6
Alocação Marginal dos Benefícios

Qual a contribuição de um gerador para a *Capacidade de Suprimento da Demanda total* (CSD) de um sistema? Uma maneira intuitiva de responder a esta pergunta é medirmos o efeito na CSD do sistema quando aumentamos uma unidade na capacidade do gerador. Este efeito pode ser traduzido como a importância ou contribuição do gerador a CSD do sistema. Neste capítulo é abordada a repartição de benefícios do ponto de vista da teoria marginalista. Ou seja, a contribuição de um gerador para a máxima carga atendida pelo sistema é mensurada em termos do efeito que o incremento de uma unidade na capacidade do gerador tem na CSD do sistema.

6.1
Noção Intuitiva da Alocação Marginal

Considere o problema do cálculo da CSD de um sistema. Conforme visto no capítulo 4 este problema pode ser formulado como um problema de programação linear.

$$
\begin{array}{lll}
v(c_1,...,c_N) = & \text{Max} \quad D & \text{Multiplicadores} \\
 & \text{sujeito a} & \text{simplex} \\
 & \sum_{s=1}^{S} q_s r_s \leq \delta D & \pi_D \\
 & r_s \geq D - g_s & \pi_s \\
 & r_s \geq 0 &
\end{array}
$$

Para todos os cenários s.

Colocando o problema acima de forma que o lado direito das restrições representem os recursos temos:

$$
\begin{array}{lll}
v(c_1,...,c_N) = & \text{Max} \quad D & \text{Multiplicadores} \\
 & \text{sujeito a} & \text{simplex}
\end{array}
$$

$$\sum_{s=1}^{S} q_s r_s - \delta D \leq 0 \qquad \pi_D$$

$$D - r_s \leq g_s \qquad \pi_s$$

$$r_s \geq 0$$

Para todos os cenários s.

Os multiplicadores simplex representam a derivada da solução ótima com respeito a alterações incrementais no lado direito das restrições. Por exemplo: π_s representa $\partial v / \partial g_s$, i.e, a derivada da máxima demanda atendida com respeito à capacidade do sistema no cenário *s*.

Uma medida da contribuição a máxima demanda atendida pelo sistema de um gerador *i* é a derivada de $v(c_1,...,c_N)$ com respeito a c_i representada pelo multiplicador π_{C_i}.

Note que, para cada cenário *s* a capacidade é dada por:

$$g_s = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{n,s} c_n$$

onde $\alpha_{n,s}$ é uma função indicadora que assume o valor 1 quando a usina *n* está operando e assume valor zero quando a usina *n* não está produzindo energia.

Desta maneira temos que o recurso c_i compõe a capacidade no cenário *s* quando $\alpha_{i,s} = 1$, ou seja, quando o gerador i está funcionando.

Seja Ω_i^1 o conjunto dos cenários de capacidades onde o gerador i está produzindo energia, definido por:

$$\Omega_i^1 = \{s \in S \mid \alpha_{i,s} = 1\}$$

Pela restrição $D - r_s \leq g_s$ o multiplicador π_{C_i} pode ser calculado por:

$$\pi_{C_i} = \sum_{s \in \Omega_i^1} \pi_s$$

Pelo Teorema Forte da Dualidade temos:

$$v(c_1,...,c_N) = \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* g_s$$

Fazendo $g_s = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{n,s} c_n$ temos:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s^* g_s = \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* \left[\sum_{n=1}^{N} \alpha_{n,s} c_n \right] = \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{s=1}^{S} \pi_s^* \alpha_{n,s} \right] c_n = \sum_{n=1}^{N} \left[\sum_{s \in \Omega_n^1} \pi_s^* \right] c_n = \sum_{n=1}^{N} \pi_{c_n} c_n$$

Portanto,

$$v(c_1,...,c_N) = \sum_{n=1}^{N} \pi_{c_n} c_n \qquad (6.1)$$

A medida $\phi_n = \pi_{c_n} c_n$ é a contribuição do gerador n para a máxima demanda atendida pelo sistema de usinas (c_1,...,c_N) a um nível de confiabilidade estabelecido pelo regulador. Note que,

$$\sum_{n=1}^{N} \phi_n = v(c_1,...,c_N) = CSC \qquad (6.2)$$

Ou seja, não há desperdício nas alocações marginais. Resta saber, se a desagregação da CSD pela contribuição marginal é justa. Na próxima seção será mostrado que a alocação marginal pertence ao núcleo de um jogo cooperativo, portanto satisfaz o critério de justiça dado pelo núcleo.

6.2
Alocação no Núcleo

Para provar que a alocação marginal está no núcleo usaremos os mesmos procedimentos da seção 5.3 (que provaram o atendimento da CSD à condição de superaditividade). Porém, desta vez, usaremos um caso com três usinas, ao invés de duas, já que também devemos mostrar que esta alocação atende às restrições do núcleo para todas as sub-coalizões. Novamente, a extensão para o caso com N usinas é imediata.

Os modelos para o cálculo de Capacidade Firme de cada usina individualmente e das três usinas juntas podem ser simplificados da seguinte forma:

$f(H_1) =$ Max cx

sujeito a (6.3a)

$$Ax \leq b_1$$

$$f(H_2) = \quad \text{Max} \quad cx$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.3b)$$

$$Ax \leq b_2$$

$$f(H_3) = \quad \text{Max} \quad cx$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.3c)$$

$$Ax \leq b_3$$

$$f(H_1,H_2,H_3) = \quad \text{Max} \quad cx$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.3d)$$

$$Ax \leq b_1 + b_2 + b_3$$

Seus problemas duais correspondentes são:

$$f'(H_1) = \quad \text{Min} \quad \pi b_1$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.4a)$$

$$\pi A \geq c$$

$$f'(H_2) = \quad \text{Min} \quad \pi b_2$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.4b)$$

$$\pi A \geq c$$

$$f'(H_3) = \quad \text{Min} \quad \pi b_3$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.4c)$$

$$\pi A \geq c$$

$$f'(H_1,H_2,H_3) = \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3)$$

$$\text{sujeito a} \qquad (6.4d)$$

$$\pi A \geq c$$

Sejam π_1, π_2, π_3 e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (6.4a) a (6.4d), respectivamente. O método a Benefícios marginais aloca a cada usina o firme:

$$\phi_1 = \pi_{123}b_1 \tag{6.5a}$$

$$\phi 2 = \pi_{123}b_2 \tag{6.5b}$$

$$\phi 3 = \pi_{123}b_3 \tag{6.5c}$$

Provou-se no capítulo 4 que $\pi_{123}b_1 \geq \pi_1 b_1$, $\pi_{123}b_2 \geq \pi_2 b_2$, e $\pi_{123}b_3 \geq \pi_3 b_3$. Portanto $\phi_1 \geq f(H_1)$, $\phi_2 \geq f(H_2)$ e $\phi_3 \geq f(H_3)$.

Nos resta provar que para qualquer sub-coalizão, a soma das alocações das usinas que nela participam é maior que a capacidade firme a sub-coalizão quando esta opera sozinha.

No caso de três usinas, isso equivale dizer que devemos ter:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \tag{6.6a}$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \tag{6.6b}$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \tag{6.6c}$$

O modelo de cálculo da energia firme da sub-coalizão das usinas 1 e 2, por exemplo, pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(H_1,H_2) = \quad \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \tag{6.7}$$
$$Ax \leq b_1 + b_2$$

O modelo para uma coalizão composta por todas as três usinas, como já foi mencionado, também pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(H_1,H_2,H_3) = \quad \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \tag{6.8}$$
$$Ax \leq b_1 + b_2 + b_3$$

Os problemas duais dos modelos (6.7) e (6.8) são:

$$f'(H_1,H_2) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2)$$
$$\text{sujeito a} \qquad (6.9)$$
$$\pi A \geq c$$

$$f'(H_1,H_2,H_3) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3)$$
$$\text{sujeito a} \qquad (6.10)$$
$$\pi A \geq c$$

Sejam π_{12} e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (6.9) e (6.10).

Novamente o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos dois problemas duais, e a solução ótima de cada um é uma solução viável do outro. Em particular, π_{123}, é uma solução viável do problema (6.9). Como a função objetivo do problema dual é de minimização temos que:

$$\pi_{123}\,(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}\,(b_1 + b_2) \qquad (6.11)$$

O lado esquerdo da inequação (6.11) corresponde à soma das alocações das usinas 1 e 2 quando estas participam da grande coalizão, e o lado direito corresponde à energia firme da sub-coalizão das usinas quando esta opera sozinha. A inequação (6.11) corresponde a $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$, que era o que desejávamos provar. Para todas as outras sub-coalizões possíveis a prova é análoga e imediata.

Provou-se, portanto, que a alocação BM pertence ao núcleo do jogo.

6.3
Núcleo do Jogo Não Vazio

A partir da prova de que a alocação marginalista sempre pertence ao núcleo, e dado que é sempre possível usá-la como método de alocação, conclui-se que *o núcleo do jogo que envolve a alocação de potência firme nunca é vazio*.

6.4
Vantagens e Desvantagens do Método

Ao se calcular a *Capacidade de Suprimento da Demanda* total de um sistema como um problema de programação linear, os multiplicadores de Lagrange associados a cada restrição são obtidos automaticamente. O esforço computacional do cálculo das contribuições marginais é o mesmo que resolver o problema de programação linear para o cálculo da CSD. Observe que para encontrar o núcleo, o esforço computacional cresce exponencialmente com o número de agentes. Caso tenhamos 30 agentes o número de subcoalizões é 2^{30}, portanto para calcular o núcleo deve-se resolver 2^{30} problemas de programação linear correspondente a cada subcoalizão. Assim, em comparação ao método de alocação no núcleo, a alocação marginal é muito mais eficiente computacionalmente.

Outra vantagem é a alocação marginal pertencer ao núcleo.

Uma desvantagem das alocações marginais está no fato das alocações pertencentes ao núcleo possuírem um conceito de justiça limitado. Considere o seguinte sistema:

Tabela 6.1. Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	96.9	5.3
B	84.7	6.8
C	20.4	6.1

A medida $\phi_n = \pi_{c_n} c_n$ é a contribuição do gerador *n* para a máxima demanda atendida pelo sistema de usinas ($c_1,...,c_N$) a um nível de confiabilidade. A CSD do sistema acima é de 130.1MW, considerando-se como critério de confiabilidade (EPNS $\leq$ 2%D). As repartições marginais estão resumidas na tabela abaixo:

Tabela 6.2 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	π_{c_n}	ϕ_n (MW)	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	0.66	64.0	96.9	5.3
B	0.51	43.0	84.7	6.8
C	1.13	23.1	20.4	6.1

Observe que as alocações ϕ_n pertencem ao núcleo, satisfazem o conjunto de restrições do núcleo explicitadas na seção 5.3.1. Porém, a alocação de capacidade firme da usina B (43MW) é quase a metade de sua capacidade total (84.7MW) e sua taxa de falha é aproximadamente a mesma das demais. O caso mais interessante é que apesar da usina A possuir a menor taxa de falha 5.3% e ter a maior capacidade 96.9MW possui um multiplicador de lagrange 0.66 muito inferior ao da usina C 1.13. Ou seja, a usina C mesmo com uma capacidade muito pequena em comparação as demais está se beneficiando mais que as usinas A e B com a cooperação. Portanto, as alocações marginais podem ser injustas com geradores que contribuem significativamente para a confiabilidade do sistema.