8
O Método de Alocação de Shapley

Este capítulo é dividido em duas partes. A primeira apresenta o método de benefícios incrementais à medida que os agentes vão entrando na coalizão, ou seja, atribui a cada agente a diferença entre o benefício do conjunto após sua entrada na coalizão. Em termos práticos calcula-se a Capacidade de Suprimento da Demanda do sistema com e sem o gerador. A diferença é a contribuição do gerador para o sistema. Mostra-se que este método sofre total influência da ordem de entrada dos agentes.

Na segunda parte é introduzido o método de Shapley (ou valor de Shapley), que foi o método que deu origem ao método Aumann-Shapley (AS). O método de Shapley resolve o problema do efeito da ordem de entrada do agente alocando a cada um deles a média das alocações incrementais para todas as permutações possíveis na ordem de entrada. Mostra-se que este método pode se tornar computacionalmente inviável visto o grande número de permutações possíveis da ordem de entrada dos agentes. Mostra-se também que este método não apresenta isonomia em relação ao tamanho de agentes do mesmo tipo, o que faz com que os maiores sejam menos sensíveis à ordem de entrada, e por isso sejam beneficiados. Outro conceito interessante é que o Valor de Shapley possui uma estreita relação com o equilíbrio competitivo em uma economia com muitos agentes. Uma demonstração rigorosa desse fato pode ser encontrada em Aumann (1975) [46]. O resultado é conhecido como teorema de valor de equivalência.

8.1
Método por Ganho Incremental

O método por ganho incremental aloca para cada usina a diferença entre os benefícios à medida que os agentes são adicionados sucessivamente ao sistema. Portanto aloca-se para cada agente a *diferença* entre o benefício do conjunto quando a usina entra, e benefício total anterior, sem ela no sistema.

Por exemplo, supondo uma ordem de entrada 1-2-3, o método por benefício incremental alocaria a cada agente:

$$\phi_1 = \Delta_1 = f(1)$$

$$\phi_2 = \Delta_2 = f(1,2) - f(1) \qquad (8.1)$$

$$\phi_3 = \Delta_3 = f(1,2,3) - f(1,2)$$

A questão que surge imediatamente é o porquê da ordem 1-2-3, e não, por exemplo, 3-1-2, ou qualquer outra permutação. No caso da capacidade firme, por exemplo, o incremento de uma usina em geral é diferente quando ela entra nas últimas posições que quando entra nas primeiras. Portanto, todas as usinas sempre prefeririam estar nas posições da ordenação que mais lhe favorecessem.

8.2
Método de Shapley

O método de Shapley nos fornece uma solução única e que sempre existe. Em contraste com a solução do núcleo que nos fornece um conjunto de alocações.

Observe que o método de benefício incremental apresentado na seção anterior é sensível a ordem de rotulação das usinas, por exemplo: o método apresenta diferentes alocações quando consideramos os índices 1-2-3 e 2-3-1 para as mesmas usinas, portanto as alocações não são simétricas.

A seguir vamos listar algumas propriedades desejadas de uma alocação:

Propriedades:

(1) Eficiência - toda alocação eficiente é um ótimo de Pareto e não há desperdício.

(2) Simetria – não importa a ordem que as usinas são apresentadas, a alocação deve ser invariante.

(3) Linearidade – as alocações são lineares em relação às capacidades firmes das coalizões de usinas.

(4) Agente Irrelevante – Caso uma usina i não contribua para o sistema, i.e., $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$, para toda coalizão $S \subset N$ então sua alocação deve ser nula.

O método de Shapley fornece uma única alocação de capacidade firme que satisfaz as quatro propriedades desejadas listadas acima. O valor de Shapley pode ser interpretado com sendo o valor médio dos benefícios incrementais de inclusão do agente, levando em conta todas as sub-coalizões que não contêm este determinado agente, inclusive a sub-coalizão vazia. Supondo-se que a probabilidade de ocorrência de sub-coalizões de diversos tamanhos seja igual, a alocação de Shapley é definida formalmente através da seguinte expressão analítica:

$$\Phi_i = \sum_{\forall S \subseteq N | i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}\left(\mathrm{D}(S) - \mathrm{D}(S \setminus \{i\})\right), \quad i \in N \qquad (8.2)$$

onde:

I	indexa as usinas
N	grande coalizão
S	sub-coalizão
N	número de elementos de N
S	número de elementos de S
D(.)	função característica que representa o capacidade firme

O Valor de Shapley sempre existe, porém pode não pertencer ao núcleo. De fato, mesmo quando um jogo possui um núcleo vazio o valor de Shapley existe.

8.2.1
O sentido de justiça do Valor de Shapley

O Valor de Shapley pode ser visto como uma solução igualitária da repartição de benefícios. Para ganharmos intuição em que sentido a distribuição dos ganhos é igualitária considere o seguinte exemplo com duas usinas:

O jogo é dado por: $(\{1,2\}, v)$, o ganho de capacidade firme com a cooperação é:

$v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})$

Uma solução natural é repartir o ganho igualitariamente entre as usinas, ou seja, as usinas irão receber:

$$Sh_i = v(\{i\}) + \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) \quad , \text{i=1,2.} \qquad (8.3)$$

Ou seja, o que a usina 1 ganha com a presença da usina 2 é o mesmo que a usina 2 ganha com a presença da usina 1. A divisão de ganho é ilustrada na figura abaixo:

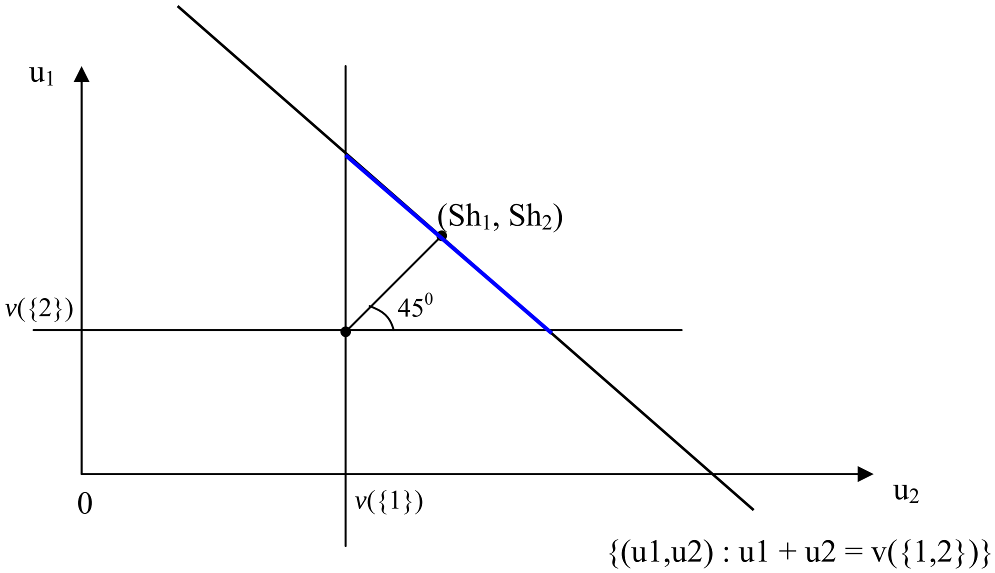

Figura 8.1 – Divisão igualitária dos ganhos com a cooperação

Como estender tal idéia de igualitarismo para um sistema com N usinas?

Note que a equação (8.3) pode ser reescrita como:

$$Sh_1 - v(\{1)) = Sh_2 - v(\{2\}) \qquad (8.4)$$

$$Sh_1 + Sh_2 = v(\{1,2\}) \qquad (8.5)$$

Ou seja, a solução do sistema acima é a equação (8.4), note que a solução é única.

A equação (8.4) diz que a diferença $Sh_i - v(\{i\})$ (benefício da cooperação) é a mesma para as usinas 1 e 2.

Neste ponto vamos estender a notação das alocações da seguinte maneira:

$Sh_i(S)$ representa a alocação de Shapley quando se restringe o jogo ao conjunto de S usinas. Por exemplo, $Sh_i(\{i\}) = v(\{i\})$.

Desta maneira torna-se natural a extensão do sistema de equações (8.4) e (8.5). *Dado qualquer coalizão S $\subset N$ e usinas i e j pertencentes a S, o ganho da usina i com a presença da usina j na coalizão S deve ser igual ao ganho da usina j com a presença da usina i na coalizão S*, i.e.:

$$Sh_i(S) - Sh_i(S \setminus \{j\}) = Sh_j(S) - Sh_j(S \setminus \{i\}) \qquad (8.6)$$

Vamos estender (8.4) da mesma maneira:

$$\sum_{m \in S} Sh_m = v(S) \qquad (8.7)$$

Em [29] mostra-se por indução que a resolução do sistema formado pelas equações (8.7) e (8.8) leva a definição de Shapley (8.2).

O ponto importante é a idéia de igualitarismo que o sistema gerado (8.6) e (8.7) produz, mostrando que as alocações de Shapley capturam tal sentido de igualdade.

8.2.2
Principais resultados de Convexidade

Nesta seção, exploraremos a propriedade de convexidade de um jogo. Note que, o Valor de Shapley não precisa estar contido no núcleo, por exemplo: tome um núcleo vazio. Em [29] é exemplificado que mesmo em um jogo com núcleo não vazio o Valor de Shapley pode não pertencer ao núcleo. Porém sob condições de convexidade, pode-se garantir que o Valor de Shapley pertence ao núcleo, conforme visto a seguir:

Definição de um jogo convexo: Um jogo (N,*v*) definido por N agentes e uma função característica *v* é dito convexo, se para todas subcoalizões S e T tal que S $\subset$ T, para qualquer agente i $\not\in$ T tem-se:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$$

Isto é, a contribuição marginal do agente *i* é maior em coalizões maiores.

O Valor de Shapley pode não estar contido no núcleo, porém se um jogo é convexo temos o seguinte resultado:

Proposição: Se um jogo (N, *v*) é convexo então o Valor de Shapley pertence ao núcleo, em particular o núcleo é não vazio.

8.3.1
Cálculo de todas as permutações de ordem de entrada

O método de Shapley tenta eliminar as limitações do método de incremento de benefícios através do cálculo de todas as permutações da ordem de entrada possíveis, como mostrado em um exemplo onde o valor do benefício incremental do gerador em da sub-coalizão é dado por f, mostrado abaixo:

Tabela 8.1 – Alocações de Shapley

Ordem	*f*(1)	*f* (2)	*f* (3)
1,2,3	1	8	19
1,3,2	1	26	1
2,1,3	1	8	19
2,3,1	1	8	19
3,1,2	1	26	1
3,2,1	1	26	1
Média	1	17	10