3
Critérios de Confiabilidade

Uma das funções do regulador consiste na definição de critérios de confiabilidade. Define-se um conjunto de risco aceitável e uma medida de risco para determinar se o risco de uma determinada posição pertence ou não pertence ao conjunto de risco aceitável. Neste capítulo, vamos apresentar medidas de risco usadas no setor elétrico e em finanças, a definição de "medida de risco coerente", seguido da análise de suas propriedades.

3.1
Medidas de Confiabilidade

Uma medida de confiabilidade usada tradicionalmente no setor elétrico como critério de planejamento e decisões de investimento para adequação da geração a demanda é a LOLP, definida abaixo:

Definição: LOLP (Loss of Load Probability)

LOLP = P($r > 0$), ou seja, é a probabilidade de perda de carga; r é a variável aleatória que representa o corte de carga, i.e., $r = \max(D - g, 0)$, g é a variável aleatória que representa a geração de capacidade do sistema, D é a demanda do sistema.

Observe que P($r > 0$) = P($g < D$). Dado um nível de confiabilidade $\alpha \in (0,1)$, podemos obter o quantil associado a LOLP $\leq \alpha$ definido por: $D_\alpha = \sup_D\{D\text{:LOLP} \leq \alpha\}$, ou seja, a máxima demanda D que satisfaz a restrição em probabilidade LOLP $\leq \alpha$.

Para uma distribuição discreta de suporte finito, i.e., uma variável aleatória que assume um número finito de estados representados pelos cenários $s = 1,..., S$, D_α pode ser calculado através de um problema de programação linear inteira. Suponha que cada cenário *s* possui uma probabilidade q_s associada. Escolhemos os índices *s* tal que $g_1 \leq \ldots \leq g_S$. Então, D_α é o quantil

$$D_\alpha = \sup_D\{D{:}LOLP \leq \alpha\} = \quad \text{Max } D \tag{3.1}$$

sujeito a

$$g_s + x_s M \geq D,\ s = 1,\ldots, S \tag{3.2}$$

$$\sum_s q_s x_s \leq \alpha \tag{3.3}$$

$$x_s \geq x_{s+1},\ s = 1,\ldots, S \tag{3.4}$$

$$x_s \in \{0,1\},\ s = 1,\ldots, S \tag{3.5}$$

Onde:

S é o número de cenários indexados por *s;*

g_s = geração em cada cenários *s*;

M = é um número grande suficiente, de modo que para todo cenário *s*, $M \geq g_s - D$.

Note que o problema (3.1) a (3.5) nada mais é que o cálculo de um quantil de uma distribuição, portanto não precisaríamos formular um problema de otimização para tal cálculo. Porém o ganho de formular dessa maneira é percebermos que há a necessidade de se introduzir variáveis inteiras no problema de otimização, quando o critério de confiabilidade é a LOLP. Por exemplo, em problemas onde o corte de carga depende de alguma variável de decisão (investimento em geração).

Outra medida de confiabilidade é o valor esperado da potência não suprida definida abaixo:

Definição: EPNS (Valor Esperado da Potência Não Suprida) – [MW]

EPNS = E[r]

O corte de carga em potência multiplicado pela duração do patamar de carga nos fornece a energia não suprida no patamar, o que sugere a seguinte definição:

Definição: EENS (Valor Esperado da Energia Não Suprida) – [MWh]

EENS = ϕ E[r]

Onde ϕ é a duração do patamar de carga.

Na seção seguinte vamos explicitar uma importante relação entre essas medidas de confiabilidade. Ao longo deste trabalho estamos considerando apenas um patamar de carga, portanto as medidas EPNS e EENS são as mesmas exceto por uma multiplicação de uma constante ϕ.

Para calcular a máxima demanda atendida por um sistema utilizando como critério de confiabilidade (EENS $\leq \delta$D), onde $\delta \in (0,1)$ é um nível do percentual de demanda estabelecido pelo regulador, podemos proceder da seguinte maneira:

Max D

Sujeito a

$$E[D-g]^{+} \leq \delta D$$

Ou,

Max D

Sujeito a

$$\sum_{s} q_s r_s - \delta D \leq 0$$

$$r_s \geq D - g_s \qquad , s = 1,\ldots, S$$

$$r_s \geq 0$$

Ou seja, utilizando-se o valor esperado da Energia não suprida como critério de confiabilidade torna o problema de encontrar a capacidade máxima de suprimento de um sistema em um problema de programação linear.

3.2
Medidas de Risco

Nesta seção, exploraremos medidas de risco usadas em finanças: por instituições financeiras, reguladores e na teoria de portfólio. Bem como as relações existentes entre estas medidas e as de confiabilidade usadas no setor elétrico.

Uma medida usada amplamente no controle e regulação de risco por instituições financeiras é o α-VaR (Value at Risk) definido abaixo:

Definição: α-VaR (Value at Risk)

O valor de risco de uma variável aleatória *r* qualquer a um nível de confiabilidade α é definido por: $VaR_{\alpha}(r) = \inf\{t : P(r > t) \leq \alpha\}$.

Se *r* representa perdas, t é a máxima perda a um nível de confiança de α x 100%.

VaR_{α} (r) = t^{α} é o quantil mínimo associado a $P(r > t^{\alpha}) = \alpha$, i.e., a probabilidade da variável aleatória *r* exceder o VaR_{α} (r) é menor ou igual a α .

Quando a variável aleatória *r* depende de alguma variável de decisão *x*, o α-VaR pode ser visto em programação estocástica como uma restrição em probabilidade (Chance Constraints [37]), dados o quantil t^{*} e o nível de confiabilidade α a restrição $P(r_x > t^{\alpha}) \leq \alpha$ limita o conjunto de decisão. No nosso contexto, a variável aleatória corte de carga depende da demanda, i.e., $r_D = |D - g|^{+}$. O Conjunto $\{D \geq 0 : P(r_D > t^{\alpha}) \leq \alpha\}$ representa os valores de demanda tais que a probabilidade que o corte de carga exceda t^{α} é menor ou igual a α.

Observe que, se *r* representa o corte de carga e t^{α} = 0. Então, a restrição $P(r > t^{\alpha}) \leq \alpha$ é equivalente a $LOLP \leq \alpha$ **(Relação entre o VaR e a LOLP).**

Analogamente ao cálculo da máxima demanda atendida quando consideramos a restrição $LOLP \leq \alpha$, o α-VaR pode ser calculado para uma distribuição discreta de suporte finito como um problema de otimização linear inteira.

Suponha que cada cenário *s* possui uma probabilidade q_s associada e que os índices *s* são escolhidos de tal forma que $r_1 \leq \ldots \leq r_S$, onde *r* é uma variável aleatória discreta qualquer com suporte finito.

O Cálculo de t^{α} pode ser formulado pelo seguinte problema de otimização:

$$VAR_{\alpha}(r) = t^{\alpha} = \quad \text{Min } t \quad (3.6)$$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
& r_s - x_s M \le t && , s = 1,\ldots, S \\
& \sum_s q_s x_s \le \alpha && \\
& x_s \le x_{s+1} && , s = 1,\ldots, S \\
& x_s \in \{0,1\} &&
\end{aligned}
$$

Onde:

S é o número de cenários de capacidades;

r_s = o valor da variável aleatória no cenário *s*;

M = é um número grande suficiente de modo que para todo cenário *s*, M ≥ r_s – t;

A resolução de problemas de Otimização de Portfólio com restrições usando o VaR são usualmente difíceis de resolver por causa da não convexidade e da introdução de variáveis inteiras ao problema.

Na literatura encontram-se outras medidas de risco como desvio padrão, semi-variância, medidas de quantis e valores esperados condicionais. Mais adiante será abordada a medida de risco conhecida por Conditional Value at Risk[1] (CVaR) terminologia adotada por R.T. Rockafellar e S.P. Uryasev (2000) em [30]. Será mostrado que o valor esperado da energia não suprida (EENS) é um caso particular do CVaR. Observe que o controle de confiabilidade pode ser comparado ao controle de risco na teoria de Portfólio. As medidas de confiabilidade usadas no setor elétrico são casos particulares de medidas mais gerais usadas em finanças.

3.2.1
Conditional Value at Risk

Definição: CVaR é o valor esperado condicional definido por:

$$CVaR_\alpha(r) = E[r \mid r \ge VaR_\alpha(r)] \qquad (3.7)$$

[1] Alguns autores referenciam tal medida como *Expected Shortfall*, *Mean Excess Loss* ou *Tail VaR*.

Note que na definição acima, para calcularmos o CVaR de uma variável aleatória devemos primeiro calcular o VaR da variável aleatória. Portanto, aparentemente o CVaR como medida de confiabilidade de um sistema ou portfólio em um problema de otimização estaria dificultando a busca pela solução ótima. Uma propriedade desenvolvida por Rockafellar e Uryasev (2000) [30], mostra que o cálculo do CVaR se resume a solução de um problema de otimização linear irrestrito com apenas uma variável de decisão *t*. E ainda, o mínimo do PL é atingido quando a variável de decisão *t* é igual ao $VaR_\alpha(r)$.

Por definição, o CVaR é a média condicional das piores (1-α) x 100% perdas, logo

$CVaR_\alpha(r) \geq VaR_\alpha(r)$, o que demonstra que é uma medida de risco mais conservadora, pois restringe mais o espaço de decisões.

Em [30] é demonstrado que o $CVaR_\alpha(r)$ pode ser calculado resolvendo o seguinte PL:

$$\inf_{t \in \Re} \{t + \frac{1}{\alpha} E[r-t]^+\} \qquad (3.8)$$

Alguns autores: Shapiro (2007) [37] definem o CVaR como o PL acima.

A partir da definição (2.11) é imediato que para todo a $\in \Re$

$$CVaR_\alpha(r+a) = CVaR_\alpha(r) + a \qquad (3.9)$$

Isto significa que é uma medida linear nas translações. Outras medidas também possuem essa propriedade, por exemplo, o VaR.

Observe que a função $[x]^+$ é convexa em x.

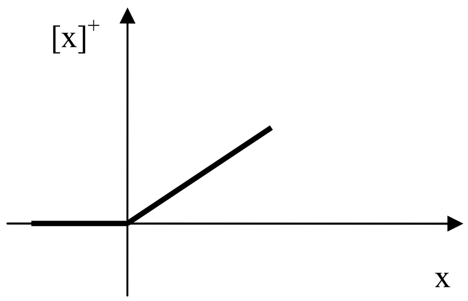

Figura 3.1 - Ilustração da Convexidade do operador $[.]^+$

Portanto, pela definição (3.13) temos que para todo $\beta \in [0,1]$ e Z1 e Z2 variáveis aleatórias quaisquer, segue que:

$$CVaR_{\alpha}(\beta Z_1 + (1-\beta)Z_2) \leq \beta CVaR_{\alpha}(Z_1) + (1-\beta)CVaR_{\alpha}(Z_2) \quad (3.10)$$

Note que,

$$CVaR_{\alpha}(\lambda Z_1) = \lambda CVaR_{\alpha}(Z_1), \text{ para todo } \lambda \geq 0 \qquad (3.11)$$

De (3.15) e (3.16) obtemos uma propriedade que resultou em diversos artigos e discussões a respeito da coerência de medidas de risco [33][34][35][36].

Propriedade da Subaditividade:

$$CVaR_{\alpha}(Z_1 + Z_2) \leq CVaR_{\alpha}(Z_1) + CVaR_{\alpha}(Z_2) \qquad (3.12)$$

O CVaR é uma medida subaditiva, ou seja, em termos financeiros incentiva a diversificação. Na seção 2.5 vamos mostrar que o VaR não é uma medida subaditiva, e portanto não leva em consideração o efeito “portfólio”, penalizando a diversificação.

A seguir, vamos mostrar a equivalência das definições (3.12) e (3.13) para um contexto de monte Carlo, onde os cenários de capacidades são sorteados de maneira igual. O CVaR é definido por:

$$\text{CVAR}_{\alpha}(\text{D-g}) = \text{E}\,[\text{D} - \text{g} \mid \text{D - g} \geq x_{\alpha}] = \frac{\sum_{\{s/D-g_s \geq x_{\alpha}]} (D - g_s)}{(1-\alpha)S}$$

Onde x_{α} é o α-VaR do corte de carga.

Usando a definição (3.13) podemos calcular a máxima demanda atendida por um conjunto de geradores utilizando o CVaR como critério de confiabilidade através de um problema de otimização linear, explicitado abaixo:

$$\text{Max D} \qquad (3.13)$$

Sujeito a

$$\text{CVAR}_{\alpha}(\text{D} - \text{g}) \leq \delta \text{D}$$

Onde $\delta \in (0,1)$ é um nível estabelecido pelo regulador do percentual de demanda.

Utilizando (3.13) o problema (3.18) pode ser representado de forma equivalente a:

Max D (3.14)

Sujeito a

$$t + \frac{1}{\alpha} E[D - g - t]^{+} \leq \delta D$$

E finalmente por:

Max D (3.15)

Sujeito a

$$t + \frac{1}{\alpha} \sum_{s} q_s y_s - \delta D \leq 0$$
$$y_s \geq D - g_s - t \qquad , s = 1,\ldots, S$$
$$y_s \geq 0$$

Note que, o problema acima é de otimização linear. Uma vantagem da métrica CVaR em relação ao VaR na solução de problemas de otimização é o esforço computacional. A otimização com o CVaR é apenas um PL enquanto a solução com o VaR é um problema linear inteiro.

O CVaR tem sido amplamente utilizado em problemas de portfólio. Uma das motivações iniciais para o uso do valor esperado condicional como medida de risco é a sua capacidade de capturar a presença de eventos pouco prováveis mais de alta profundidade (catastróficos). O VaR não distingue tais eventos. Em linhas gerais, o VaR só captura a área da cauda da distribuição não importando como a cauda se distribui ao longo dos eventos enquanto o CVaR é uma média na cauda. Indivíduos avessos ao risco, quando confrontados com loterias onde há a probabilidade de ocorrer eventos catastróficos mesmo que a probabilidade seja extremamente pequena tendem a dar mais peso para esses eventos, tais situações são explicitadas em Mas-Collel (1995) [29]. Portanto, indivíduos avessos ao risco sentem-se mais confortáveis quando suas atitudes levam em consideração a magnitude dos eventos. A figura a seguir ilustra o conceito da captura de eventos catastróficos pelo CVaR e a não distinção da presença de tais eventos com a medida de risco VaR.

3.3 Medida de Risco Coerente

A seguir vamos apresentar axiomaticamente, a definição de uma medida de risco coerente. Seja χ um espaço linear de funções mensuráveis que definem as variáveis aleatórias do espaço de probabilidade definido por (Ω, Ψ, P).

Definição: $\rho:\chi \rightarrow \Re$ é uma medida de risco coerente, se satisfaz as propriedades (1)-(4) a seguir:

1. Sub-aditividade: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y), \ \forall \ X, Y \in \chi$
2. Monotonicidade: $X \leq Y$, então, $\rho(\mathrm{X}) \leq \rho(\mathrm{Y}), \forall \ X, Y \in \chi$
3. Homogênea Positiva: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(Y), \ \forall \ X \in \chi$ e $\lambda > 0$
4. Invariância por Translação: $\rho(X + \mathrm{a}) = \rho(X) + \mathrm{a}, \ \forall \ X \in \chi$ e $\mathrm{a} \in \Re$

Note que (1) e (3) implicam em:

5. Convexidade: $\rho(\mathrm{t}X + (1\text{-}t)\, Y) \leq \mathrm{t}\rho(X) + (1\text{-t})\rho(Y), \ \forall \ X, Y \in \chi \ e \ \forall \mathrm{t} \in [0,1]$

Propriedade desejada em problemas de otimização.

Alguns autores como Arcebi e Tasche[1] (2001) [36] consideram o adjetivo coerente como redundante e definem como medida de risco: como qualquer medida ρ que satisfaça as quatro primeiras propriedades. A seguir discutimos a importância das propriedades que definem uma medida de risco coerente.

- A propriedade (1) de Sub-aditividade implica que a medida leva em consideração o efeito “portfólio”, ou seja, incentiva a diversificação. A medida de risco de dois portfólios em conjunto é menor que a soma das medidas de risco dos portfólios em separados.

[1] Em [36], os autores comparam a mensuração do risco utilizando VaR como medir a temperatura usando um barômetro.

- A propriedade (2) de Monotonicidade implica que dados dois sistemas A e B, i.e, dois conjuntos de geradores, se o corte de carga de A é menor ou igual ao corte de carga de B para todo cenário então o risco do sistema A é menor ou igual ao risco do sistema B. E ainda sistemas com mais geradores possuem uma medida de risco menor.
- Propriedade (3) – Homogênea Positiva implica que o aumento na variável aleatória aumenta linearmente o seu risco. Em finanças quanto maior for uma posição, maior é o seu risco de liquidez. Em algumas situações o aumento do risco de liquidez é mais que linear, então a hipótese de homogeneidade positiva não é mais razoável. Dando origem a medidas de risco convexas, explorada pelos autores Föllmer e Schied (2002) em [27]. Uma medida de risco é dita convexa se satisfaz as propriedades (5), (2) e (4).
- Propriedade (4) – Eqüivariância por Translação implica que adicionando ou subtraindo uma quantidade certa |a| da variável aleatória X a medida de risco aumenta ou diminui de |a|. Ex: Caso se adicione uma quantidade certa de 100 MW ao corte de carga, a medida de risco é transladada em 100 unidades. Em finanças isto pode ser visto como a adição de uma renda certa, ou seja, livre de risco, por exemplo, títulos do tesouro americano. A medida de risco do portfólio é transladada exatamente do valor da renda certa em unidades da medida de risco. Isto quer dizer que o risco do portfólio não se altera.

Na seção 3.2.1 mostrou-se que o CVaR satisfaz as propriedades que definem uma medida coerente de risco. Pode-se verificar facilmente que o valor esperado da energia não suprida (EENS) é uma medida coerente. O VaR não é uma medida coerente, pois não satisfaz a propriedade de subaditividade, conforme o Exemplo no final desta seção, “a incoerência da LOLP”. É importante ressaltar que, para a nossa surpresa praticamente todos os bancos e reguladores utilizam o VaR como medida de Risco. Diversos exemplos da incoerência do VaR podem ser encontrados em [33][34][35].

Vamos mostrar a incoerência da LOLP no nosso contexto. Considere um sistema composto por duas usinas térmicas, com as seguintes características:

Tabela 3.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Falha (%)
1	200	4
2	150	5

Dado que estamos considerando duas usinas térmicas, cada uma com dois possíveis cenários de capacidade, então o número total de cenários de capacidade térmica é $2^2 = 4$. As capacidades e as probabilidades associadas a estes cenários estão apresentadas na seguinte tabela:

Tabela 3.2. Exemplo - Cenários de capacidade

Cenário s	$\bar{g}_{1s}$	$\bar{g}_{2s}$	Probabilidade p_S	Acumulada
1	0	0	4% × 5% = 0.2%	0.2%
2	0	150	4% × 95% = 3.8%	4%
3	200	0	96% × 5% = 4.8%	**9%**
4	200	150	96% × 95% = 91,2%	100%

Supondo um nível de confiança de 5%, temos que as usinas operando individualmente atendem uma demanda de 150 e 200 MW, com um total de 350MW. Caso as usinas cooperem entre si, pela tabela acima, a máxima demanda atendida pelo sistema é de 150 MW, resultando assim em um valor menor quando operadas separadamente.

Portanto, podem ocorrer situações como mostrado acima que a LOLP penaliza a diversificação.