7
O Método do Nucleolus

O conceito de alocação pelo método do Nucleolus foi desenvolvido por Schmeidler em [23]. Caso o núcleo do jogo não for vazio, o método garante que a alocação obtida pertence ao núcleo. Em linhas gerais, o método do Nucleolus busca uma alocação que maximize a pior vantagem, tal critério de eqüidade é conhecido como critério “maxmin”.

Como visto no capítulo 5, o núcleo pode conter infinitas alocações, muitas das alocações podem ser consideradas não satisfatórias do ponto de vista comparativo. Uma pergunta natural: Qual a melhor maneira de escolher a alocação mais adequada ou igualitária? O método do Nucleolus discutido neste capítulo fornece um critério de escolha. Uma vantagem prática é que a solução do método do Nucleolus é única, portanto não é passível de ambigüidade.

7.1
Definição do Nucleolus

O conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de contribuições para cada usina, como no exemplo com três usinas do capítulo 5. Uma pergunta natural seria se existe alguma alocação no núcleo que seja preferível? O método do Nucleolus fornece uma solução que pertence ao núcleo e é única.

Considere o exemplo do capítulo 5 onde o núcleo possui infinitas soluções, por conveniência vamos listar as duas primeiras soluções obtidas para análise.

Solução 1:

Tabela 7.1 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	7.6
B	99.3
C	23.1

Solução 2:

Tabela 7.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	Capacidade Firme (MW)
A	102.9
B	27.1
C	0.0

Vamos analisar as soluções 1 e 2. Ambas as soluções pertencem ao núcleo, porém as usinas B e C preferem a solução 1 à solução 2. Enquanto a usina A prefere a solução 2 à solução 1. Note que há um conflito de interesses. Qual o critério deve-se adotar para decidir qual solução do núcleo é a mais adequada ou eqüitativa?

O método do Nucleolus resolve este tipo de problema fornecendo uma alocação que maximiza a pior vantagem entre todas as coalizões, como o método produz uma única solução, ao se maximizar a pior vantagem podemos ter duas alocações pertencentes ao núcleo tal que a pior vantagem seja igual, como escolher entre essas duas alocações? Uma maneira natural é escolhermos a alocação tal que a segunda pior vantagem seja máxima e procedendo assim encontraremos uma única solução. Tal critério, pós- processamento de maximização da pior vantagem é conhecido como maximização lexicográfica[1] das vantagens.

A idéia do Nucleolus é maximizar a menor vantagem das alocações. Esta idéia é explicitada pelo jurista John Rawls em seu livro “The Theory of Justice”. Suponha que os indivíduos participantes de uma sociedade decidam que tipos de papéis existirão na sociedade para que esta funcione e após isso seja sorteado aleatoriamente que tipo de papel cada indivíduo irá exercer na sociedade. John Rawls argumenta que uma divisão natural que os indivíduos escolheriam seria a maximização do pior papel existente na sociedade, ou seja, a maximização da menor vantagem.

[1] A ordem lexicográfica corresponde a ordem do dicionário. Ex: $(x_1,x_2) \geq (y_1,y_2)$ se, e só se $(x_1 > y_1)$ ou $(x_1 = y_1$ e $x_2 \geq y_2)$.

7.2
Principais Resultados da Alocação por Nucleolus

Para compreendermos melhor o tipo de solução que o método do Nucleolus fornece Nesta seção resumimos os principais resultados desenvolvidos por Schmeidler em [23].

Teorema 1: Todo conjunto compacto do $\Re^n$ tem um Nuclelous associado não vazio.

Observe que o método de alocação do Nucleolus é um conceito aplicado sobre conjuntos quaisquer. Neste caso na literatura podemos ter vantagens negativas. No nosso caso estamos interessados em vantagens positivas.

Teorema 2: O Nucleolus de um conjunto convexo consiste em um único ponto.

Como o núcleo é um conjunto convexo (poliedro) temos que o Nucleolus do núcleo é único.

Teorema 3: O Nucleolus de um jogo é uma função contínua de funções características.

Este resultado é interessante, pois nos dá um conceito de robustez do Nucleolus, pequenas alterações na função característica resultam em pequenas alterações nas alocações do método.

7.3
Descrição do Método do Nucleolus

Nesta seção, será descrito um procedimento para o cálculo do Nucleolus de um jogo com N usinas. Dada uma alocação (ϕ_1,..., ϕ_N), seja ϕ(S) a soma das alocações das usinas que compõem a subcoalizão S, i.e., $\phi(S) = \sum_{i \in S} \phi_i$. A subcoalizão S fora da grande Coalizão tem uma capacidade firme total de D(S) e participando da grande Coalizão uma capacidade firme total de ϕ(S). Portanto, o ganho de participar da grande Coalizão é dado por: $e(S, \phi) = \phi(S) - D(S)$.

A coalizão S é estritamente melhor que a coalizão T se e(S, ϕ) > e(T, ϕ). Um critério natural de eqüidade é buscar uma alocação que maximize o menor ganho e(S, ϕ) entre todas as coalizões $S \subset N$. Alocações que obedecem ao critério de "maxmin" são conhecidas como o alocações pertencentes ao último núcleo, "least core".

Para calcular uma alocação pertencente ao "least core", devemos maximizar a menor vantagem, resolvendo o seguinte problema de programação linear:

Max δ

sujeito a

$\phi(N) = D(N)$ (Eficiência)

$\delta \leq \min_S(e(S, \phi))$

$\delta \geq 0$

Onde δ representa a pior vantagem entre todas as subcoalizões.

Ou ainda,

Max δ

sujeito a

$\phi(N) = D(N)$ (Eficiência)

$\delta \leq e(S, \phi)$ para todo $S \subset N$

$\delta \geq 0$

Como $\delta \geq 0$, temos que a "vantagem" é não-negativa para qualquer subconjunto, ou seja, nenhum subgrupo é subsidiado por outro, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo. Note que, o Nucleolus fornece uma alocação pertencente ao δ-núcleo, um conceito mais geral que o núcleo visto no capítulo 4.

Caso na solução do problema de maximizar a pior vantagem exista uma única solução, o método do Nucleolus chegou ao fim, caso contrário para cada alocação ordene todas as vantagens e(.,.) do menor para o maior compondo um vetor $\theta(x)$ de dimensão (2^n-2). Escolha a alocação que maximize $\theta(x)$ lexicograficamente. Digamos y é alocação do Nucleolus, então para toda alocação x o primeiro índice k tal que $\theta_k(y) \neq \theta_k(x)$ devemos ter necessariamente $\theta_k(y) > \theta_k(x)$. Note que, tal ordenamento à primeira vista pode parecer ad hoc, porém como mencionado, a maximização lexicográfica maximiza a n-ésima vantagem, caso as n-1 primeiras vantagens são iguais. Por exemplo: duas alocações coincidem numericamente na pior vantagem então é escolhida a alocação dentre as duas que possui a segunda pior vantagem maior.

A alocação obtida dessa forma, chamada de Nucleolus, é única por construção e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio.

7.4
Vantagens e desvantagens do método

Para se calcular o Nucleolus de um jogo, primeiro calcula-se o least core onde o esforço computacional é igual ao do cálculo do núcleo. Portanto, o número de restrições cresce exponencialmente. Tornando-se inviável seu cálculo computacionalmente para um número pequeno de agentes, por exemplo: 30 agentes resultam em cerca de um bilhão de restrições.

Para desenhos de redes capacitadas, conforme mostrado em [45] pode se fazer uso da simetria do problema e encontrar o Nucleolus sem necessariamente se adicionar todas as restrições. Tal simetria, não existe no problema de capacidade firme.

Uma vantagem do método é que sempre fornece uma única alocação eqüitativa no sentido do critério “maxmin” para o núcleo do jogo.