

Alocação de Aumann-Shapley

A primeira dificuldade para a aplicação do Valor de Shapley a sistemas realistas é de cunho computacional, pois o número de permutações cresce muito rapidamente à medida que cresce o número de agentes. Um desenvolvimento posterior, chamado de alocação Aumann-Shapley [26], permitiu que se resolvessem estes problemas. O método surgiu da idéia de “dividir” os recursos de cada agente em vários segmentos, e aplicar o esquema de Shapley como se cada segmento fosse um agente individual.

À primeira vista, as dificuldades computacionais seriam ainda maiores, pois o número de agentes e, portanto, de permutações aumentaria consideravelmente. Entretanto, no limite, quando o tamanho dos subagentes tende para zero, pode-se mostrar (ver [20]) que o procedimento acima tende para uma expressão analítica fechada para a alocação de AS.

9.1

Divisão dos Agentes

Note que, neste caso como dividiríamos os agentes, já que os agentes (geradores) são variáveis aleatórias que em um estado não geram (equipamento falha) e em outro estado geram até a sua capacidade máxima. Uma maneira natural de dividir os geradores seria, por exemplo: dividir um gerador em duas partes e cada parte possuiria a mesma distribuição de probabilidade do gerador original tal que a soma das capacidades máximas de cada gerador de a capacidade máxima do gerador original. Note que, como os subagentes são variáveis aleatórias, a soma dos subagentes resulta em uma variável aleatória por convolução diferente da variável aleatória, gerador original. Como fazer então a repartição dos agentes em subagentes?

A solução para isso é considerarmos os agentes não como geradores, mas sim como as capacidades em cada cenário. Isto pode parecer simples, mas tem uma diferença conceitual enorme, já que os agentes não são mais variáveis aleatórias.

O método de alocação de Aumann-Shapley pode ser visto como um processo limite de partição dos agentes em subagentes e da permutação da ordem de entrada quando o tamanho de cada sub-agente tende a zero. Por simplicidade, vamos considerar duas usinas A e B, a generalização para o caso com N usinas é imediata.

9.2

O processo limite

Seja P_A , P_B a capacidade total em MW do agente A e B respectivamente, podemos dividir as usinas A e B em pequenas usinas de capacidade Δ . Assim, a usina A é composta de N_1 unidades geradoras de capacidade Δ e a usina B é composta de N_2 unidades de potência Δ , conforme ilustrado na figura a seguir:

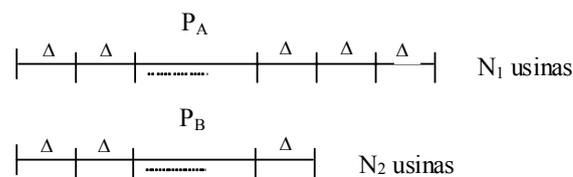


Figura 9.1 – Partição das usinas

Seja $N = N_1 + N_2$ o número total de unidades geradoras, então o número de combinações das usinas é dado por $\binom{N}{N_1}$. Por exemplo, suponha que $N_1 = 2$, $N_2 = 1$.

Neste caso temos as seguintes alternativas:

AAB; ABA; BAA

onde A representa a partição correspondente ao agente A, e B representa a partição correspondente ao agente B. Podemos fazer uma analogia das ordens de entrada das usinas com caminhos no espaço bidimensional.

Seja T a capacidade firme de cada subcoalizão. Na figura 9.2 é ilustrado o caso para $N_1 = 2$, $N_2 = 1$. Ao longo de cada caminho α a média dos benefícios marginais de

cada agente é computada por $\tilde{\pi}_A^\alpha, \tilde{\pi}_B^\alpha$. Por exemplo, a média do benefício marginal para o caminho mostrado na figura 9.2 é:

$$\tilde{\pi}_A^\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(\Delta, 0)\Delta + \frac{\partial T}{\partial x}(2\Delta, \Delta)\Delta \right) / P_A \quad (9.1)$$

$$\tilde{\pi}_B^\alpha = \left(\frac{\partial T}{\partial y}(\Delta, \Delta)\Delta \right) / P_B \quad (9.2)$$

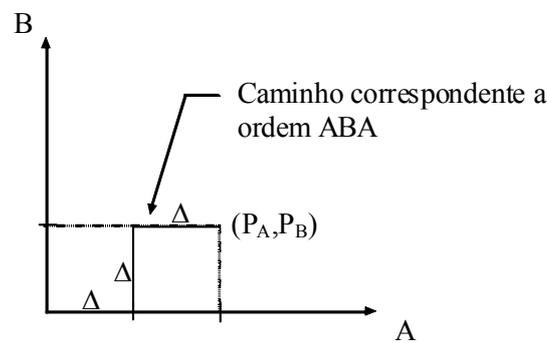


Figura 9.2 – Caminho correspondente a ordem ABA

A média do benefício marginal ao longo do caminho é dada por:

$$\tilde{\pi}_A = \left(\sum_{\alpha} \tilde{\pi}_A^\alpha \right) / N_{\alpha} \quad (9.3)$$

$$\tilde{\pi}_B = \left(\sum_{\alpha} \tilde{\pi}_B^\alpha \right) / N_{\alpha} \quad (9.4)$$

onde N_{α} é o número de caminhos ($N_{\alpha} = \binom{N}{N_1}$).

A alocação de Aumann-Shapley é obtida fazendo o limite $\Delta \rightarrow 0$. Observe que (9.3) e (9.4) podem ser interpretados como valores esperados de funções de variáveis aleatórias discretas e quando $\Delta \rightarrow 0$, $N, N_1, N_2 \rightarrow \infty$. Fazendo os limites, vamos calcular $\tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B$. Primeiramente selecione um ponto no espaço bidimensional (τ_A, τ_B) , $0 \leq \tau_A \leq P_A$, $0 \leq \tau_B \leq P_B$, seja $k_1 = \tau_A / \Delta$, $k_2 = \tau_B / \Delta$. Considere todos os caminhos possíveis que passem por $(k_1\Delta, k_2\Delta)$ e $((k_1+1)\Delta, k_2\Delta)$. O número de tais caminhos é dado por:

$$\binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{N - (k_1 + k_2) - 1}{N_1 - k_1 - 1} = N(k_1, k_2) \frac{N_1 - k_1}{N - (k_1 + k_2)} \quad (9.5)$$

onde,

$$N(k_1, k_2) = \binom{k_1 + k_2}{k_1} \binom{N - (k_1 + k_2)}{N_1 - k_1} \quad (9.6)$$

$\tilde{\pi}_A$ pode ser escrito como:

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \sum_{(k_1, k_2)} \frac{N_1 - k_1}{N - (k_1 + k_2)} \frac{N(k_1, k_2)}{N_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, k_2 \Delta) \Delta \quad (9.7)$$

Fazendo $k = k_1 + k_2$ temos:

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{k_1=1}^k \frac{N_1 - k_1}{N - k} \frac{N(k_1, k - k_1)}{N_\alpha} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k - k_1) \Delta) \Delta \right) \quad (9.8)$$

Note que,

$$\frac{N(k_1, k - k_1)}{N_\alpha} = \frac{\binom{k}{k_1} \binom{N - k}{N_1 - k_1}}{\binom{N}{N_1}} = \frac{\binom{N_1}{k_1} \binom{N - N_1}{k - k_1}}{\binom{N}{k}} \quad (9.9)$$

é uma distribuição hipergeométrica.

Seja $p = N_1 / N = P_A / (P_A + P_B)$ como $N_1 = P_A / \Delta$, $N_2 = P_B / \Delta$ e $N = N_1 + N_2$.

Da teoria da probabilidade sabe-se que como $N \rightarrow \infty$, $N_1 \rightarrow \infty$, mantendo p constante, a distribuição hipergeométrica tende para uma distribuição binomial de parâmetro (k, p) . Com esse resultado e utilizando o fato que

$$\frac{N_1 - k_1}{N - k} \rightarrow \frac{N_1}{N}, \text{ as } N_1, N \rightarrow \infty$$

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \frac{N_1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} \right) p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k-k_1) \Delta) \quad (9.10)$$

Da definição de k , k_1 , k_2 , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}(k_1 \Delta, (k-k_1) \Delta) &= \\ &= \sum_{k_1=1}^k \binom{k}{k_1} p^{k_1} (1-p)^{k-k_1} \frac{\partial T}{\partial x}\left(k_1 \frac{\tau}{k}, (k-k_1) \frac{\tau}{k}\right) \\ &= E_{S_k} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{S_k}{k} \tau, \left(1 - \frac{S_k}{k}\right) \tau \right) \right] \end{aligned}$$

Onde,

$$\tau = \tau_A + \tau_B;$$

S_k = é a soma de k variáveis aleatórias com probabilidade p de sucesso e distribuição de bernoulli.

$E_{S_k} [\cdot]$ = é o valor esperado com respeito a variável aleatória S_k

Pela lei dos Grandes números [11],

$$P\left(\frac{S_k}{k} \rightarrow p\right) = 1$$

Vamos supor que $\frac{\partial T}{\partial x}$, fazendo $k \rightarrow \infty$ temos:

$$E_{S_k} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \left(\frac{S_k}{k} \tau, \left(1 - \frac{S_k}{k}\right) \tau \right) \right] \rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(p\tau, (1-p)\tau) = \frac{\partial T}{\partial x}(kp\Delta, (1-p)k\Delta) \quad (9.11)$$

Assim,

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{P_A} \frac{N_1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial T}{\partial x} (kp\Delta, k(1-p)\Delta) \Delta \quad (9.11)$$

$$\text{como } \Delta = \frac{P_A}{N_1},$$

$$\tilde{\pi}_A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{\partial T}{\partial x} \left(k \frac{P_A}{N}, k \frac{P_B}{N} \right) \quad (9.12)$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$, a alocação de Aumann-Shapley é dada por:

$$\tilde{\pi}_A = \int_{\lambda=0}^1 \frac{\partial T}{\partial x} (\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda \quad (9.13)$$

Onde λ é um parâmetro de integração

Analogamente,

$$\tilde{\pi}_B = \int_{\lambda=0}^1 \frac{\partial T}{\partial y} (\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda \quad (9.14)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} P_A \tilde{\pi}_A + P_B \tilde{\pi}_B &= \int_{\lambda=0}^1 \left(P_A \frac{\partial T}{\partial x} (\lambda P_A, \lambda P_B) + P_B \frac{\partial T}{\partial y} (\lambda P_A, \lambda P_B) \right) d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^1 \frac{d}{d\lambda} T(\lambda P_A, \lambda P_B) d\lambda = T(P_A, P_B) \end{aligned} \quad (9.15)$$

O que mostra que as alocações de Aumann-Shapley são eficientes.

9.3

Extensões do método de Aumann-Shapley

Na demonstração para o contexto da tese, assumiu-se que a função característica tenha derivada contínua. Em muitos casos este fato não é verificado,

como por exemplo: em [13], no desenho de tarifas para companhias aéreas. Na tese de J. Raanan é realizado uma extensão do método de Aumann-Shapley para funções características que possuem derivadas contínuas em quase todo ponto na diagonal $\lambda(P_A, P_B)$, onde $\lambda \in [0, 1]$, conforme mencionado em [2].

9.4

Aumann-Shapley para Cálculos de Certificados de Capacidade Firme

9.4.1

Formulação geral

O problema original para o Cálculo da Capacidade de Suprimento da Demanda por um Sistema composto por n geradores, com capacidades $\{c_1, \dots, c_n\}$ é dado pela função $v(c_1, \dots, c_N)$ definida abaixo:

$$\begin{array}{ll}
 v(c_1, \dots, c_N) = & \text{Max } D \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D \\
 & r_s \geq D - g_s \\
 & r_s \geq 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{Multiplicadores} \\
 \text{simplex} \\
 \pi_D(1) \\
 \pi_s(1)
 \end{array}
 \quad
 (9.16)$$

Lembrando que $g_s = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,s} c_i$.

Estamos considerando como critério de confiabilidade o valor esperado da energia não suprida.

Para calcular o certificado de capacidade firme de cada usina, vamos dividir os agentes (usinas) em sub-usinas. Para cada usina temos uma probabilidade de falha associada. Na divisão das usinas em sub-agentes temos que cada sub-agente possui a mesma probabilidade de falha associada a usina com um todo. E que existe um comando central do gerador tal que, quando um sub-agente falha o gerador como um todo falha.

Então, para um sistema, a discretização das capacidades das usinas, i.e., para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ temos que a máxima demanda atendida é dada por:

$$\begin{aligned}
 v(\lambda c_1, \dots, \lambda c_N) &= \text{Max } D && \text{Multiplicadores} \\
 &\text{sujeito a} && \text{simplex} \\
 &\sum_{s=1}^S q_s r_s \leq \delta D && \pi_D(\lambda) \quad (9.17) \\
 &r_s \geq D - \lambda g_s && \pi_s(\lambda) \quad (9.17a) \\
 &r_s \geq 0
 \end{aligned}$$

A alocação AS resultante da solução analítica do problema (9.16) é obtida a partir do cálculo da seguinte integral para cada agente:

$$\varphi_i = c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} d\lambda \quad (9.18)$$

Para mostrar que a alocação AS recupera a capacidade de suprimento total, seja a função de uma variável:

$$H(\lambda) = v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (9.19)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$H(1) = H(0) + \int_0^1 \frac{dH(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (9.20)$$

Agora,

$$H(0) = 0, \quad (9.21)$$

$$H(1) = v(c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (9.22)$$

$$\frac{dH(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^n c_i \times \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} \quad (9.23)$$

Substituindo em (9.20),

$$v(c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i \times \int_0^1 \frac{\partial v(\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n)}{\partial c_i} d\lambda = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (9.24)$$

Portanto, a alocação obtida pelo método de Aumann-Shapley é eficiente, ou seja, não existe desperdício.

9.4.2

Formulação para determinação da Capacidade Firme

Nesta seção será detalhada a aplicação da alocação de AS ao problema de determinação de certificados de capacidade firme.

A primeira etapa é detalhar as derivadas parciais da formula AS.

Do problema de otimização (9.17),

$$\frac{\partial v(\{\lambda c_1, \dots, \lambda c_n\})}{\partial c_i} = \pi_{c_i}(\lambda) = \sum_{s \in \Omega_i^!} \pi_s(\lambda) \quad (9.25)$$

Onde:

$\pi_s(\lambda)$ Variável dual associada à restrição (3.17a) do problema de otimização (3.17) quando resolvido para valores de carga

$\{\lambda D_{t,m,ipat}^*, t = 1, \dots, T, m = 1, \dots, M, ipat = 1, \dots, Npat\}, t = 1, \dots, T, s = 1, \dots,$

$S, m = 1, \dots, M, ipat = 1, \dots, Npat$

$\Omega_i^!$ É o conjunto de cenários de capacidade onde a usina i está operando.

Note que, de acordo com a identidade de AS,

$$\varphi_i = c_i \times \int_0^1 \pi_{c_i}(\lambda) d\lambda \quad (9.26)$$

É o certificado de capacidade firme alocado a usina i .

Na implementação computacional a integral (9.26) será discretizada e aproximada por uma soma.