3
Análise Envoltória de Dados

3.1
Introdução

O processo de avaliar a eficiência relativa de diversas organizações denominadas DMU´s (do inglês *Decision Making Units*) foi originalmente proposto por Farrell [31]. Charnes et al. [19] implementaram e popularizaram esta técnica denominando-a *Data Envelopment Analysis* (DEA) que é uma generalização do modelo proposto por Farrell baseado em programação fracionária [68].

DEA foi utilizada pela primeira vez para avaliação das escolas públicas norte-americanas e hoje é largamente aplicada tanto em problemas diversos de cunho empresarial quanto em áreas que até então apresentavam algumas dificuldades para serem avaliadas. Como exemplo pode-se citar saúde (hospitais, doutores), educação (escolas, universidades), bancos, fábricas, eficiência energética, *fast food*, restaurantes, lojas de varejo, etc. A justificativa para o crescente uso da metodologia DEA é o conjunto de possibilidades de análise dos dados que a ferramenta disponibiliza. Charnes et al [18] discorrem algumas razões que motivaram o intenso uso da aplicação. Como exemplo, tem-se:

- poucas técnicas disponíveis para avaliar a eficiência das organizações;
- confiança por parte dos pesquisadores nos resultados obtidos de sua utilização;
- possibilidade de usar simultaneamente múltiplos *outputs* e múltiplos *inputs* mesmo sendo eles dimensionados em unidades diferentes;
- capacidade de ajustar para variáveis exógenas e incorporar variáveis dicotômicas (*dummy*);
- facilidade de utilização, a existência de *softwares* que reduzem o esforço computacional;

- habilidade em identificar possíveis DMU´s ineficientes em virtude de excessos de *inputs* como carência de *outputs* para cada entidade;
- capacidade de identificar *benchmarks*, etc.

De acordo com Sueyoshi [85], esta técnica bastante robusta pode ser considerada não-paramétrica pois permite eliminar a necessidade de especificar explicitamente uma relação funcional básica entre *inputs* e *outputs*, a qual é esperada para descrever analiticamente em estudos paramétricos convencionais.

Neste contexto, DEA representa um princípio alternativo de extrair informações sobre um conjunto de observações tal como na Figura 3.1:

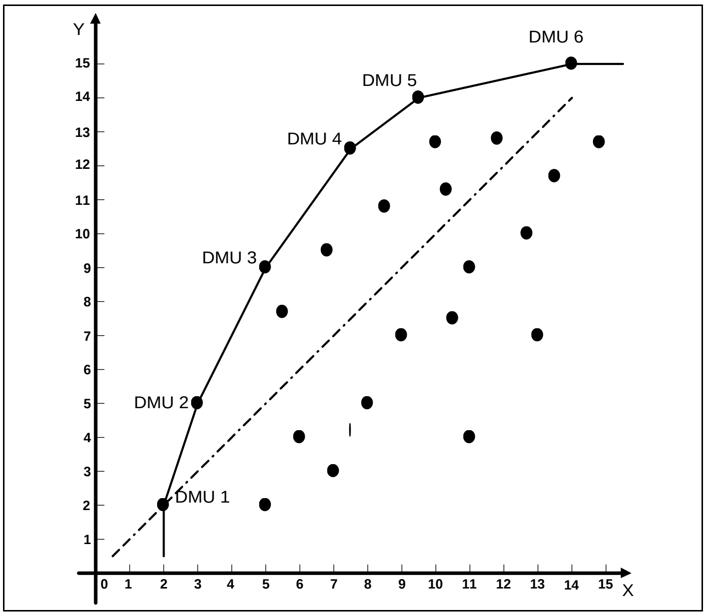

Figura 3.1: Comparação de DEA e regressão [18].

Na Figura 3.1, acima, tem-se a ilustração de uma situação simples em que há somente um *input* e um *output*. Pode-se observar que a linha pontilhada corresponde à linha de regressão passando através da origem e calibrada pelo método dos mínimos-quadrados ordinários. Já a linha superior, dita de fronteira de produção ou função de produção, determina o lugar geométrico das DMU´s ditas eficientes (*best-practice*).

Ao contrário das técnicas paramétricas, cujo objetivo é otimizar um simples plano de regressão através dos dados, DEA otimiza sobre cada observação com o propósito de calcular uma fronteira de produção determinada pelas DMU´s eficientes. Ambas as técnicas, paramétrica e não-paramétrica, usam as informações contidas nos dados. Em uma análise paramétrica, a simples equação de regressão é aplicada em cada DMU. O procedimento DEA otimiza o desempenho medido de cada DMU em relação a todas as outras DMU´s em um sistema de produção o qual transforma múltiplos insumos (*inputs*) em múltiplos produtos (*outputs*), através do uso de Programação Linear (PL) onde é resolvido um conjunto de Problemas de Programação Linear (PPL´s) inter-relacionados, tantas quantas forem as DMU´s, objetivando, assim, determinar a eficiência relativa de cada uma delas. Desta forma, a entrada ou retirada de uma ou mais unidades no conjunto de observações pode implicar em mudança no valor da eficiência relativa.

3.2
Conjunto de Possibilidades de Produção

Conforme foi mencionado, DEA é uma ferramenta utilizada para avaliar DMU´s que realizam tarefas similares e para as quais dispomos de medidas de *inputs* (insumos) e *outputs* (produtos).

Um Conjunto de Possibilidades de Produção, **T**, é um conjunto de combinações viáveis dos vetores de *inputs* $\boldsymbol{x}_j$ e de *outputs* $\boldsymbol{y}_j$.

Considere, então, que cada uma das *n* DMU´s tem transformado seus *m* *inputs* em *s* *outputs*.

Matematicamente, tem-se:

- $\boldsymbol{x}_j = \lfloor x_{j1} \quad \ldots \quad x_{jm} \rfloor \in \ \mathbf{R}_+^m$ - conjunto de *inputs* observados consumidos pela *j*-ésima DMU, $j = 1,...,n$;
- $\boldsymbol{y}_j = \lfloor y_{j1} \quad \ldots \quad y_{js} \rfloor \in \ \mathbf{R}_+^s$ - conjunto de *outputs* observados produzidos pela *j*-ésima DMU, $j = 1,...,n$.

Sejam também:

- $\mathbf{T} = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^{m+s} | x \text{ pode produzir } y\}$, Conjunto de Possibilidades de Produção;

- $\mathbf{P}(x) = \{y|(x,y) \in \mathbf{T}\}$ é o conjunto de todos *outputs* observados y que podem ser produzidos usando o *input* x;
- $\mathbf{L}(y) = \{x|(x,y) \in \mathbf{T}\}$ é o conjunto de todos *inputs* observados x que podem produzir um dado *output* y.

Em muitas aplicações, **T** é desconhecido e necessita ser estimado. Com este propósito, a técnica DEA estima **T** a partir dos dados observados.

Neste ponto, é importante listar algumas propriedades para este conjunto **T**. Também é assumido que todo $x', x'' \in \mathbf{R}_+^m$ e $y', y'' \in \mathbf{R}_+^s$.

- **P(1) – Disponibilidade.**

  $x' \in \mathbf{L}(y')$ **e** $x'' \geq x' \Rightarrow x'' \in \mathbf{L}(y')$,

  $y' \in \mathbf{P}(x')$ **e** $y'' \leq y' \Rightarrow y'' \in \mathbf{P}(x')$.

- **P(2) – Raio Ilimitado.**

  $(x', y') \in \mathbf{T}$, então $(\mathrm{k}\, x', \mathrm{k}\, y') \in \mathbf{T}$ $\forall \mathrm{k} > 0$.

- **P(3) – Convexidade.**

  Se $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in$ **T**, $j = 1,\ldots,n$; e $\lambda \geq 0$ é um vetor coluna de dimensão

  (n x 1) tal que $e\lambda = 1$ então $(\boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}\lambda, \boldsymbol{Y}^{\mathbf{T}}\lambda) \in \mathbf{T}$. É importante registrar que $\boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}$ é uma matriz de *inputs* de dimensão (m x n), $\boldsymbol{Y}^{\mathbf{T}}$ é uma matriz de *outputs* de dimensão (s x n) e $\underline{e}$ é um vetor linha de "1" com dimensão (1 x n).

- **P(4) – Extrapolação Mínima.**

  T é o conjunto interseção de todos os $\hat{\mathbf{T}}$ estimados que satisfazem as propriedades **P(1), P(2) e P(3)** sujeitos à condição que $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in \hat{\mathbf{T}}$.

Isto é, **T** é o menor conjunto consistente com os dados observados em **P(1), P(2) e P(3)**. Forni [33] explica as considerações matemáticas que provam que **T** satisfaz as quatro propriedades acima. Assim sendo, este conjunto pode ser definido como:

$$\mathbf{T} = \left\{(x, y) \middle| x \geq \boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}\lambda, y \leq \boldsymbol{Y}^{\mathbf{T}}\lambda,\ \ \lambda \geq 0 \right\} \qquad (3.2.1)$$

Muitas vezes, o termo raio ilimitado é referenciado como retorno constante de escala. Basicamente, o modelo desenvolvido por Charnes et al [19], denominado CCR, procura estimar este conjunto e a partir dele calcular os índices de eficiência relativa das DMU´s.

Se a propriedade **P(2)** é desconsiderada, o **Conjunto de Possibilidades de Produção**, **T**, passa a ser definido como:

$$\mathbf{T} = \left\{(x, y) \middle| x \geq \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\lambda, y \leq \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\lambda,\ e\lambda = 1,\ \lambda \geq 0\right\} \qquad (3.2.2)$$

Este conjunto está relacionado com o modelo proposto por Banker et al [11]. Mais adiante, estas definições serão abordadas novamente com suas respectivas utilidades.

3.3
Conceito de eficiência

Coelli et al [21] *apud* Farrell [31] o qual propôs duas medidas de eficiência: Eficiência Técnica, a qual reflete a habilidade de uma empresa obter o máximo de *output* a partir de um dado *mix* de *inputs*, e Eficiência Alocativa, a qual reflete a habilidade de uma firma usar seus *inputs* em proporções ótimas, dado seus respectivos preços e a produção tecnológica. Estas duas medidas são então combinadas para fornecer a medida de Eficiência Econômica Total.

Estes conceitos podem ser compreendidos, de uma maneira mais clara, através de uma análise gráfica. Para tal, seja a Figura 3.2 que considera um processo de produção em que um único *output* é produzido por dois *inputs*:

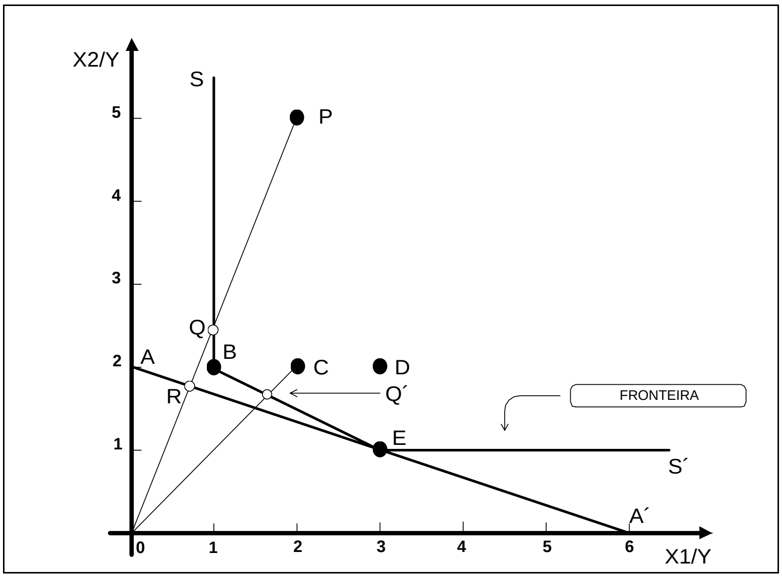

Figura 3.2: Eficiências Técnica, Alocativa e Econômica.

A curva representada por SS’ que conecta B e E, representa uma fronteira de produção DEA a qual nos permite calcular a Eficiência Técnica de todas as DMU´s envolvidas no processo. As empresas localizadas sobre a fronteira são identificadas empiricamente como DEA-Eficientes. Já a DMU C é rotulada como DEA-Ineficiente. Pois bem, o *score* de ineficiência da DMU C pode ser representado pela distância CQ’. É possível expressar Q’ como sendo uma combinação convexa [2] de B e E projetada sobre a fronteira de eficiência DEA. Averiguando fisicamente a distância CQ’, pode-se dizer que esta equivale à quantidade de *inputs* que pode-se reduzir proporcionalmente sem a redução de uma unidade de *output*.

Badin [10], generalizando o problema para o caso de múltiplos *inputs* e múltiplos *outputs*, menciona que Ineficiência Técnica pode ser definida como o fracasso de alcançar a fronteira de produção, isto é, o fracasso em alcançar o máximo possível de *outputs* dado um certo *mix* de *inputs*.

---

[2] Os modelos DEA assumem que o Conjunto de Possibilidades de Produção é um conjunto convexo e, de fato, se $\boldsymbol{x}_B = [x_{B1} \quad x_{B2}]$, $\boldsymbol{y}_B = [y_{B1}]$ e $\boldsymbol{x}_E = [x_{E1} \quad x_{E2}]$, $\boldsymbol{y}_E = [y_{E1}]$ pertencem a **T**, então cada ponto sobre o segmento de reta conectando estas duas atividades também pertencem a **T**.

Usualmente esta grandeza pode ser expressa de forma percentual. Neste caso tem-se que a Eficiência Técnica **(ET)** DEA da firma **P** é dada por:

$$\mathbf{ET} = \frac{\overline{\mathbf{OQ}}}{\overline{\mathbf{OP}}}$$

(3.3.1)

Conhecendo-se a informação da razão dos preços dos *inputs* pelos *outputs*, pode-se determinar o segmento de reta AA´ e dessa forma calcular a Eficiência Alocativa

(EA). Novamente, a Eficiência Alocativa de uma DMU operando no ponto **P** é:

$$\mathbf{EA} = \frac{\overline{\mathbf{OR}}}{\overline{\mathbf{OQ}}} \tag{3.3.2}$$

Finalizando, tem-se que Eficiência Econômica **(EE)** de **P** é equivalente ao produto das duas eficiências anteriores, ou seja:

$$\mathbf{EE} = \frac{\overline{\mathbf{OR}}}{\overline{\mathbf{OP}}} \tag{3.3.3}$$

Fundamentalmente, Eficiência Técnica está relacionada ao aspecto físico-operacional da produção, enquanto a Eficiência Econômica se preocupa com o aspecto monetário da produção.

Um comentário importante em relação à Eficiência Técnica baseia-se no fato de que ela é determinada ao longo de um segmento de reta que interliga a origem ao ponto de produção observado. Desta forma ela é considerada como uma medida de eficiência radial cuja vantagem é que as unidades são invariantes, não interferindo na medida de eficiência em si.

3.4
Benchmarks

Badin [10] cita que *Benchmarking* é um processo contínuo e sistemático de avaliação de empresas e serviços através da sua comparação com unidades consideradas eficientes, levando ao estabelecimento de ações gerenciais efetivas com o objetivo de aprimorar os resultados (redução dos custos, aumento de produção, etc). É um dos modernos instrumentos de gerência que possibilita a melhoria do desempenho técnico-econômico das empresas de forma comparativa.

Neste processo, parte-se do pressuposto de que as empresas que atuam num certo ramo representam atividades semelhantes, com padrões que podem ser aplicados a todas, como por exemplo, processamento de pedidos, processamento de dados ou lançamento de novos produtos. Algumas delas conseguem combinar melhor seus insumos (*inputs*), utilizando processos e técnicas de gestão mais aprimorados, e gerando produtos (*outputs*) com maior eficiência e eficácia.

Essas empresas servem, então, de referência para as demais, que devem rever seus processos de forma a caminhar no sentido de um melhor desempenho gerencial.

3.5
Retornos de escala

O conceito de retornos de escala é algo muito amplo que reflete o quanto um aumento proporcional em todos os *inputs* implica em um aumento no *output.* Baseado em Coelli et al [21], os conceitos em termos algébricos são apresentados. Considerando x_1 e x_2 duas variáveis de *input* observadas, tem-se:

Tabela 3.1 - Representação algébrica de retornos de escala.

Retornos de escala	Definição
Constante	$f(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha f(x_1, x_2)$
Crescente	$f(\alpha x_1, \alpha x_2) > \alpha f(x_1, x_2)$
Decrescente	$f(\alpha x_1, \alpha x_2) < \alpha f(x_1, x_2)$

Nota: $(\alpha > 1)$.

Há muitas razões pelas quais um setor de atividade econômica pode apresentar diferentes características de retornos de escala. O exemplo mais comum corresponde ao de uma pequena empresa que apresenta retornos de escala crescentes por ter contratado um funcionário adicional, especialista em uma determinada tarefa. Uma possível razão para retornos de escala decrescentes é o caso onde uma firma tornou-se tão grande, que a gerência não é capaz de exercer um total controle sobre todos os aspectos do processo de produção.

Análises empíricas de produção rotineiramente investigam retornos de escala por estimar a elasticidade total da produção (e). Freqüentemente, são encontradas estimativas da elasticidade parcial da produção, $(\boldsymbol{E}_i)$, que mede a mudança proporcional na variável *output*, resultante de um acréscimo proporcional no *i*-ésimo *input*, com todos os outros *inputs* mantidos constantes. Pode-se defini-la como:

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{y} \tag{3.5.1}$$

A elasticidade total da produção (e) mede a mudança proporcional na variável *output* resultante de um acréscimo proporcional unitário em todos os *inputs*, ou seja:

$$e = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{E}_m \tag{3.5.2}$$

O valor de e está relacionado com retornos de escala da seguinte maneira:

Tabela 3.2 - Relação entre retornos de escala e elasticidade total da produção.

Retornos de escala	Elasticidade Total da Produção (e)
Constante	=1
Crescente	>1
Decrescente	<1

Vale sublinhar que estes conceitos são muito utilizados no desenvolvimento de modelos DEA, assunto do próximo tópico.

3.6 Modelos DEA

Observa-se que um grande desafio consiste em estimar, através dos dados disponíveis muitas vezes constituídos de múltiplos *inputs* e *outputs*, uma função de produção não paramétrica.

Essencialmente, dentre os vários modelos DEA, cada um procura estabelecer quais subconjuntos de n_0 DMU´s determinará esta envoltória. Como será visto, a geometria desta envoltória está altamente relacionada à escolha do modelo DEA. Desta forma, é necessário que o especialista estude, de forma criteriosa, vários modelos DEA, antes de um veredicto final. Afinal, cada empresa pode utilizar, nos seus diversos setores, diferentes versões de tecnologia da produção, a qual pode ser considerada ideal neste período do tempo e, mesmo assim, devido ao modelo DEA empregado, ser considerada tecnicamente ineficiente. É importante, então, que os modelos sejam desenvolvidos com o suporte DEA objetivando não somente capturar a relação entre as quantidades de *input* e *output*, mas também outros fatores externos que influenciam na análise de eficiência.

Os dois modelos considerados como os pilares de toda teoria são:

- **CCR** - modelo pioneiro desenvolvido por **C**harnes, **C**ooper e **R**hodes [19];
- **BCC** – modelo sugerido por **B**anker, **C**harnes e **C**ooper [11], relacionado à ausência da propriedade **P(2)**, com o objetivo de sanar algumas carências do primeiro modelo.

Vale frisar que estes modelos fornecem ao gestor informações importantes sobre assuntos econômicos, gerenciamento possibilitando, dessa forma, tomar medidas pertinentes em relação ao desempenho de sua empresa.

3.6.1
Modelo DEA CCR *input-oriented*

Seja o caso mais trivial onde cada unidade tem apenas um *input* e um *output*. A eficiência técnica de cada unidade, segundo o conceito clássico de engenharia, pode ser expresso como a razão do *output* pelo *input*:

$$\mathbf{ET} = \frac{\boldsymbol{output}}{\boldsymbol{input}} \tag{3.6.1.1}$$

No entanto, na grande maioria das vezes, as unidades organizacionais possuem múltiplos *inputs* e *outputs*, tornando o conceito um pouco mais complexo. Desta forma, a medida de eficiência pode ser definida como a razão da soma ponderada de *outputs* (*outputs* virtuais) pela soma ponderada de *inputs* (*inputs* virtuais):

$$\mathbf{ET} = \frac{\text{soma ponderada de } \boldsymbol{outputs}}{\text{soma ponderada de } \boldsymbol{inputs}} \tag{3.6.1.2}$$

O objetivo é maximizar a eficiência de cada empresa de acordo com suas possibilidades e levando-se em consideração todas as demais empresas. Tem-se, então, o "CCR *ratio form*" o qual pode ser matematicamente expresso por **(M3.1)**:

$$\underset{u,v}{\mathbf{Max}} \quad \theta = \frac{u_1 y_{01} + u_2 y_{02} + \ldots + u_r y_{0r}}{v_1 x_{01} + v_2 x_{02} + \ldots + v_i x_{0i}} = \frac{output\ virtual}{input\ virtual}$$

S.T.

$$\frac{u_1 y_{j1} + u_2 y_{j2} + \ldots + u_r y_{jr}}{v_1 x_{j1} + v_2 x_{j2} + \ldots + v_i x_{ji}} \leq 1, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$u_r \geq \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s$$

$$v_i \geq \varepsilon, \quad i = 1,\ldots,m$$

(M3.1)

onde:

- y_{jr} = quantidade do *r*-ésimo *output*, da *j*-ésima DMU;
- x_{ji} = quantidade do *i*-ésimo *input*, da *j*-ésima DMU;
- *r* = indexador de *outputs*, (*r*=1,...,*s*);
- *i* = indexador de *inputs*, (*i*=1,...,*m*);
- *j* = indexador de DMU´s, (*j*=1,...,*n*);
- 0 = DMU que está sendo analisada ($j0$);
- u_r = peso atribuído ao *r*-ésimo *output*;
- v_i = peso atribuído ao *i*-ésimo *input*;
- $\varepsilon =$ infinitésimo positivo.

A principal característica deste modelo é que os pesos u e v são as incógnitas ou variáveis de decisão. Eles serão escolhidos de forma a maximizar a eficiência da unidade $j0$. Neste ponto, vale mencionar uma carência metodológica do modelo, ou seja, ele pode produzir um número infinito de soluções ótimas. Por exemplo, se (u^*, v^*) for a solução ótima, então é fácil ver que $(\alpha u^*, \alpha v^*)$ também é uma outra solução ótima $\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^*$. Para resolver este problema, é definida uma relação equivalente que separa o conjunto de soluções viáveis do modelo DEA **(M3.1)** em classes equivalentes. A transformação desenvolvida em [23] para o problema de programação linear fracionária, procura selecionar uma solução representativa (isto é, uma solução $(u\,,v)$ que satisfaça **(i)** – **M3.2**) de cada DMU equivalente e produza o seguinte problema de programação linear, que pode ser resolvido pelo método simplex:

$$\underset{u,v}{\textbf{Max}} \quad w_0 = \sum_r u_r y_{0r}$$

S.T.

$$\sum_i v_i x_{0i} = 1 \qquad \textbf{(i)}$$

$$\sum_r u_r y_{jr} - \sum_i v_i x_{ji} \le 0\,, \quad j = 1,\dots,n$$

$$u_r, v_i \ge \varepsilon,$$

(M3.2)

Pelo estudo de Programação Linear, sabe-se que o modelo **(M3.2)** possui uma forma denominada dual a qual está registrada no modelo **(M3.3)**:

$$\underset{\theta,\lambda}{\textbf{Min}} \quad \theta$$

S.T.

$$\theta \boldsymbol{x}_0^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{X}^{\mathbf{T}}\lambda \ge 0,$$

$$\boldsymbol{Y}^{\mathbf{T}}\lambda \ge \boldsymbol{y}_0^{\mathbf{T}},$$

$$\lambda \ge 0;$$

θ **: sem restrição.**

(M3.3)

Percebe-se no modelo **(M3.3)** que o conjunto de restrições é equivalente ao conjunto T, referenciado anteriormente como **Conjunto das Possibilidades de Produção** (vide equação 3.2.1). Prosseguindo, como o objetivo é encontrar um valor ótimo θ^* que permita minimizar os *inputs* mantendo os *outputs* constantes, tem-se, então, o modelo CCR *input-oriented.* Este modelo é conhecido na literatura como **Envelope**.

Tanto maximizando o modelo **(M3.2)** como minimizando o modelo **(M3.3)** e considerando um conjunto de restrições, é possível obter o *score* de eficiência da unidade $j0$. Vale assinalar que para os modelos com orientação a *inputs* (*input oriented*), $\theta \in (0 \;\; 1]$.

A Figura 3.3 mostra a geometria da envoltória determinada por este modelo para o caso de apenas um *input* e um *output*:

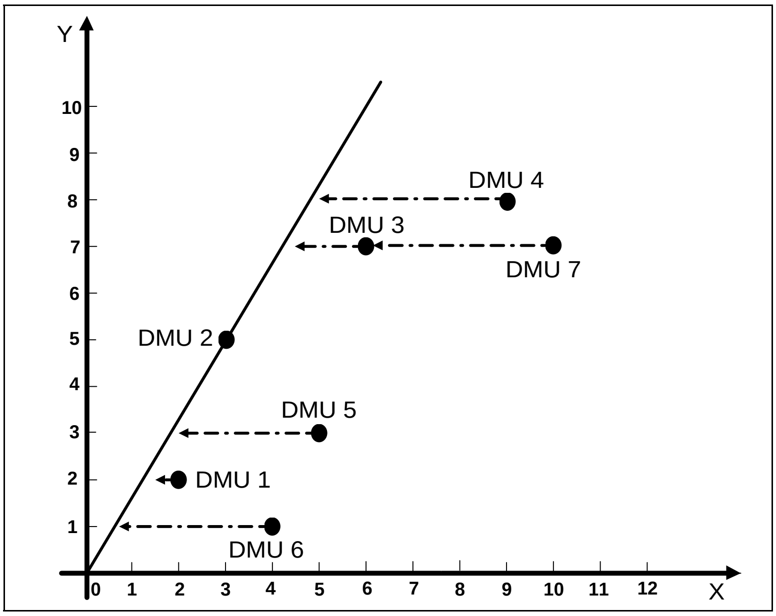

Figura 3.3: Envoltória determinada pelo modelo CCR *input-oriented* [18].

Uma análise na Figura 3.3 permite constatar uma fronteira de produção não paramétrica sobre os pontos dados de tal forma que estes pontos pertençam ou estejam abaixo desta fronteira. O ponto sobre a fronteira indica que a respectiva unidade é tecnicamente eficiente, ou seja, $\theta^* = 1$, valor este conseguido através da resolução do modelo **(M3.3)**.

Verifica-se, também, que cada DMU considerada ineficiente tenta aproximar-se da envoltória dirigindo-se no sentido de minimizar o *input* mantendo inalterado o *output*.

Neste momento, são necessárias algumas definições do modelo CCR:

Definição 3.1 – Eficiência CCR.

A DMU $j0$ é dita CCR eficiente se existe no mínimo uma solução ótima (u^*, v^*), com $v^* > 0$ e $u^* > 0$, para a qual $\theta^* = 1$.

Caso contrário a DMU $j0$ é dita CCR ineficiente.

Então, CCR ineficiente significa que ou (i) $\theta^* < 1$ ou (ii) $\theta^* = 1$ e no mínimo um elemento de (u^*, v^*) é zero para cada solução ótima do PPL.

O sub-conjunto composto de DMU´s CCR eficientes é denominado **conjunto de referências** ou **grupos pares** para as outras DMU´s CCR ineficientes. A partir de conhecimentos envolvendo programação linear, estas unidades são identificadas resolvendo o modelo **(M3.3)** onde cada $\lambda > 0$ corresponde à unidade tecnicamente eficiente.

Uma importante característica de DEA, é que a formulação consegue fazer uma comparação do desempenho da $j0$-ésima DMU com todas as outras DMU´s. Assim sendo, a técnica DEA mede a eficiência relativa, não absoluta, das entidades.

Por fim, basicamente o modelo CCR resulta em uma envoltória linear por partes com Retorno Constante de Escala (RCE) significando que um aumento proporcional em todos os *inputs* resulta em um mesmo aumento proporcional nos *outputs*.

3.6.2
Modelo DEA BCC *input-oriented*

Em várias oportunidades, pode-se encontrar empresas que operam em escala ótima adotando o modelo CCR, o qual assume estimar uma fronteira de produção com Retorno Constante de Escala. O índice de eficiência denominado *score* (**Eficiência Técnica Global**), que é obtido pela resolução deste modelo, permite fazer comparações sobre as mesmas. Entretanto, em casos onde o RCE não prevalece devido a uma competição imperfeita, restrições nas finanças, etc, conjectura-se que as unidades devam ser comparadas, dado suas escalas de operação ou, no mínimo, deve ser mencionado que esta é a a razão da sua ineficiência. Em tais circunstâncias a Eficiência Técnica Global pode ser decomposta Eficiência Técnica Pura Local e Eficiência de Escala.

Para permitir este processo, Banker et al [11] sugeriram uma extensão do modelo CCR e formularam um modelo que permitisse Retorno Variável de Escala (RVE). Este modelo, denominado BCC, em referência aos seus idealizadores, é uma outra formulação derivada do modelo **(M3.3)** acrescido da restrição de convexidade.

A seguir, tem-se, então, a formulação do modelo BCC representado por **(M3.4)**:

$$\underset{\theta,\lambda}{\mathbf{Min}} \quad \theta$$

$$\mathbf{S.T.}$$

$$\theta \boldsymbol{x}_0^{\mathbf{T}} - \boldsymbol{X}^{\mathbf{T}} \lambda \geq 0,$$

$$\boldsymbol{Y}^T \lambda \geq \boldsymbol{y}_0^{\mathbf{T}},$$

$$e\lambda = 1; \qquad (\mathbf{ii})$$

$$\theta: \ \textbf{sem restrição.}$$

(M3.4)

Esta restrição de convexidade representada no modelo **(M3.4)** por (**ii**), reduz o **Conjunto de Possibilidades de Produção** $(\mathbf{T})$ viável e converte uma tecnologia de ganho constante de escala em uma tecnologia de ganho variável de escala.

Semelhante à definição do modelo CCR, tem-se:

Definição 3.2 – Eficiência BCC.

A DMU $j0$ é BCC eficiente se $\theta^* = 1$ e todas as folgas são zero. Caso contrário, a DMU $j0$ é identificada como BCC ineficiente.

O sub-conjunto composto de DMU´s BCC eficientes é denominado **conjunto de referências** ou **grupo de pares** para as outras DMU´s BCC ineficiente.

Pela Figura 3.4 pode-se fazer uma comparação entre as fronteiras de produção estabelecidas pelo modelo CCR e BCC, em um ambiente composto de 7 DMU´s cada qual com um *input* e um *output*.

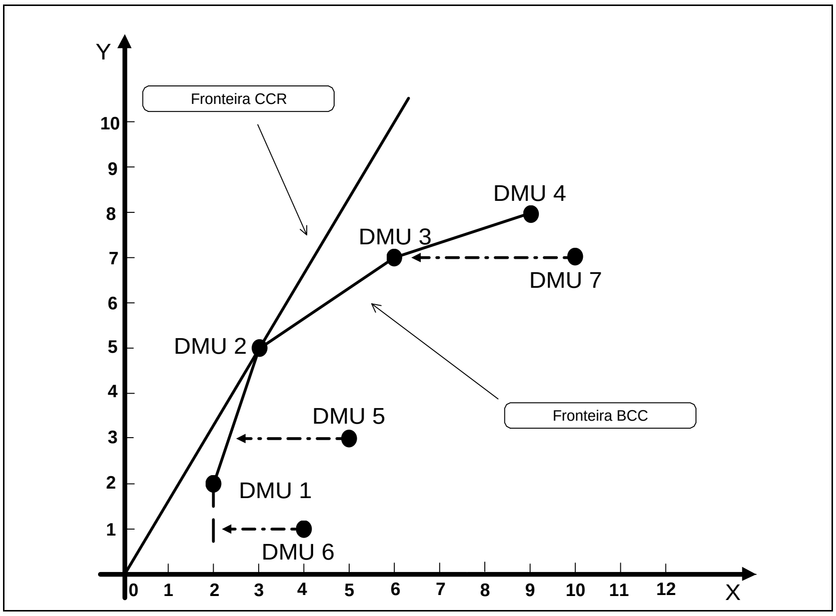

Figura 3.4: Envoltória determinada pelos modelos CCR e BCC (*input-oriented*) [18].

Por inspeção visual da Figura 3.4, percebe-se que no segundo caso, ou seja, no modelo BCC, a técnica DEA forma uma superfície convexa, constituída por planos interligados os quais envelopam os pontos, tornando-os mais próximos da fronteira do que no caso da superfície RCE. O resultado deste processo é a obtenção de uma medida de eficiência maior ou igual a do modelo CCR. Desta forma, é possível avaliar um maior número de DMU´s como sendo tecnicamente eficientes.

As DMU´s 5, 6 e 7 são tecnicamente ineficientes quando analisadas segundo o modelo BCC o qual adota RVE. Assim sendo, é possível comparar cada uma destas DMU´s com as DMU´s eficientes projetando-as sobre um ponto

$(\hat{x}_{jt1}, \hat{y}_{jt1})$ da envoltória determinada pelas *jt*-DMU´s eficientes. Cabe ressaltar que este ponto particular de projeção $(\hat{x}_{jt1}, \hat{y}_{jt1})$ tanto é dependente do modelo DEA escolhido quanto da orientação. Por exemplo, em um modelo BCC *input-oriented*, o objetivo é caminhar em direção à fronteira através da redução proporcional de *inputs*. Este conceito pode ser facilmente interpretado na Figura 3.4 onde a orientação para *inputs* consiste nas seguintes projeções:

- A DMU 5 incide sobre um ponto que reflete a combinação linear convexa das DMU´s 1 e 2 as quais são seu **conjunto de referência**;
- A DMU 6 incide sobre um ponto que representa a DMU 1 a qual é seu **conjunto de referência**;
- A DMU 7 incide sobre um ponto que representa a DMU 3 a qual é seu **conjunto de referência**;

Se uma DMU é plenamente eficiente à luz dos *scores* de eficiência CCR e BCC, significa que ela está operando com a máxima produtividade. É o caso da DMU 2 na Figura 3.4 acima. No entanto, se ela é somente BCC eficiente, então ela está operando de forma eficiente apenas localmente devido à dimensão de escala da DMU.

3.6.3
Outros modelos DEA

É importante assinalar que há vários outros modelos DEA [18, 23, 99]. No entanto, o objetivo desta obra não é explicar exaustivamente todas as formulações. Nesse contexto, é elencado outros modelos registrados na literatura:

- Modelo CCR *output oriented*;
- Modelo BCC *output oriented*;
- Modelo Aditivo;
- Modelo Multiplicativo;
- Modelos não-radiais.

É fundamental ressaltar que resultados bastante diferentes podem ser encontrados ao resolver o DEA não somente com relação à seleção de diferentes modelos, mas também com relação à orientação adotada, ou seja, *input-oriented* ou *output-oriented*.

O ponto crucial para o analista é, portanto, escolher entre vários modelos, aquele que melhor atende às suas especificações. Outras questões relevantes referem-se à escolha das variáveis (a seleção das variáveis de *input* e *output* deve ser feita de forma criteriosa), representação dos dados, interpretação dos resultados e conhecimento de limitações.

Devido às importantes conseqüências sobre o estudo e os resultados obtidos, a aplicação de um modelo básico DEA deveria ser feita somente depois de cuidadosas considerações. Como exemplo, é importante que o número de DMU´s seja, no mínimo, 2*m*x*s* onde *m*x*s* [3] é o produto do número de *inputs* e *outputs*, pois caso isso não ocorra pode-se identificar uma DMU como sendo eficiente quando na verdade a mesma não é [27].

3.6.4
Seleção de variáveis *inputs* e *outputs*

Embora não seja este o foco principal deste trabalho, é bastante oportuno abordar a questão da escolha das variáveis. Em concordância com o que foi citado, a elaboração de um bom resultado de eficiência está intimamente relacionado com a escolha das mesmas, ou seja, elas devem ser bastante significativas de modo a ter a capacidade de influenciar de forma decisiva no resultado de eficiência de cada unidade.

Boussofiane et al [15] mencionam que embora os modelos DEA permitam combinar um conjunto de pesos comuns para os *inputs* e *outputs*, naturalmente

---

[3] este assunto é bastante referenciado na literatura. Em [9] encontramos uma outra regra de bolso:

$$n \geq \max\{m \text{ x } s, 3(m+s)\}$$

n = número de DMU´s;

m = número de *inputs*;

s = número de *outputs*.

eles não conseguem evitar o problema de uma seleção equivocada dos *inputs* e *outputs*. Claramente, qualquer recurso usado por uma organização poderia ser incluído como um *input*.

Uma DMU precisa ter a capacidade de converter *inputs* em *outputs* de modo que estes *outputs* possam ser produzidos em diferentes níveis de qualidade.

Continuando, fatores ambientais os quais podem afetar a produção de *outputs* precisam ser identificados e incluídos no modelo a ser analisado para que a comparação das eficiências seja satisfatória. Estes fatores ambientais podem ser medidos diretamente ou indiretamente através do uso de uma *proxy*. Um fator ambiental o qual adiciona recursos, pode ser incluído como um *input* enquanto um que requer recursos pode ser incluído como um *output*.

3.6.5
Técnicas baseadas em Restrições aos Pesos

Cada vez mais DEA tem sido utilizada para resolver problemas relacionados com o cotidiano. Existem várias pesquisas envolvendo diversos tipos alternativos de análise de restrições dos pesos fazendo deste aspecto uma das áreas mais promissoras de desenvolvimento em DEA, sem mostrar qualquer sinal de saturação [2].

No modelo básico, reporte-se ao modelo primal **(M3.2)**, foi observado que os pesos u´s e v´s eram variáveis do problema e estavam restritas a serem maiores ou iguais a algum infinitésimo positivo ε de forma a não permitir que algum *input* ou *output* fosse totalmente ignorado no processo de calcular a eficiência das respectivas DMU´s. Charnes et al [18] advogam que o processo de permitir uma certa flexibilidade na escolha dos pesos é freqüentemente apresentada como uma prática vantajosa em aplicações da metodologia DEA; uma especificação *a priori* dos pesos não é necessária, e cada DMU é avaliada à luz da melhor perspectiva.

No entanto, em algumas situações, esta completa flexibilidade pode levar a conseqüências indesejáveis, ou seja, o especialista pode avaliar uma DMU como eficiente em situações difíceis de justificar como tal. Procurando sanar essa carência metodológica, foi sugerido incorporar a opinião do especialista com relação à importância dos *inputs* e *outputs* bem como sobre as relações entre as variáveis. Assim sendo, o modelo DEA torna-se mais plausível e uma conclusão mais coerente acerca do desempenho das DMU´s é obtida.

A gênese de toda essa teoria é creditada a Thompson et al [89] que modificaram o modelo DEA original incorporarando restrições aos pesos através de regiões de segurança (*Assurance Region* - AR). Segundo Thanassoulis & Allen [87], diversos trabalhos têm sido propostos na literatura com este fim. Vale citar que estes métodos têm diferido apenas com relação à especificação dos limites permissíveis dos valores dos pesos evitando, assim, que o problema se torne inviável.

Seguindo o critério adotado por Allen et al [2], as técnicas para impor restrições aos pesos podem ser classificadas em três categorias, a saber:

1. **Restrições Diretas sobre os Pesos:**

   Esta técnica consiste em adicionar ao modelo **(M3.2)** restrições aos pesos. Há duas maneiras para tal: (i) impor limites absolutos inferiores e superiores sobre u_r e v_i [28, 79]; (ii) Regiões de Segurança 1 e 2 (*Assurance Region*) [88, 89, 90].

2. **Ajuste sobre os níveis de *inputs- outputs* observados (modelos ajustados com a utilização de dados artificiais):**

   Para este caso, é gerada uma base de dados artificiais através de uma transformação linear nos dados originais (*inputs*/*outputs*). O método Cone-Ratio [18] e a técnica de Relações Ordinais [44] são duas técnicas que emulam restrições aos pesos através de transformações lineares nos dados.

3. **Restrição sobre a flexibilidade dos *inputs* e *outputs* virtuais.**

   Os tópicos anteriores utilizam restrições aos pesos sem levar em consideração a magnitude dos *inputs* e *outputs.* Neste contexto, duas técnicas são propostas na literatura para este fim: *Contingent Restrictions on Weights* - Pedraja et al [70] e *Relative Importance of factors to a DMU* – Wong & Beasley [96]. Esta última é baseada em proporções e consiste em estabelecer limites (inferior e superior) para a razão de determinado *output* (*input*) virtual pela soma de todos os *outputs* (*inputs*) virtuais.

No entanto, há controvérsias sobre este tema. Dyson et al [27] ressaltam que os resultados obtidos dos modelos com restrições aos pesos não podem ter a mesma interpretação que quando na forma original, sem restrições aos pesos. Isto ocorre porque quando são impostas restrições aos pesos, a interpretação do **Conjunto de Possibilidades de Produção**, (3.2.1) e (3.2.2), passa a não ser mais válida. A característica de modelo radial também é perdida.

Este trabalho segue a metodologia proposta por Pedraja et al [70]. Como a mesma foi adaptada, resolveu-se denominá-la: *Adjusted Contingent Restrictions on Weights*.

3.7
Adjusted contingent restrictions on weights

Contingent restrictions on weights é uma técnica DEA de restrições aos pesos proposta por Pedraja et al [70]. Segundo os autores, a razão do termo "*contingent*" é evidenciar o fato de que o valor dos pesos depende da quantidade de *inputs* e *outputs* que cada DMU consome/produz. Em um contexto de *inputs*, tem-se que a contribuição do *i*-ésimo *input* à $j0$ DMU é $v_i x_{0i}$. Procedendo desta maneira, pode-se assegurar que apenas os *inputs* e *outputs* que realmente contribuem significativamente para o desempenho de uma DMU, com relação aos custos totais ou benefícios da referida DMU, são incluídos na análise.

Matematicamente, Pedraja et al [70] propõem a seguinte forma para as restrições de um conjunto de *inputs*:

$$c_i v_1 x_{j1} \le v_i x_{ji} \le d_i v_1 x_{j1}, \quad \forall i > 1, \quad j = 1,\ldots, j0,\ldots, n \qquad (3.7.1)$$

onde c_i e d_i são escolhidos pelo analista. Vale sublinhar que restrições similares podem ser aplicadas para o conjunto de *outputs*.

A adaptação mencionada está baseada na questão de considerar apenas as empresas DEA-eficientes, ou seja:

$$c_i v_1 x_{jt1} \leq v_i x_{jti} \leq d_i v_1 x_{jt1}, \quad \forall i > 1, \quad jt = 1,\ldots,n \tag{3.7.2}$$

ou

$$v_i x_{jti} \leq \mathbf{k}\, v_{i'} x_{jti'}, \quad \forall (i \neq i') > 1, \quad j\,t = 1,\ldots,n \tag{3.7.3}$$

onde **k** é o coeficiente de regressão linear entre dois *inputs* quaisquer.

É relevante registrar que as restrições adicionadas, ao modelo, também emulam as regiões de segurança Tipo I e Tipo II (ARI e ARII), conforme Thanassoulis & Allen [87].

Por último, é pertinente destacar algumas vantagens desta adaptação:

- Melhor discriminação das empresas eficientes;
- Empresas ineficientes (de acordo com os modelos DEA – **M3.2** ou **M3.3**) não são consideradas nesta análise. Este procedimento proporciona uma significativa redução do esforço computacional;
- É possível obter resultados muito similares quando comparado com a técnica de DMU´s artificiais (baseada na opinião do especialista). Esta constatação pode ser comprovada em Diallo et al [24].