

7

Definição da Trajetória via Controle Ótimo

O objetivo desse trabalho é avaliar a metodologia de projeto e os controladores não só em percursos que representem o centro da pista, mas trajetórias ótimas em algum aspecto, esse capítulo dá um primeiro passo na determinação de uma trajetória otimizada em relação ao tempo de percurso.

Um modelo de veículo simplificado será adotado para se obter os resultados, ao passo que modelos mais completos remeteriam a sistemas muito complexos e de tempo de máquina muito elevado.

O veículo será representado por quatro equações diferenciais de primeira ordem que definem, velocidade em x , velocidade em y , aceleração em x e aceleração em y , dado pela Figura 78, onde a é a aceleração do veículo, β é a direção da aceleração, v e u são as velocidades laterais e longitudinais respectivamente e x e y o deslocamento do veículo nos dois eixos.

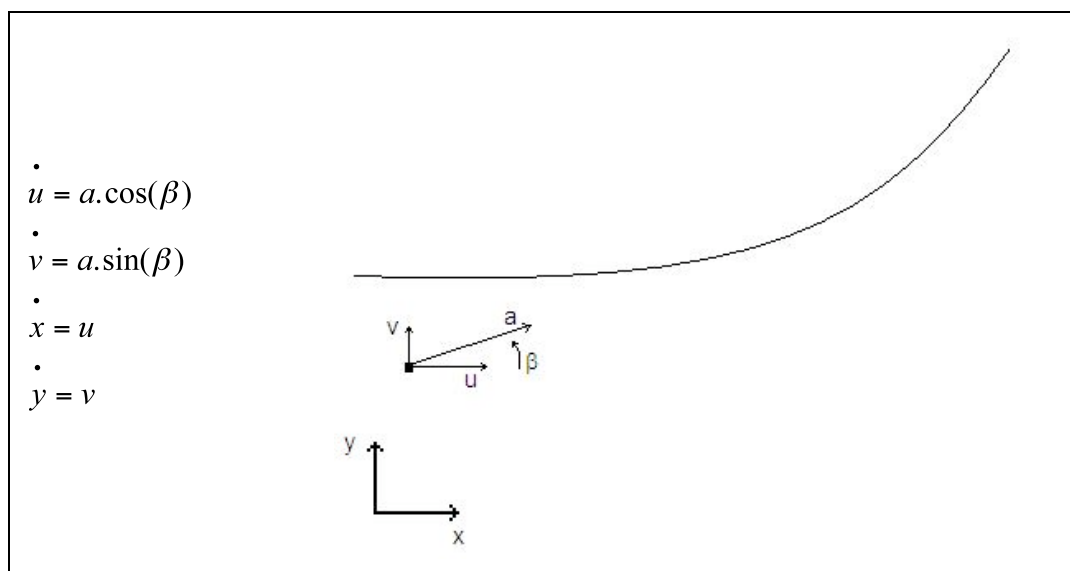


Figura 78: Representação do modelo.

7.1. Descrição do Problema de Tempo Mínimo

O problema a ser tratado se subdivide em dois casos. Em ambos as posições final e inicial são definidas. A diferença está no fato de que no primeiro caso as direções das velocidades (composta por u e v) inicial e final não são definidas e no segundo caso definem-se como condições inicial e final as direções da velocidade na entrada e na saída da curva. A aceleração é constante, mas sua orientação em relação ao referencial inercial é variável, sendo esta a variável de controle. Tem-se como restrições a curva que define a pista, a orientação da aceleração que é limitada e a aceleração lateral do veículo, que também é limitada.

7.1.1. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Livres.

Considerando o modelo de partícula,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\ \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\ \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \end{aligned} \tag{37}$$

Sob as seguintes condições de contorno para velocidades inicial e final livres,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \\ x(tf) &= x_1 \\ y(tf) &= y_1 \\ -M &\leq \beta \leq M \\ a &= 1 \\ -a_{admissivel} &\leq a_{lateral} \leq a_{admissivel} \\ y &= 1.3^x \end{aligned} \tag{38}$$

onde vale lembrar que: $a_{lateral} = \frac{V}{R} . u$

O critério de otimalidade usado é (Bryson, 1981):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} 1 . dt \rightarrow J = t_f - t_0 \quad (39)$$

Define-se a Hamiltoniana (Bryson, 1981):

$$H = 1 + \lambda_u . \cos(\beta) + \lambda_v . \sin(\beta) + \lambda_x . u + \lambda_y . v + \mu . S \quad (40)$$

onde $S = y - 1.3^x$ representa a restrição e

$$\mu \begin{cases} > 0, S = 0 \\ = 0, S < 0 \end{cases} \quad (41)$$

o que significa que quando μ for maior que zero, a restrição está ativa, caso contrário ela não está ativa e o problema é o mesmo que sem restrição.

Para chegar às condições necessárias deve-se resolver o problema para os dois casos, $\mu = 0$ e $\mu > 0$. A solução será uma composição desses dois resultados.

Assim, a Hamiltoniana gera para $\mu = 0$

$$H = 1 + \lambda_u . \cos(\beta) + \lambda_v . \sin(\beta) + \lambda_x . u + \lambda_y . v \quad (42)$$

e as equações adjuntas são as seguintes (Bryson, 1981):

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_x \\
\dot{\lambda}_v &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_y \\
\dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\
\dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0
\end{aligned} \tag{43}$$

Levando a condição de máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow -\lambda_u \cdot \text{sen}(\beta) + \lambda_v \cdot \cos(\beta) = 0 \tag{44}$$

Sendo as equações de estado do modelo das por:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\
\dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\
\dot{x} &= u \\
\dot{y} &= v
\end{aligned} \tag{45}$$

Resolvendo o sistema composto pelas equações (42), (43), (44), (45) se tem,

$$\begin{aligned}
\lambda_x &= C1 \\
\lambda_y &= C2 \\
\lambda_u &= C1.t + C3 \\
\lambda_v &= C2.t + C4 \\
\beta &= \text{tg}^{-1} \left(\frac{C2.t + C4}{C1.t + C3} \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

Como $u(0)$ e $v(0)$ não são definidos então $\lambda_u(0)$ e $\lambda_v(0)$ são iguais a zero (Bryson, 1981). Sendo assim se tem que $C3$ e $C4$ são zero e β é uma constante.

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{C2}{C1} \right) \quad (47)$$

O que leva a entender que a orientação da aceleração não varia e conseqüentemente $\dot{u}$ e $\dot{v}$ são constantes, logo o veículo percorre uma reta entre as posições iniciais e finais, o que intuitivamente, já era de se esperar quando a restrição do estado não está ativa.

Para $\mu > 0$ a Hamiltoniana é dada por,

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \operatorname{sen}(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v + \mu \cdot (v - 1.3^x) \quad (48)$$

e as equações adjuntas são as seguintes:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_u &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_x \\ \dot{\lambda}_v &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_y \\ \dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \mu \cdot \ln(1.3) \cdot 1.3^x \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\mu \end{aligned} \quad (49)$$

sendo a condição de máximo:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow -\lambda_u \cdot \operatorname{sen}(\beta) + \lambda_v \cdot \cos(\beta) = 0 \quad (50)$$

E novamente se tem as equações de estado dadas por,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\ \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\ \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \end{aligned} \quad (51)$$

Com a condição de restrição de trajetória:

$$y = 1.3^x \quad (52)$$

Resolvendo novamente o sistema e equações encontra-se uma função de β tal que o veículo percorre a restrição. O que também era o esperado, já que ao derivar a Hamiltoniana em relação a μ a equação que aparece no sistema é $y=1.3^x$, forçando essa condição.

Como o objetivo é minimizar o tempo e o que o princípio do máximo fornece são condições necessárias, quando a restrição não está ativa tem-se uma reta, quando ela é ativa, percorre-se a restrição. Dessa forma existem duas possibilidades à testar, mostradas na Figura 79 e na Figura 80.

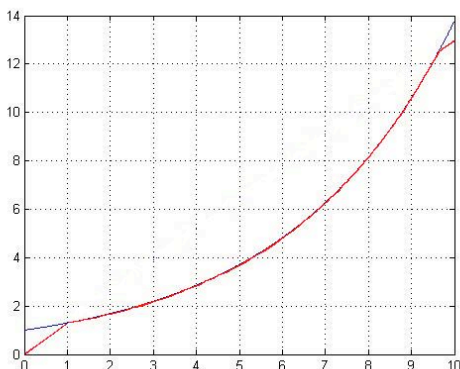


Figura 79: Composição da solução.

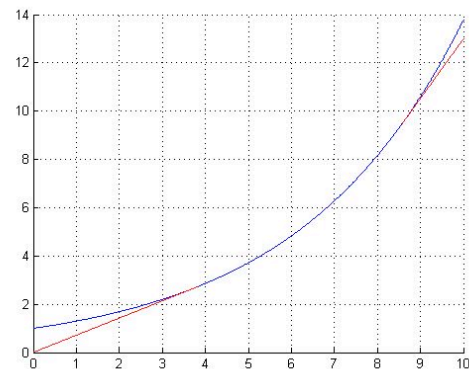


Figura 80: Segunda composição da solução.

No primeiro caso (Figura 79) é traçada uma reta direto ao ponto final como se não houvesse restrição, que é interrompida quando se atinge a restrição. Pelo entendimento do problema sabe-se que não pode haver essa descontinuidade na orientação da aceleração. No mundo real não consegue uma mudança instantânea de direção como representado na Figura 79.

Na Figura 80 a solução parece mais realista, não havendo descontinuidade na trajetória. O veículo se aproxima por uma reta tangente, percorre a restrição e escapa por outra reta tangente a restrição.

A solução da Figura 80 pode ser calculada geometricamente para cada caso de condição inicial. Em particular, essa trajetória representa a solução para o seguinte problema:

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Sendo assim calcula-se as duas retas tangentes à restrição e que passam por esses pontos. A equação da primeira reta é dada por,

$$y = 0.71.x \quad (54)$$

e a segunda reta é dada por,

$$y = 2.46.x - 11.62 \quad (55)$$

Um primeiro ponto importante a se destacar neste caso é que o veículo mantém aceleração constante, de modo que na reta não existirá aceleração lateral, mas sobre a restrição, que não é um arco de círculo, a aceleração lateral aumenta a medida que o veículo percorre a restrição. Isso significa que dependendo da restrição, a aceleração lateral pode ultrapassar a admissível, ou seja, o veículo derraparia e se afastaria da restrição, não obedecendo a condição necessária de otimalidade, que nesse caso é percorrer a restrição.

Da mesma forma, se a restrição (curva) for muito acentuada, a variável de controle que é limitada, pode não ter amplitude para percorrê-la, tendo o veículo que se deslocar por uma outra trajetória possível e em casos extremos nem conseguindo realizar a curva.

Note que no caso da Figura 79 a taxa de variação de β , necessária para se percorrer a trajetória em questão, seria infinita e conseqüentemente a aceleração lateral também, não atendendo as restrições.

Considerando a solução demonstrada na Figura 80, se vê que o problema passou a ser puramente geométrico, pois dadas as condições iniciais e se certificando que as restrições tanto no controle quanto na aceleração lateral são atendidas, basta achar as retas tangentes à restrição e em seguida os instantes de comutação, que o problema estará resolvido.

7.1.2. Condições Iniciais e Finais de Velocidade Definidas.

Novamente o sistema de equações que descreve o modelo de partícula:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a \cdot \cos(\beta) \\ \dot{v} &= a \cdot \sin(\beta) \\ \dot{x} &= u \\ \dot{y} &= v \end{aligned} \tag{56}$$

sob as seguintes condições de contorno para velocidades inicial e final definidas,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= x_0 \\
 y(0) &= y_0 \\
 x(tf) &= x_1 \\
 y(tf) &= y_1 \\
 u(0) &= u_0 \\
 v(0) &= v_0 \\
 u(tf) &= u_1 \\
 v(tf) &= v_1 \\
 -M &\leq \beta \leq M \\
 a &= 1 \\
 -a_{admissivel} &\leq a_{lateral} \leq a_{admissivel} \\
 y &= 1.3^x
 \end{aligned} \tag{57}$$

Nesse caso o sistema de equações continua o mesmo, o que muda agora é o fato de que são definidas condições iniciais de velocidade, como mostrado na Figura 81. Com tais velocidades iniciais definidas, a solução não é mais uma reta tangente à restrição. A solução deverá sair tangente à velocidade resultante.

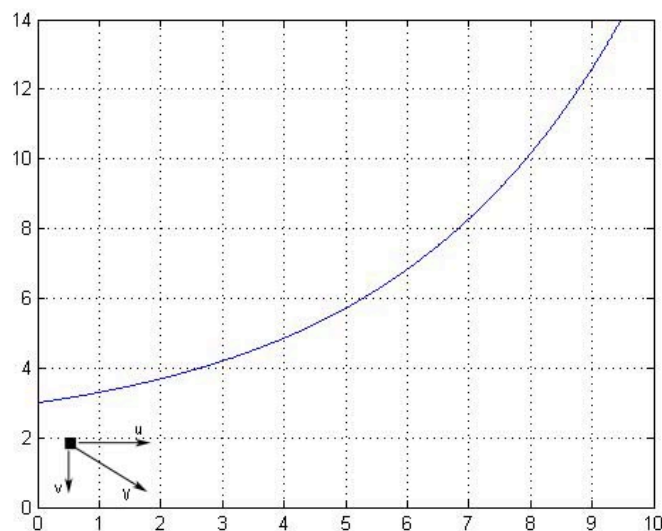


Figura 81: Condições iniciais para o segundo caso.

Para o caso em que as condições iniciais estão definidas, não se tem como solução uma reta. A solução encontrada no caso anterior é:

$$\begin{aligned}
 \lambda_x &= C1 \\
 \lambda_y &= C2 \\
 \lambda_u &= C1.t + C3 \\
 \lambda_v &= C2.t + C4 \\
 \beta &= tg^{-1}\left(\frac{C2.t + C4}{C1.t + C3}\right)
 \end{aligned} \tag{58}$$

Note que desta vez as condições $v(0)$ e $u(0)$ estão definidas, significando que $\lambda_u(0)$ e $\lambda_v(0)$ não serão nulas e conseqüentemente $C3$ e $C4$ podem existir.

Levando em consideração a intuição que se tem sobre o problema e o que o princípio do máximo fornece, pode-se supor a forma da solução dada as condições iniciais representadas na Figura 81.

Sabe-se que a solução deve tangenciar a restrição e que se as CI's de velocidade fossem livres a reta seria a melhor opção. Pode-se supor então que a solução tem que convergir para essas condições o mais rápido possível, pois deseja-se o tempo mínimo. Além disso, o veículo deve buscar a reta que tangencia a curva, obedecendo as restrições de controle e de aceleração lateral.

Sabe-se também que existe um raio de curvatura onde a aceleração lateral é igual a admissível, ou seja, existe um $\dot{\beta}_{limite}$ que pode ser aplicado ao veículo para que ele tome a direção da reta tangente a restrição. É importante ressaltar que o veículo não percorrerá um arco de círculo, pois a aceleração não é zero, fazendo com que a velocidade aumente a cada instante. Se a velocidade varia a cada instante, o raio de curvatura admissível não é constante e conseqüentemente $\dot{\beta}_{limite}$ também não é constante. Na realidade o raio de curvatura limite vai aumentando cada vez mais e $\dot{\beta}_{limite}$ diminuindo.

Em um dado momento, sabendo que não podem haver descontinuidades, o veículo escaparia por uma reta tangente à curva e à restrição, satisfazendo à condição necessária imposta pelo critério do mínimo.

Sendo assim, se o veículo não está apontado na direção da reta tangente à restrição ($\beta = 0$), ele estará fazendo uma curva com o maior β possível, que obedeça as restrições de aceleração lateral e do próprio controle. Isso é mostrado pelo princípio do mínimo, ou seja, minimizar o tempo significa minimizar a hamiltoniana em relação à variável de controle.

Para este caso a Hamiltoniana em relação ao controle é dada por,

$$H = 1 + \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v + \mu \cdot (y - 1.3^x) \quad (59)$$

e minimizá-la é o mesmo que minimizar a Hamiltoniana equivalente,

$$H = \lambda_u \cdot \cos(\beta) + \lambda_v \cdot \sin(\beta) \quad (60)$$

e o que vai determinar a forma da curva solução são os sinais de λ_u e λ_v . Assim, representando essa função para as diferentes combinações de sinais e para um beta máximo de 45° , o que é mais do que um veículo normal pode esterçar suas rodas, tem-se as curvas da Figura 82, que representam parte da hamiltoniana em relação a β .

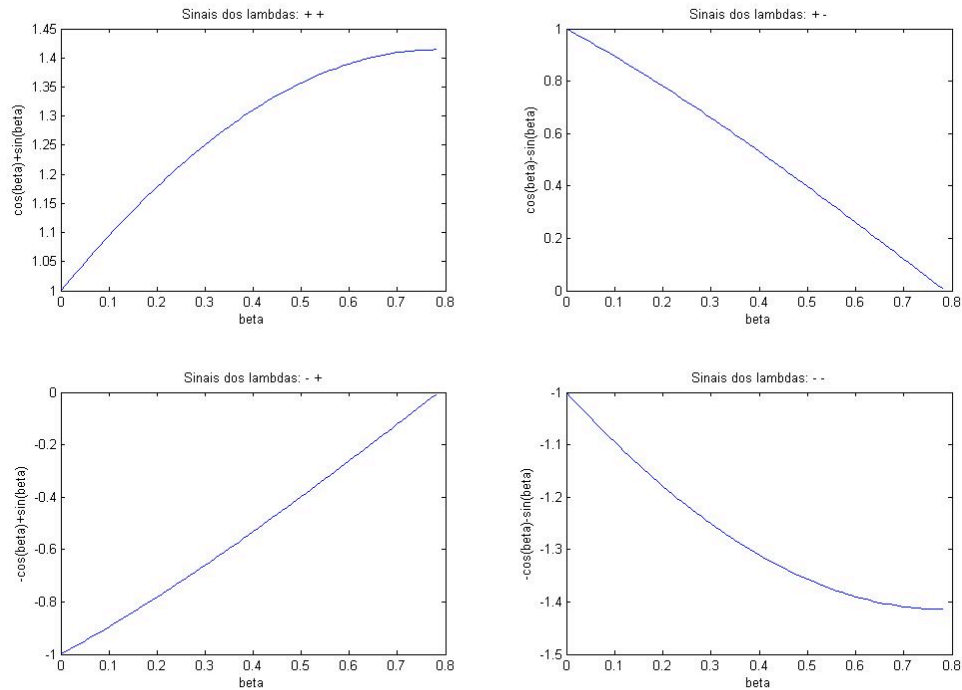


Figura 82: Parte da Hamiltoniana em função de β .

A partir desses gráficos pode-se ver que o mínimo acontece, ou quando β é zero ou quando β é máximo, ou seja, β está sempre nos extremos. No caso de um veículo, β estaria relacionado à capacidade de esterçamento do veículo e a elipse de aderência, que determina quais as máximas acelerações que o veículo pode ter durante uma curva sem que ele derrape. A Figura 83 mostra a solução que se chega quando se leva em consideração as condições necessárias do princípio aplicado.

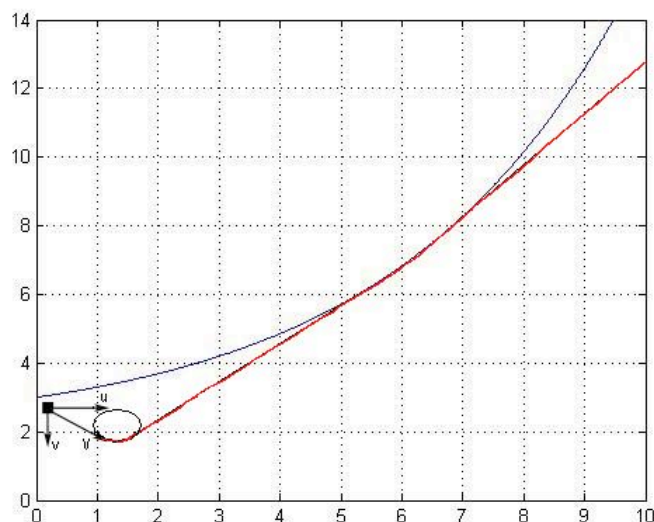


Figura 83: Solução quando são definidas as condições iniciais de velocidade.

Note que a Figura 81 representa apenas as CI's definidas, as condições finais estão livres. Caso tivessem sido definidas as CF's, o comportamento seria o mesmo para satisfazer as condições.

Pode-se dessa forma extrapolar esse caso para diversas situações. Se o limite de aceleração lateral máximo for muito pequeno o veículo pode não conseguir contornar a curva. Ele pode até nem tangenciar a restrição se a tangente à curva referente às condições iniciais alcançar o ponto final. Pode-se supor diversas outras situações que são resolvidas da mesma forma.

Sabendo traçar a curva limite de aceleração lateral, que relaciona a aceleração do veículo com sua capacidade de fazer a curva, e que pode ser obtida conhecendo-se a elipse de aderência do veículo, o problema se torna, novamente geométrico, se baseando em encontrar as retas tangentes às curvas em questão.

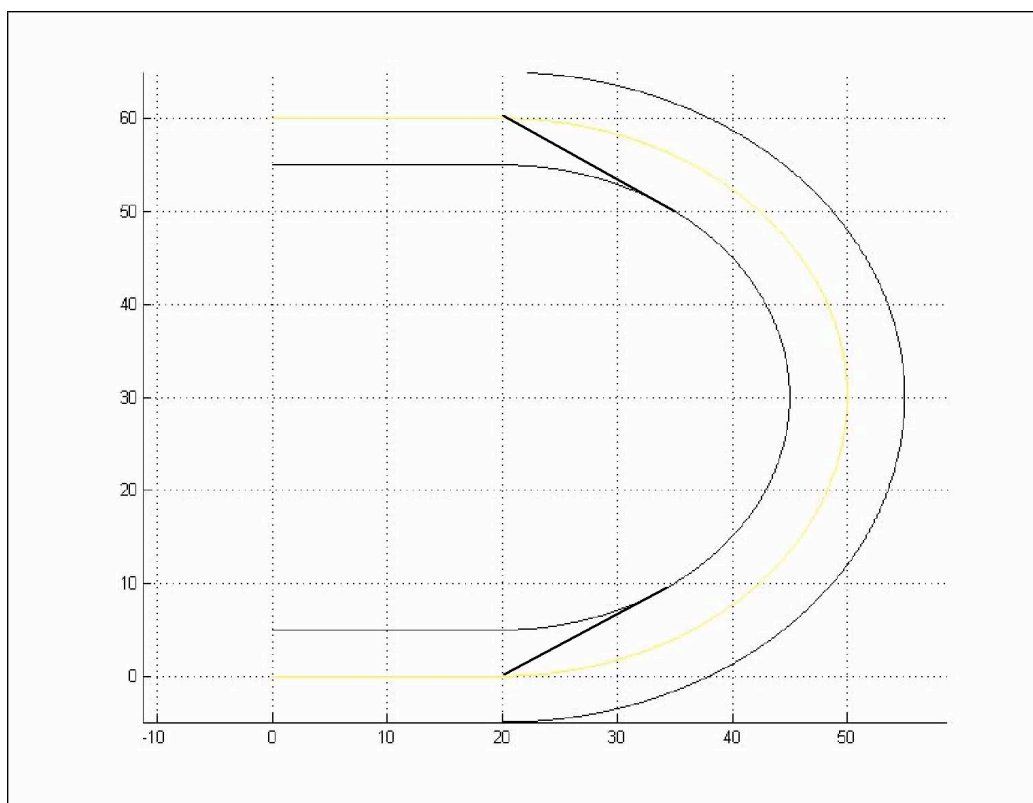


Figura 84: Condições iniciais de posição definidas.

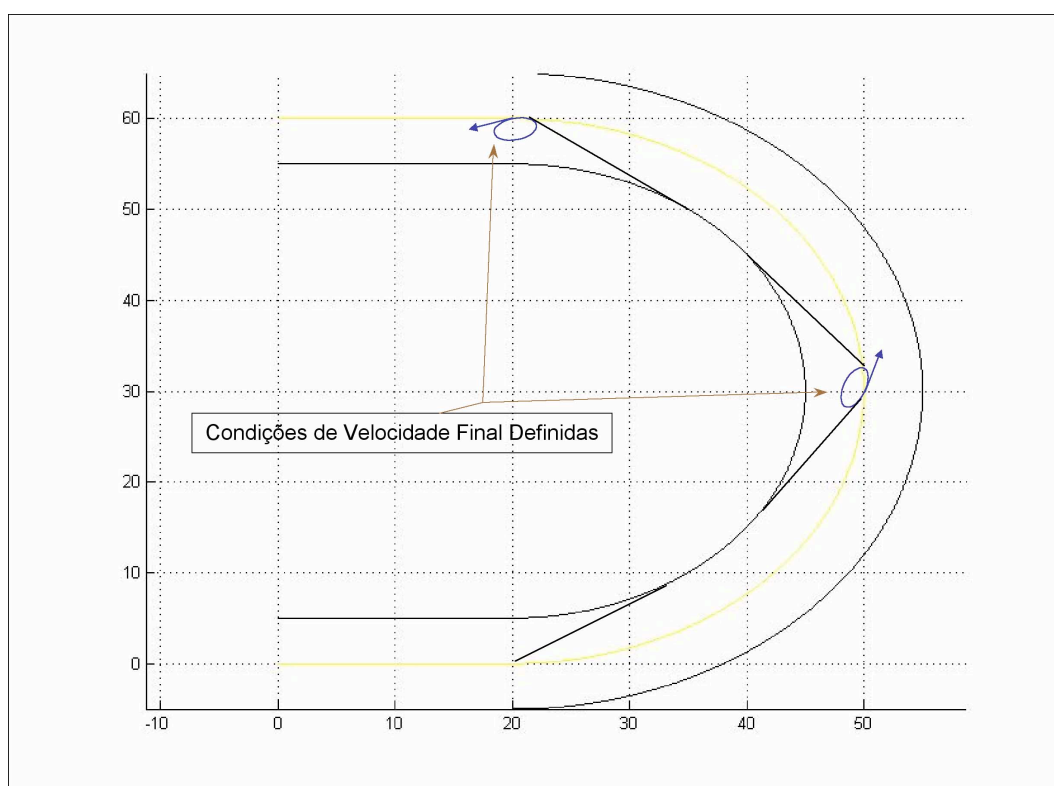


Figura 85: Condições Finais de Velocidade Definidas.

A Figura 84 e a Figura 85 mostram um caso de composição de trajetórias. Na Figura 84 pode-se ver o caso em que apenas a posição inicial e final são definidas, nesse caso o veículo percorre a curva e sai tangente a trajetória até o ponto final, pois o caminho mais rápido é o caminho mais curto. Na Figura 85 mostra-se o caso em que as velocidades finais são definidas também. Note que o veículo percorre a elipse definida pelas características do carro, e logo após busca o caminho mais curto que é a reta, como existe a restrição da borda da pista ele realiza a tangência como explicado anteriormente. Essa composição pode ser realizada com um ou mais trechos, desde que se conheça as condições finais de velocidade para cada um deles. O próximo passo é identificar quais são as possíveis condições de velocidade final para cada trecho e optar pela melhor delas, para realizar o caminho mais rápido, amarrando isso é possível descrever a trajetória que leva ao menor tempo de percurso para qualquer pista.

7.2. Tratar um Problema Real

Nesses casos tratados anteriormente, considerou-se a aceleração como sendo constante mas em uma situação real, provavelmente, pelo menos durante alguns instantes, ela é variável. Na realidade isso não muda a forma da solução, pelo contrário, permite que o veículo se aproxime cada vez mais da solução ideal que é a abordada no Caso 1.

Tendo a capacidade de desacelerar, o veículo pode, ao invés de percorrer a elipse do Caso 2, reduzir sua aceleração a zero e percorrer um arco de círculo, melhorando a solução.

O problema fica todo em cima da capacidade de desaceleração e aceleração do veículo. Essas características irão reger qual trajetória o veículo vai percorrer, mas o certo é que todas elas terão as mesmas formas apresentadas nesse trabalho.

Sendo assim surge mais uma variável de controle no sistema que será $a(t)$, a ser controlada de acordo com as condições iniciais e finais estabelecidas. É fácil perceber, voltando na solução do princípio do máximo que $\beta(t)$ vai depender de $a(t)$.

Diante do problema proposto foi possível estabelecer um caminho para a solução desejada, alcançada não só pelos meios matemáticos mas pelo conhecimento do problema em si, permitindo fazer considerações importantes para sua resolução.

É interessante observar que utilizando essa análise, pode-se propor uma trajetória ótima para um circuito fechado, basta que as velocidades iniciais e finais de cada trecho sejam definidas. O tratamento dado para um trecho de curva pode se estender a uma trajetória completa.

Vale ressaltar que o princípio do máximo (Bryson, 1981) nem sempre retorna a solução fechada, mas sim condições necessárias para que se encontre a solução ótima. Por isso a importância de conhecer o problema e de ter certa intuição sobre os resultados. De modo geral os resultados encontrados estão de acordo com o esperado e com o objetivo proposto.