensão constante (s_c). Após um determinado tempo t_x , a tensão s_c é retirada imediatamente. Pode-se então encontrar a seguinte expressão, para instantes de tempo em que $t > t_x$, ou seja, quando a tensão passou a ser zero.

$$e(t) = \frac{s_c}{k_1} \cdot \left(e^{-\frac{(t-t_x)}{t_1}} - e^{-\frac{t}{t_1}} \right) + \frac{s_c \cdot t_x}{m_2} \quad (3.37)$$

A Figura 3-11 é a representação gráfica da equação 3.37. No tempo $t=t_x$, ocorre a recuperação elástica do modelo de Burgers ($\frac{s_c}{k_2}$), que é igual a deformação elástica original ($e_0 = \frac{s_c}{k_2}$). Além disso, o modelo em questão também é capaz de representar as deformações de fluência a uma taxa decrescente e também as deformações permanentes.

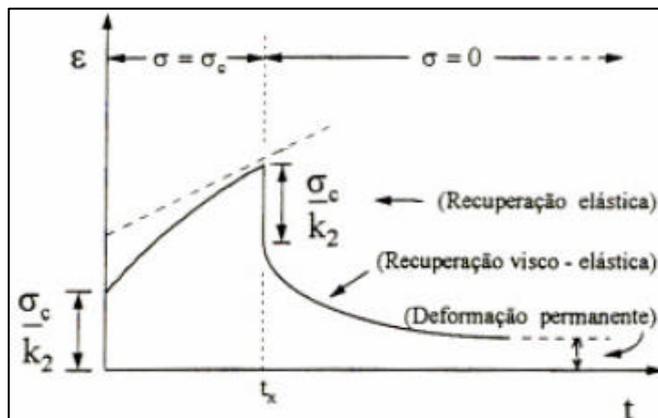


Figura 3-11: Descarregamento pelo Modelo de Burgers (modificado – Gravina, 1997)

De acordo com a literatura, o modelo de Burgers é, entre os modelos reológicos apresentados, aquele que mais se assemelha ao comportamento de um material que apresenta fluência. Isto porque este modelo possui uma boa resposta às condições de fluência, à relaxação de tensões e à recuperação de deformações quando comparado com resultados experimentais.

Segundo Costa (1984), o modelo de Burgers é o modelo reológico mais representativo em relação às curvas experimentais obtidas em ensaios

laboratoriais de evaporitos. Por outro lado, o autor utiliza modelagens empíricas e físicas nos seus diversos trabalhos publicados em 1984, 1997 e 2005.

3.4. Fluência sob Tensão Variável com o Tempo

A análise do comportamento da fluência, utilizando-se os modelos propostos no item 3.3, está sujeita à ocorrência de redistribuição de tensões por causa da variação da deformação que acontece com o tempo.

Existem dois métodos que são empregados para análises de estruturas submetidas a um histórico de tensão variável com o tempo: Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido e Teoria de Endurecimento por Deformação. Ambas estabelecem a evolução das deformações com base em leis constitutivas a partir do caso particular de Bailey-Norton, apresentado no item 3.3.1.1. Vale lembrar que estas leis são empíricas e foram formuladas a partir de um problema uniaxial de tensão em metais.

3.4.1. Teoria do endurecimento por Tempo Transcorrido (“Time Hardening Theory”)

No caso da Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido, a taxa de deformação de fluência é obtida diretamente a partir da derivada da equação 3.2. em função do tempo, ou seja:

$$\dot{\epsilon}^f = Ks^c bt^{b-1}, \quad (3.38)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação de fluência;

s é a tensão desviadora;

t é o tempo;

K , a e b são constantes empíricas.

Utilizando este método, o cálculo da taxa de deformação por fluência depende das variáveis de estado atualizadas naquele instante.

Este modelo é aconselhável para prever deformações em longos períodos de tempo, nos quais o estado de tensões não varia muito rapidamente neste período.

3.4.2.

Teoria do endurecimento por Deformação (“Strain Hardening Theory”)

No caso da Teoria de Endurecimento por Deformação, a taxa de deformação de fluência passa também a ser função da deformação e pode ser obtida a partir das equações 3.2 e 3.38. Isola-se o ‘t’ da equação 3.2 e obtém-se

$$t = \left(\frac{\dot{\epsilon}^f}{K S^c} \right)^{\frac{1}{b}}$$

Coloca-se este valor de ‘t’ na equação 3.38 e encontra-se a seguinte expressão:

$$\dot{\epsilon}^f = K^{\frac{1}{b}} b S^{\frac{c}{b}} \dot{\epsilon}^{\frac{b-1}{b}} \quad (3.39)$$

Este modelo é aconselhável para prever deformações em que o estado de tensões varia no período de tempo analisado.

As duas teorias têm sido amplamente utilizadas para representar a deformação de fluência em materiais em que as análises de tensões dependem do tempo. De acordo com Findley (1976), tem sido observado que a Teoria de Endurecimento por Deformação geralmente apresenta melhores resultados para a previsão da deformação de fluência quando comparada com a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido tanto para metais quanto para plásticos.

Por outro lado, vale destacar que a Teoria de Endurecimento por Tempo Transcorrido tem sido amplamente utilizada por causa das simplificações matemáticas já demonstradas nos itens 3.3.1.1e 3.4.1.

3.4.3.

Representação gráfica das teorias de endurecimento

Na Figura 3-12, estão representadas esquematicamente as duas teorias de endurecimento utilizadas para problemas uniaxiais. Observa-se que as curvas OG e OF referem-se à deformação variando com o tempo para tensões σ_1 e σ_2 , respectivamente, em que $\sigma_1 < \sigma_2$.

Ao analisar primeiramente a tensão σ_1 , considera-se a deformação evoluindo com o tempo, representada pelo trecho OA. No instante ‘a’, correspondente ao ponto ‘A’ da curva já mencionada, o nível de tensão aumenta e passa de σ_1 para σ_2 (Figura 3-12). Com a alteração do nível de tensão, o comportamento de fluência pela Teoria de Endurecimento pelo Tempo

as leis de “creep” teriam formas muito complexas para retratar fielmente os dados experimentais. Em virtude disso, nesta dissertação será utilizado um modelo empírico potencial de fluência primária ou “*power-law model*” do Abaqus. O embasamento teórico desta lei está apresentado no item 3.3.1.1 e é caracterizado por sua simplicidade e, portanto, tem uma gama de aplicações limitada. Esse modelo está disponível no Abaqus em duas versões: “*time-hardening*” e “*strain-hardening*”. Como já foi debatido no item 3.4, a versão “*time-hardening*” é mais apropriada quando o estado de tensão permanece essencialmente constante. No entanto, a versão “*strain-hardening*” é mais recomendada quando o estado de tensões varia durante as análises.

Além desse modelo potencial, também está disponível no Abaqus o “*hyperbolic-sine law model*”, que utiliza a lei seno-hiperbólica. O Abaqus também permite que outros modelos de fluência sejam inseridos pelo usuário.

3.5.1.

Teoria do endurecimento por Tempo Transcorrido (“Time Hardening Theory”)

A taxa de deformação de fluência da versão “*time-hardening*” proposta pelo modelo potencial empírico do Abaqus é similar à formulação apresentada no item 3.4.1 e é expressa da seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}^f = A \tilde{q}^n t^m, \quad (3.40)$$

em que:

$\dot{\epsilon}^f$ é a taxa de deformação equivalente uniaxial de fluência;

\tilde{q} é a tensão equivalente uniaxial desviadora;

t é o tempo total;

A , n e m são constantes definidas em função da temperatura.

O \tilde{q} é a tensão equivalente de Mises ou a tensão anisotrópica desviadora de Hill's, a depender, respectivamente, se o comportamento de “*creep*” é definido como isotrópico ou como anisotrópico. Nas modelagens realizadas neste trabalho, serão consideradas sempre situações isotrópicas. Por razões físicas, as constantes A e n devem ser positivas. E o valor de m deve estar entre -1 e 0 ($-1 < m \leq 0$).

3.5.2.

Teoria do endurecimento por Deformação (“Strain Hardening Theory”)

A equação da taxa de deformação de fluência da versão “*strain-hardening*” do modelo potencial empírico do Abaqus se assemelha à formulação do item 3.4.2 e está demonstrada a seguir.

Integra-se a equação $\dot{\mathbf{e}}^f = A \tilde{q}^n t^m$ (3.40) em função do tempo e obtém-se

$$\mathbf{e}^f = \frac{A \tilde{q}^n t^{m+1}}{m+1} \quad (3.41)$$

Isola-se o ‘t’ da equação (3.41) e encontra-se $t = \left(\frac{\mathbf{e}^f (m+1)}{A \tilde{q}^n} \right)^{\frac{1}{m+1}}$

Coloca-se este valor de ‘t’ na equação (3.40), que resulta na seguinte expressão proposta pelo Abaqus:

$$\dot{\mathbf{e}}^f = \left(A \tilde{q}^n \left[(m+1) \mathbf{e}^f \right]^m \right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad (3.42)$$

em que \mathbf{e}^f é a deformação equivalente de fluência.

A depender da escolha do sistema de unidades, o valor do parâmetro ‘A’ deve ser muito pequeno para as taxas típicas de deformação. Segundo o manual do Abaqus, recomenda-se que o valor de ‘A’ seja maior que 10^{-27} .

3.6.

Generalização da lei constitutiva de fluência do Abaqus para o estado multiaxial de tensões

O desenvolvimento da formulação multidimensional para representar o fenômeno de fluência neste trabalho está baseado em algumas hipóteses relativas ao comportamento dos materiais:

- a. A formulação multiaxial deve ser reduzida a uma correta formulação uniaxial;
- b. Incompressibilidade dos materiais. O modelo deve expressar a constância de volume, ou seja, deformação volumétrica nula;

- c. A fluência é função somente do segundo invariante do tensor desviador de tensões, isto é, as equações constitutivas não devem ter influência das tensões hidrostáticas;
- d. Para materiais isotrópicos, as direções principais de tensões e deformações devem coincidir.

Partindo de um corpo sólido em que nele atuam um estado de tensão e de deformação, o tensor de tensões pode ser dividido em duas partes: um tensor de tensão hidrostático expresso por $\mathbf{s}_v \mathbf{d}_{ij}$, em que \mathbf{d}_{ij} é o delta de Kronecker ($\mathbf{d}_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\mathbf{d}_{ij} = 0$ se $i \neq j$), e um tensor desviador de tensões, representado por s_{ij} :

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_v \mathbf{d}_{ij} + s_{ij} \quad (3.43)$$

A equação 3.43 também pode ser expressa em termos matriciais:

$$\mathbf{s}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_v & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_v & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

Toma-se \mathbf{s}_v como sendo a média da tensão normal do tensor de tensões \mathbf{s}_{ij} e tem-se:

$$\mathbf{s}_v = \frac{1}{3} \mathbf{s}_{kk} = \frac{1}{3} (\mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22} + \mathbf{s}_{33}) \quad (3.44)$$

Isolando o campo de tensão desviador s_{ij} e utilizando as equações 3.43 e 3.44, tem-se:

$$s_{ij} = \mathbf{s}_{ij} - \frac{1}{3} \mathbf{s}_{kk} \mathbf{d}_{ij} \quad (3.45)$$

A equação 3.45 também pode ser expressa em termos matriciais:

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_v & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} - \mathbf{s}_v & \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} - \mathbf{s}_v \end{bmatrix}$$

Voltando ao requisito 'c' da formulação multiaxial, as deformações de fluência não são influenciadas pela pressão hidrostática. Sendo assim, analisar-se-á em termos do tensor desviador de tensões conforme equação 3.46. Tal formulação também atende a hipótese 'd', pois as componentes de tensão e deformação são colineares.

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f = \mathbf{z} \cdot s_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.46)$$

em que:

\mathbf{z} é um fator de proporcionalidade;

s_{ij} é o tensor desviador de tensões.

Para que se possa determinar o fator de proporcionalidade \mathbf{z} , é necessário definir tensão de von Mises ou tensão equivalente \mathbf{s}_e , que são utilizados para prever comportamentos de materiais sob carregamentos triaxiais a partir de ensaios uniaxiais:

$$\mathbf{s}_e = \sqrt{3J_2}, \quad (3.47)$$

em que J_2 é o segundo invariante do tensor de tensões, que pode ser

$$\text{expresso por } J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2}. \quad (3.48)$$

E o segundo invariante do tensor desviador de tensões pode ser representado por:

$$J_{2D} = \left(\frac{1}{6} \right) \left[(\mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_{22})^2 + (\mathbf{s}_{33} - \mathbf{s}_{22})^2 + (\mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_{33})^2 \right] + \mathbf{s}_{12}^2 + \mathbf{s}_{23}^2 + \mathbf{s}_{13}^2 \quad (3.49)$$

Da mesma forma, pode-se definir taxa de deformação efetiva de fluência:

$$\dot{\mathbf{e}}_e^f = \sqrt{\frac{4}{3}I_2}, \quad (3.50)$$

em que I_2 é o segundo invariante do tensor taxa de deformação e pode

$$\text{ser expresso por } I_2 = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f \dot{\mathbf{e}}_{ij}^f}{2} \quad (3.51)$$

E o segundo invariante do tensor desviador de taxa de deformação pode ser representado por:

$$I_{2D} = \left(\frac{1}{6} \right) \left[(\dot{\mathbf{e}}_{11}^f - \dot{\mathbf{e}}_{22}^f)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_{22}^f - \dot{\mathbf{e}}_{33}^f)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_{33}^f - \dot{\mathbf{e}}_{11}^f)^2 \right] + \dot{\mathbf{e}}_{12}^{f2} + \dot{\mathbf{e}}_{13}^{f2} + \dot{\mathbf{e}}_{23}^{f2} \quad (3.52)$$

Portanto, a tensão equivalente (\mathbf{s}_e) e a taxa de deformação efetiva de fluência ($\dot{\mathbf{e}}_e^f$) também podem ser apresentadas como:

$$\mathbf{s}_e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[(\mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_{22})^2 + (\mathbf{s}_{33} - \mathbf{s}_{22})^2 + (\mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_{33})^2 + 6(\mathbf{s}_{12}^2 + \mathbf{s}_{23}^2 + \mathbf{s}_{13}^2) \right]^{1/2} \quad (3.53)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_e^f = \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left[(\dot{\mathbf{e}}_{11}^f - \dot{\mathbf{e}}_{22}^f)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_{22}^f - \dot{\mathbf{e}}_{33}^f)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_{33}^f - \dot{\mathbf{e}}_{11}^f)^2 + 6(\dot{\mathbf{e}}_{12}^{f^2} + \dot{\mathbf{e}}_{13}^{f^2} + \dot{\mathbf{e}}_{23}^{f^2}) \right]^{1/2}$$

(3.54)

Pode-se substituir a equação 3.48 na 3.47 de forma a isolar o s_{ij} e obtém-se:

$$s_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{s}_e \quad (3.55)$$

Da mesma forma, pode-se substituir a equação 3.51 na 3.50, isolando o $\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f$:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f = \mathbf{e}_e^f \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (3.56)$$

A partir das equações 3.46, 3.55 e 3.56, define-se o coeficiente de proporcionalidade:

$$\mathbf{z} = \frac{3}{2\mathbf{s}_e} \frac{d\mathbf{e}_e^f}{dt} \quad (3.57)$$

Partindo novamente das hipóteses iniciais, observa-se que o requisito 'a' também é atendido, pois a formulação multiaxial pode ser reduzida a uma expressão uniaxial. A verificação desta hipótese pode ser comprovada considerando um caso uniaxial, no qual a equação 3.47 fica reduzida a $\mathbf{s}_e = \mathbf{s}_{11}$ quando se faz $\mathbf{s}_{11} \neq 0$ e as demais tensões sejam zero.

Além disso, para o caso uniaxial, $\dot{\mathbf{e}}_{11}^f \neq 0$ e $\dot{\mathbf{e}}_{22}^f = \dot{\mathbf{e}}_{33}^f$. Considerando ainda que a condição de incompressibilidade no problema de fluência pode ser representada pela constância de volume (hipótese 'b'), tem-se que:

$$\dot{\mathbf{e}}_{11}^f + \dot{\mathbf{e}}_{22}^f + \dot{\mathbf{e}}_{33}^f = 0 \quad (3.58)$$

$$\text{Então, } \dot{\mathbf{e}}_{22}^f = \dot{\mathbf{e}}_{33}^f = -\frac{\dot{\mathbf{e}}_{11}^f}{2} \quad (3.59)$$

Substituindo a equação 3.59 na equação 3.54 obtém-se:

$$\dot{\mathbf{e}}_e^f = \dot{\mathbf{e}}_{11}^f \quad (3.60)$$

No Abaqus, a Teoria do endurecimento por Tempo Transcorrido é dada em função da taxa de deformação (equação 3.40) diferentemente do que normalmente está apresentada na literatura (equação 3.2), que está em função da deformação. Então, neste trabalho, foi deduzida a formulação para o caso

multiaxial especificamente para o Abaqus a partir das equações uniaxiais constantes no seu manual.

Sendo assim, para a versão “*time hardening*”, pode-se fazer a generalização da equação 3.40 para o estado multiaxial de tensões com a utilização da equação 3.57:

$$\mathbf{z} = \frac{3}{2s_e} \frac{d\mathbf{e}_e^f}{dt} = \frac{3}{2} A \mathbf{s}_e^{n-1} t^m \quad (3.61)$$

Com o auxílio da equação 3.46 e isolando-se o $\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f = \frac{3}{2} s_{ij} A \mathbf{s}_e^{n-1} t^m \quad (3.62)$$

Da mesma forma, também pode-se deduzir a Teoria do endurecimento por Deformação, inicialmente apresentada para a situação uniaxial (3.42), por meio da equação 3.57:

$$\mathbf{z} = \frac{3}{2s_e} \frac{d\mathbf{e}_e^f}{dt} = \frac{3}{2} \left(A \mathbf{s}_e^{n-1(m+1)} \left[(m+1) \mathbf{e}^{cr} \right]^m \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.63)$$

Utilizando a equação 3.46 e isolando-se o $\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f$, tem-se:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^f = \frac{3}{2} s_{ij} \left(A \mathbf{s}_e^{n-1(m+1)} \left[(m+1) \mathbf{e}^{cr} \right]^m \right)^{\frac{1}{m+1}} \quad (3.64)$$