5
Teoria dos Jogos Cooperativos

A teoria dos jogos em geral modela o comportamento e as estratégias dos jogadores em situações em que a decisão dos agentes afeta as decisões dos demais. Podemos dividir a teoria dos jogos em duas categorias: a teoria dos jogos não cooperativos, onde não é possível combinar estratégias ou fazer acordos entre os agentes e a teoria dos jogos cooperativos, onde os acordos entre os agentes é a base para a cooperação. Dado um jogo, a teoria dos jogos cooperativos procura, responder quais são os possíveis resultados com a cooperação no jogo, que tipos de coalizões podem ser formadas, como a repartição dos ganhos com a cooperação será realizada afim de que os agentes tenham incentivos a cooperarem. Os conceitos de soluções dos jogos cooperativos estão associados a conceitos subjetivos de equidade e justiça, explorados em Young (1994) [13].

5.1
Revisão Bibliográfica

O setor elétrico por sua natureza estimula a cooperação dos agentes, pois há um grande apelo para o ganho com a sinergia da ação em conjunto dos agentes. Caso uma usina esteja em manutenção (evento conhecido, ex-ante) ou tenha uma indisponibilidade por uma quebra de uma máquina (fenômeno aleatório), o ganho com a cooperação resulta em um atendimento de uma capacidade de suprimento de demanda maior, pois é pouco provável que muitos geradores falhem simultaneamente. Em jogos não-cooperativos temos soluções que caracterizam resultados de um jogo, como por exemplo: equilíbrio de Nash e "*trembling hand*". Em jogos cooperativos existem também conceitos de solução similares como núcleo e ε-núcleo. A teoria de jogos cooperativos vem sendo aplicada, no setor elétrico, a problemas de "alocação" de um modo geral. Por exemplo: o desenho de tarifas de ponta e fora da ponta (alocação de custos de operação e investimento de um sistema elétrico), alocação dos custos de transmissão. No problema da transmissão em particular o desenvolvimento do serviço de transmissão (construção de circuitos, aquisição de recursos auxiliares, faixas de passagem) necessário para transportar a geração para a demanda ocorre de maneira *compartilhada* por um conjunto de agentes (geradores e demandas). É intuitivo que o custo do serviço integrado é menor que a soma do desenvolvimento de serviços separados para cada agente ou subgrupos de agentes. Em outras palavras, o desenvolvimento conjunto é eficiente em termos econômicos. O problema é então como *alocar* este custo de serviço entre os participantes de maneira eficiente e justa. A teoria dos jogos cooperativos é extensivamente aplicada na alocação de custos, por exemplo, transmissão entre geradores, consumidores, transmissores ou subconjunto de todos anteriores. A referência [47] apresenta uma visão geral da utilização de jogos cooperativos para alocação de custos de transmissão. Nestas aplicações distintos métodos de jogos cooperativos têm sido aplicados, como o Valor de Shapley, Núcleo, Aumann-Shapley, etc.

Ainda no contexto de "custos de transmissão", diversas outras aplicações são encontradas na literatura como a alocação do sobre custo operativo e custos de congestão [13][47], o uso de teoria dos jogos cooperativos para repartir custos associados a serviços ancilares[11], obter fatores de perdas nodais, VAR *planning*[9], entre outros.

Em outras áreas, por exemplo, engenheiros da *Tennessee Valley Authority* consideraram nos anos 30 distintos métodos para alocar entre os beneficiários (usuários de irrigação, navegação e produtores de energia elétrica) os custos de melhoria do sistema de comunicação de água existente na época e construção de represas[16].

5.2
Conceitos Básicos

Para utilizarmos a teoria dos jogos cooperativos, vamos fazer algumas definições e desenvolver alguns conceitos básicos.

Definição: Um jogo é definido por: (N,v) onde N representa o conjunto de agentes e v é uma função, chamada de ***função característica,*** para toda coalizão não-vazia $S \subset N$ atribui um número $v(S)$ chamado, valor da coalizão S. No nosso contexto, a função característica é a *Capacidade de Suprimento da Demanda* total (CSD) da coalizão S, abordada no capítulo 4.

A coalizão formada por todos os N jogadores é chamada de *grande coalizão.* *N*um jogo com N jogadores há 2^N diferentes coalizões possíveis. A coalizão vazia $\varnothing$ é a coalizão na qual nenhum jogador participa.

Um jogo é superaditivo se:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \text{ para todo } S, T \subseteq N, \text{ tal que } S \cap T = \varnothing \qquad (5.1)$$

Esta propriedade é fundamental na aplicação da teoria de jogos cooperativos, pois nos diz que o valor atribuído a coalizão ($S \cup T$) é maior que a soma dos valores atribuídos as coalizões S e T separadas. No nosso contexto, a Capacidade de Suprimento de Carga é maior quando as usinas operam em conjunto ao invés de separadas ou em subgrupos.

Assumindo que a função característica do jogo apresenta superaditividade, a grande coalizão sempre será formada ao final do jogo. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do benefício total, é como dividi-lo de modo eficiente e justo entre os agentes que formam esta grande coalizão.

5.3
O Conceito de Núcleo de um jogo

Um vetor de alocações ϕ incentiva fracamente a cooperação se satisfaz:

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \qquad \text{(Eficiência)} \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i \in S} \phi_i \geq v(S), \text{ para todo } S \subset N \qquad \text{(Racionalidade das Coalizões)} \qquad (5.3)$$

O conjunto formado pelas alocações ϕ que atendem (5.2) e (5.3) é chamado *núcleo*. Note que as alocações do núcleo são eficientes, portanto ótimos de Pareto. A desigualdade (5.3) implica que as alocações na cooperação devem ser maiores que a alocação proveniente de qualquer outra subcoalizão operando isoladamente. Observe que (5.3) implica que os indivíduos tenham incentivos que dominam fracamente a atitude da não cooperação, isso é caracterizado pela desigualdade não ser estrita. Ou seja, podem existir alocações onde (5.3) é satisfeita com igualdade. Neste caso, pode ocorrer uma situação interessante como ilustrado no exemplo da seção 4.3, a coalizão pode ter inveja da alocação de outra coalizão e, portanto não participar da grande coalizão, já que recebe o mesmo valor fora da coalizão. Isto dá origem como já mencionado ao estudo de alocações livres de inveja.

O núcleo formaliza o conceito subjetivo de justiça no sentido que nenhum subgrupo é subsidiado por outro. Se uma alocação pertence ao núcleo de um jogo cooperativo podemos dizer que o benefício atribuído a qualquer agente ou coalizão, é maior ou igual ao que estes agentes conseguiriam obter fora da coalizão.

Note que para se modelar as alocações livre de inveja, devem-se conhecer as preferências dos agentes e coalizões em relação às alocações das outras coalizões. Tornando na prática um conjunto de difícil caracterização já que não se tem conhecimento de tais preferências.

5.3.1
Núcleo: ilustração para o problema de Capacidade firme

Considere N={1,...,N} o conjunto de N geradores em um sistema. Seja *D*(.) a função que calcula a capacidade firme de qualquer subconjunto de geradores do sistema, no capítulo 4 é estudado extensivamente o cálculo da capacidade firme de qualquer conjunto de usinas. Com isso, teríamos, por exemplo, para um caso com 3 usinas, $D(g_2)$ a capacidade firme da usina g_2; $D(g_1,g_3)$ a capacidade firme do conjunto de usinas g_1 e g_3; e $D(g_1,g_2,g_3)$ a capacidade firme total do sistema.

Sejam ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 as potências firmes alocadas à g_1, g_2 e g_3, respectivamente. A primeira restrição do núcleo é que a soma dos certificados de capacidade firme devem ser iguais à capacidade firme total do sistema: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(g_1,g_2,g_3)$.

Considere o seguinte sistema como exemplo:

Tabela 5.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
A	96.9	5.3
B	84.7	6.8
C	20.4	6.1

Vamos denotar os geradores pelos seus respectivos índices.

$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(1,2,3)$.

O segundo grupo de restrições exige que a alocação de cada usina não seja inferior a capacidade firme obtida operando separadamente:

$\phi_1 \geq D(1)$

$\phi_2 \geq D(2)$

$\phi_3 \geq D(3)$

O terceiro grupo de restrições se aplica às combinações de duas usinas:

$\phi_1 + \phi_2 \geq D(1,2)$

$\phi_1 + \phi_3 \geq D(1,3)$

$\phi_2 + \phi_3 \geq D(2,3)$

As variáveis de decisão ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 do problema acima são as alocações de capacidade firme atribuída aos geradores $\{g_1;g_2;g_3\}$, e os lados direitos das restrições são as capacidades firmes das coalizões, i.e, valores conhecidos. Qualquer alocação $\{\phi_1;\phi_2;\phi_3\}$ que atende o conjunto de restrições acima pertence ao núcleo assim nenhum subconjunto de agentes teria incentivo de sair da grande coalizão.

As restrições do núcleo formam um conjunto linear, onde o lado esquerdo de cada restrição contém uma das combinações possíveis dos agentes (1 a 1, 2 a 2 etc.). Por sua vez, o valor do lado direito da restrição contém o benefício (capacidade firme, no caso) associado à mesma combinação. Note que o núcleo é um poliedro, portanto um conjunto convexo.

O núcleo deste jogo corresponde à solução do sistema linear formado pelo conjunto de restrições lineares anteriores. Este sistema é dado a seguir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = D(g_1,g_2,g_3) \quad (5.4a)$$

$$\phi_1 \geq D(g_1) \quad (5.4b)$$

$$\phi_2 \geq D(g_2) \quad (5.4c)$$

$$\phi_3 \geq D(g_3) \quad (5.4d)$$

$$\phi_1 + \phi_2 \geq D(g_1,g_2) \quad (5.4e)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq D(g_1,g_3) \quad (5.4f)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq D(g_2,g_3) \quad (5.4g)$$

Utilizando o critério de confiabilidade EPNS $\leq$ 2% Demanda, calculou-se a Capacidade de Suprimento de Carga para todas as 2^3 coalizões do exemplo (5.1).

Conforme ilustrado na tabela abaixo:

Tabela 5.2 – Capacidade Firme das Coalizões

Coalizões de Usinas	Capacidade Firme (MW)
∅	0.0
{3}	0.0
{2}	0.0
{2,3}	27.1
{1}	0.0
{1,3}	30.7
{1,2}	107.0
{1,2,3}	130.1

Dados esses valores de capacidades firmes das coalizões, o núcleo possui mais de uma solução, por exemplo:

Solução 1:

Tabela 5.3 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 1

Usina	Capacidade de Firme (MW)
A	7.6
B	99.3
C	23.1

Solução 2:

Tabela 5.4 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 2

Usina	Capacidade de Firme (MW)
A	102.9
B	27.1
C	0.0

O núcleo é um conjunto convexo (poliedro). Logo, qualquer combinação convexa das soluções 1 e 2 também é solução. Por exemplo:

Solução 3 = 0,5. Solução 1 + 0,5. Solução 2.

A solução 3 é dada abaixo:

Tabela 5.5 – Alocações de capacidade Firme das usinas na Solução 3

Usina	Capacidade de Firme (MW)
A	55.3
B	63.2
C	11.5

Então, o núcleo pode conter infinitas soluções.

5.4
Condição para um jogo cooperativo

Torna-se natural a aplicação da teoria de jogos cooperativos para a repartição da capacidade firme total do sistema pela existência do benefício mútuo motivado pela sinergia entre os geradores e o efeito “portfólio”. Para que isso de fato ocorra, a soma das capacidades firmes de uma coalizão S e T operando separadamente deve ser menor ou igual à capacidade firme obtida quando a coalizão das usinas S e T operam em conjunto.

Em outras palavras, o jogo deve ser superaditivo (5.5). Para o problema em análise nesta dissertação, este aspecto intuitivo se traduz no requisito de que a soma das capacidades firmes quando as coalizões operam separadamente não exceda a capacidade firme do conjunto. Por exemplo, para o sistema composto de três usinas g_1, g_2 e g_3, a seguinte desigualdade deve ser atendida:

$$D(g_1,g_2,g_3) \geq D(g_1) + D(g_2) + D(g_3) \qquad (5.5)$$

que é justamente a expressão da sinergia.

Porém as restrições do tipo (5.5) devem ser válidas também para todos os subconjuntos de agentes, por exemplo, devem ser válidas para as desigualdades do tipo:

$$D(g_1,g_2,g_3) \geq D(g_1,g_2) + D(g_3) \qquad (5.6)$$

A verificação de todas as condições parece ser tão complexa quanto verificar o conjunto de restrições de núcleo (5.1). Entretanto, como será visto a seguir, pode-se demonstrar que as condições de tipo (5.4) são válidas se o benefício global é calculado como a solução de um problema de programação linear com algumas características específicas, como é o caso da Capacidade Firme.

Esta demonstração será feita em duas etapas: na primeira será mostrado que a condição de superaditividade é satisfeita se o benefício do jogo cooperativo em questão pode ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas os recursos ou lado direito das restrições para o cálculo do benefício de qualquer subconjunto de agentes.

5.4.1
Condição atendida para o caso de um modelo de otimização linear

Por simplicidade, a demonstração será feita para um caso de 2 agentes. A generalização para N agentes é imediata, ou seja, a prova de que o modelo do firme atende à condição de superaditividade para quaisquer dois subconjuntos de agentes é análoga.

Suponha que o benefício de um agente em um jogo cooperativo qualquer possa ser calculado com a solução de um problema de programação linear. Suponha ainda que o benefício de qualquer subconjunto de agentes possa ser calculado através do mesmo modelo, apenas alterando o lado direito ("recursos") das restrições.

Deseja-se mostrar que o benefício conjunto é maior ou igual à soma dos benefícios individuais:

$$v(1,2) \geq v(1) + v(2) \qquad (5.7)$$

onde as funções dos benefícios $v(.)$ são dados por:

$$v(1) = \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \qquad (5.8a)$$
$$\text{A}x \leq b_1$$

$$v(2) = \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \qquad (5.8b)$$
$$\text{A}x \leq b_2$$

$$v(1,2) = \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \qquad (5.8c)$$
$$\text{A}x \leq b_1 + b_2$$

Calculando o Dual de cada problema, tem-se:

$$v(1) = \text{Min} \quad \pi b_1$$
$$\text{sujeito a} \qquad (5.9a)$$
$$\pi\text{A} \geq c$$

$$v(2) = \text{Min} \quad \pi b_2$$
$$\text{sujeito a} \qquad (5.9b)$$
$$\pi\text{A} \geq c$$

$$v(1,2) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2)$$

sujeito a (5.9c)

$\pi A \geq c$

Sejam π_1, π_2 e π_{12} as soluções ótimas dos problemas (5.8a) a (5.8c). Aplicando a igualdade primal-dual, a restrição desejada (5.7) é reescrita como:

$$\pi_{12}(b_1 + b_2) \geq \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 \tag{5.10}$$

Como o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos três problemas duais, as soluções ótimas de cada problema são soluções viáveis dos demais. Em particular, π_{12}, é uma solução viável do problema (5.8a). Como o problema dual minimiza a função objetivo, isto significa que:

$$\pi_{12} b_1 \geq \pi_1 b_1 \tag{5.11}$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao problema (5.8b), resulta:

$$\pi_{12} b_2 \geq \pi_2 b_2 \tag{5.12}$$

Somando (5.11) e (5.12), chega-se a (5.10), que por sua vez equivale ao resultado desejado, que é a restrição (5.7).

5.4.2
Condição atendida para o caso dos certificados de Capacidade Firme

O problema do cálculo de Capacidade Firme pode ser formulado conforme:

$F(g_1,\ldots, g_N) = \text{Max } d$

s.a.

$$\sum_k p_k r_k - \delta d \leq 0$$

$$r_k \geq d - \sum_i \beta_{ik} g_i, k = 1,\ldots,K$$

$$r_k \geq 0, k = 1,\ldots, K$$

Ou,

$F(g_1,\ldots, g_N) = \text{Max } d$

s.a.

$$\sum_k p_k r_k - \delta d \leq 0$$

$$r_k - d \geq -\sum_i \beta_{ik} g_i , k = 1,...,K$$

$$r_k \geq 0 , k = 1,\ldots, K$$

Agora seja o vetor:

$$E_i = \begin{bmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ . \\ \beta_{iK} \end{bmatrix}, i = 1,.. N$$

Então problema acima pode ser escrito de uma forma abstrata como:

$F(g_1,\ldots, g_N) = \text{Max } cx$

s.a.

$$Ax = 0$$

$$Bx = \sum_i E_i g_i$$

$$x \geq 0$$

Por dualidade,

$$F(g_1,\ldots, g_N) = \sum_i (\pi_0^t E_i) g_i$$

Onde π_0 é solução ótima de :

$$\text{Min } \sum_i (\pi^t E_i) g_i$$

(5.13)

s.a.

$$A^t\theta + B^t\pi \geq c$$

Agora, considere

$$F(0,..., 0,g_i,0,...,0) = (\pi_i^t E_i) g_i$$

Onde π_i é solução ótima de :

Min $(\pi^t E_i)g_i$

(5.14)

s.a.

$$A^t\theta + B^t\pi \geq c$$

Note que como π_0 é solução ótima para o problema (5.13) ele é viável para o problema (5.14):

Então,

$$(\pi_0^t E_i)g_i \geq (\pi_i^t E_i)g_i\ ,\ i = 1,\ldots, N$$

Logo,

$$F(g_1,\ldots, g_N) = \sum_i (\pi_0^t E_i)g_i \geq \sum_i (\pi_i^t E_i)g_i = \sum_i F(0,..,0, g_i ,0,...,0)$$

Portanto, o Cálculo de Capacidade Firme possui a propriedade de superaditividade para restrições lineares.