

4

Modelo Linear de Quatro Graus de Liberdade

O modelo linear descrito em (Spinola, 2003) na forma de estado (11) representa um veículo de dois graus de liberdade: velocidade lateral em relação ao referencial embarcado no veículo e velocidade de *yaw*. O ângulo de *yaw* é obtido através da integração da velocidade de *yaw* e o deslocamento na direção Y do referencial global é obtido através da linearização da expressão que descreve essa variável, mostrada adiante.

Esse modelo assume linearizações nos pneus, ou seja, limita o ângulo de deriva dos pneus a pequenos ângulos, assim como linearizações na transferência do referencial local do veículo para o global, limitando o ângulo de *yaw* a pequenos valores. A Tabela descreve os parâmetros para um veículo de passeio de porte médio e as variáveis adotadas.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(C_f + C_r)}{m_{tot}u} & 0 & \frac{-2(aC_f - bC_r) - m_{tot}u^2}{m_{tot}u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2(aC_f - bC_r)}{I_{yaw}u} & 0 & \frac{-2(a^2C_f + b^2C_r)}{I_{yaw}u} & 0 \\ -1 & -u & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \theta \\ \omega \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m_{tot}} \\ 0 \\ \frac{2aC_f}{I_{yaw}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f \quad (11)$$

Símbolo	Descrição	Valor assumido
C_f, C_r	Rigidez lateral dos pneus dianteiros e traseiros.	20000 N/rad
m_{tot}	Massa total do veículo	1495 kg
u	Velocidade longitudinal.	X
a	Distância do C.G. ao eixo dianteiro.	1,203 m
b	Distância do C.G. ao eixo traseiro.	1,217 m
I_{yaw}	Momento de inércia de <i>yaw</i> .	2500 kgm ²
v	Velocidade lateral no referencial do veículo.	Variável de estado
θ	Ângulo de <i>yaw</i>	Variável de estado
ω	Velocidade de <i>yaw</i> .	Variável de estado
Y	Deslocamento do C.G. na direção Y	Variável de estado
δ_f	Ângulo de esterçamento das rodas.	Variável de controle

Tabela 3: Parâmetros e variáveis do modelo.

4.1. Malha de Controle com Transferência de Referencial Linear

A malha de controle da Figura 27 é composta de elementos lineares. Será avaliado o desempenho de controladores da família PID no controle do sistema escrito por (11). O objetivo do sistema é acompanhar uma trajetória pré-definida. O erro é obtido através da diferença entre a posição do C.G. do veículo e o centro da pista. Como em um primeiro momento está sendo considerada a velocidade longitudinal constante, a posição X do C.G. é calculada por uma simples integração da velocidade longitudinal (u). O detalhamento da malha pode ser visto pela Figura 28, Figura 29 e Figura 30.

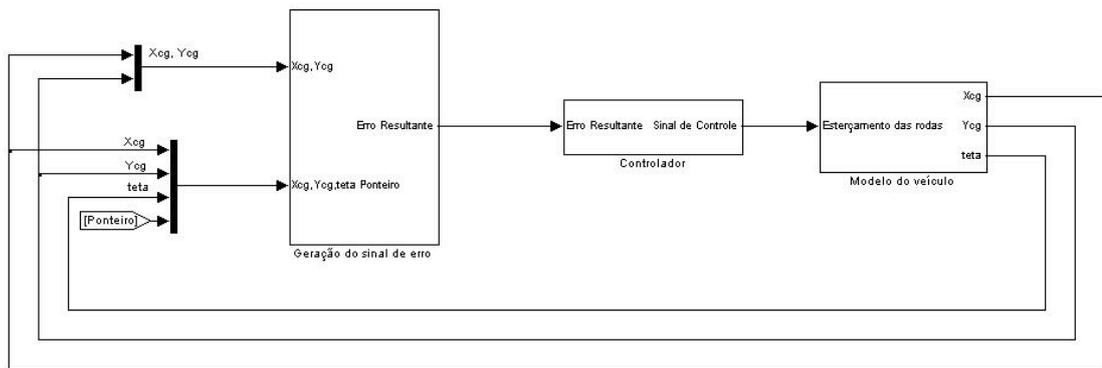


Figura 27: Implementação em simulink da malha de controle para o modelo linear.

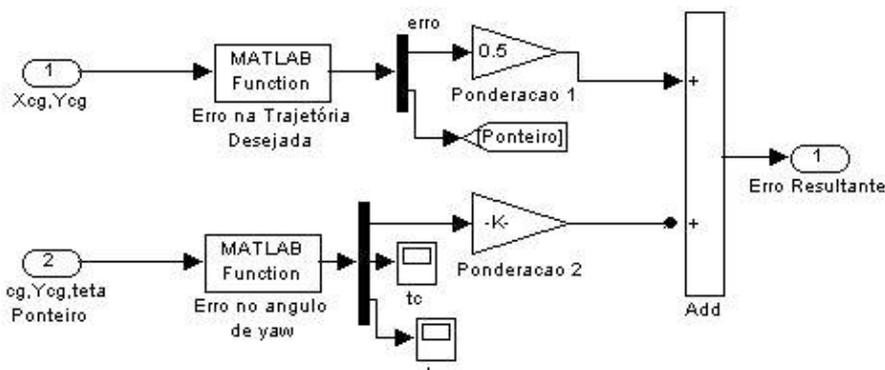


Figura 28: Implementação em *Simulink* da geração do sinal de erro.

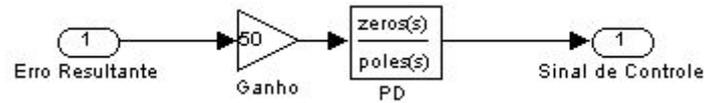


Figura 29: Implementação em *Simulink* do controlador.

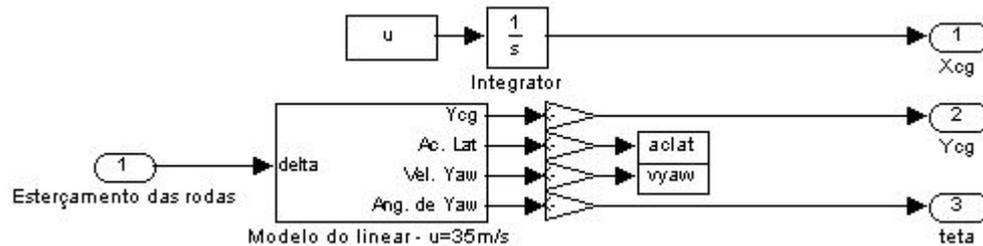


Figura 30: Modelo do veículo.

4.1.1. Função de Transferência do Modelo

Para facilitar a análise pelo lugar geométrico das raízes, escreve-se a seguir a malha da Figura 27 na forma de funções de transferência. Primeiramente considera-se o modelo de dois graus de liberdade sem a adição das variáveis θ e Y , dado por,

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2(C_f + C_r)}{m u} & \frac{-2(aC_f - bC_r) - m u^2}{m u} \\ \frac{-2(aC_f - bC_r)}{I_{yaw} u} & \frac{-2(a^2 C_f + b^2 C_r)}{I_{yaw} u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2C_f}{m} \\ \frac{2aC_f}{I_{yaw}} \end{bmatrix} \delta \quad (12)$$

Em seguida se deduz as funções de transferência de v em relação a δ e de ω em relação a δ , a partir de,

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \delta \quad (13)$$

ou,

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Av + B\omega + E\delta \\ \dot{\omega} &= Cv + D\omega + F\delta \end{aligned} \quad (14)$$

da primeira equação matricial tem-se no domínio de Laplace,

$$s.v(s) = A.v(s) + B.\omega(s) + E.\delta(s) \quad (15)$$

$$\frac{v(s).(s - A) - E.\delta(s)}{B} = \omega(s)$$

e da segunda equação:

$$\omega(s) = \frac{C.v(s) + F.\delta(s)}{s - D} \quad (16)$$

Igualando (15) e (16),

$$\frac{C.v(s) + F.\delta(s)}{s - D} = \frac{v(s).(s - A) - E.\delta(s)}{B}$$

$$\frac{v(s)}{\delta(s)} = \frac{B.F + E(s - D)}{(s - A)(s - D) - BC} = \frac{E.s + B.F - E.D}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \quad (17)$$

Da mesma forma encontra-se que:

$$\frac{\omega(s)}{\delta(s)} = \frac{E.C + F(s - A)}{(s - A)(s - D) - BC} = \frac{F.s + (C.E - F.A)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \quad (18)$$

4.1.2. Construção da Malha

Sabe-se que a projeção das velocidades do referencial local do veículo para o global é dada pelo seguinte par de equações:

$$\begin{cases} \dot{X} = u \cos \theta - v \cdot \text{sen} \theta \\ \dot{Y} = -u \text{sen} \theta - v \cdot \text{cos} \theta \end{cases} \quad (19)$$

Como a variável de controle é Y , usa-se apenas a segunda equação. Linearizando essa equação tem-se:

$$\dot{Y} = -u\theta - v \quad (20)$$

Assim o diagrama de blocos que representa a malha de controle envolvendo o modelo do veículo e o controlador é ilustrado na Figura 31,

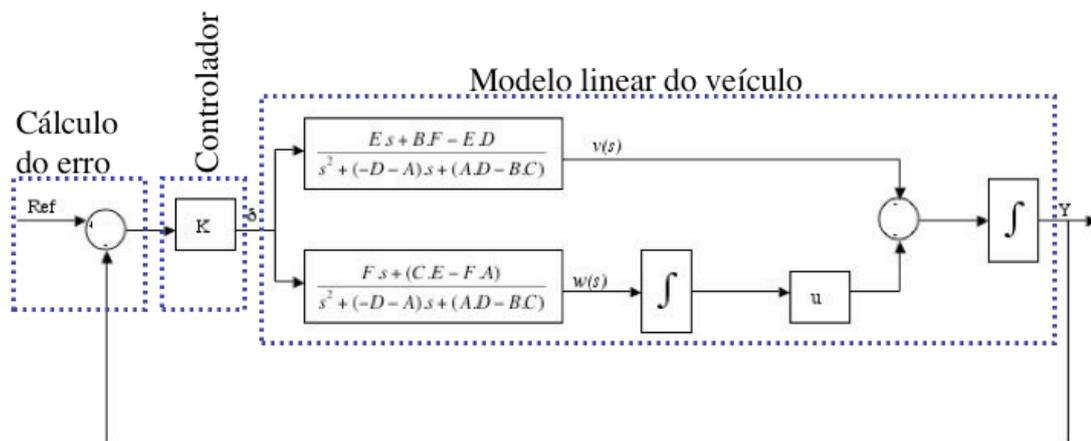


Figura 31: Malha de controle linear com as FT's.

A função de transferência que relaciona o ângulo de esterçamento da roda com o deslocamento global em Y é dada pelo desenvolvimento da seguinte expressão,

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \left(-H1 - \frac{H2}{s} \cdot u \right) \cdot \frac{1}{s}$$

onde,

H1 -> Função de transferência que relaciona $v(s)$ com δ .

H2 -> Função de transferência que relaciona $w(s)$ com δ .

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{E s + (B.F - E.D)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \cdot \frac{1}{s} - \frac{F s + (C.E - F.A)}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \cdot \frac{u}{s^2}$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{1}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \left[\frac{E s + (B.F - E.D)}{s} + \frac{F s + (C.E - F.A)}{s^2} \cdot u \right]$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = -\frac{1}{s^2 + (-D - A)s + (A.D - B.C)} \left[\frac{E s^2 + (B.F - E.D + F.u)s + (CE - FA).u}{s^2} \right]$$

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \frac{E s^2 + (B.F - E.D + F.u)s + (CE - FA).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2}$$

De modo a fazer com que o ângulo de *yaw* seja positivo quando δ crescer (a fim de simplificar a análise do sistema), a saída do sistema é multiplicada por -1 . Isso está implícito na malha da Figura 27, pois essa multiplicação está sendo feita na matriz de estado C. Sendo assim tem-se:

$$\frac{Y(s)}{\delta(s)} = \frac{-E s^2 - (B.F - E.D + F.u)s - (CE - FA).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2} \quad (21)$$

Substituindo os valores da Tabela 1 encontra-se os pólos e zeros da função de transferência, e em seguida, de modo a possibilitar a escolha de pólos para a malha fechada e conseqüente ajuste do controlador, é traçado o Lugar

Geométrico das Raízes para duas velocidades distintas do veículo, 10 m/s e 20 m/s.

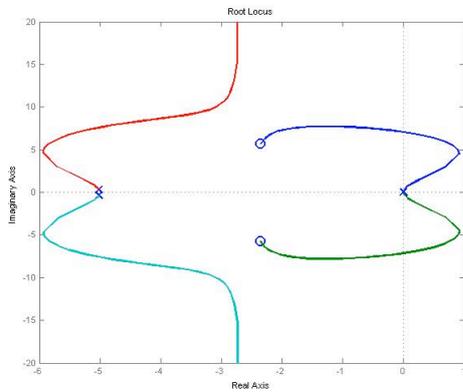


Figura 32: Lugar geométrico das raízes para $u=10\text{m/s}$

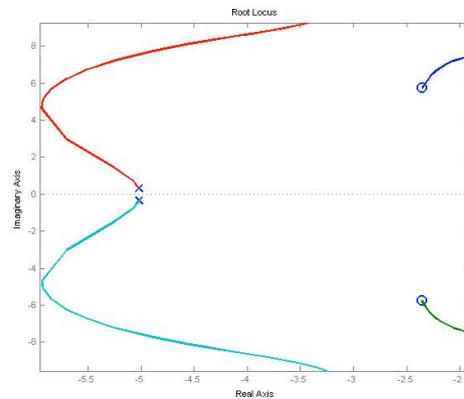


Figura 33: Lugar geométrico das raízes para $u=10\text{m/s}$ - Vista Ampliada.

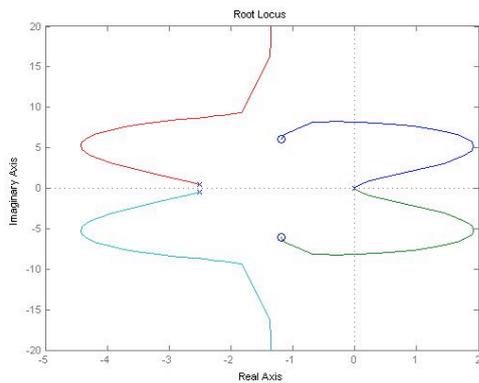


Figura 34: Lugar geométrico das raízes para $u=20\text{m/s}$.

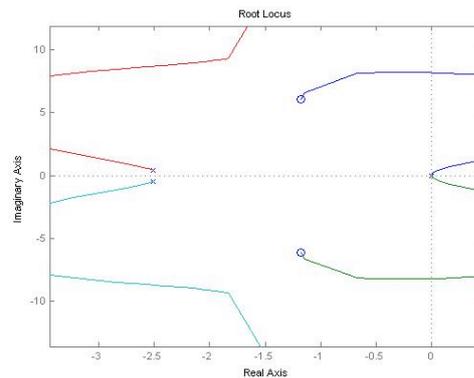


Figura35: Lugar geométrico das raízes para $u=20\text{m/s}$ - Vista Ampliada.

Quando a velocidade é baixa, no caso 10 m/s (Figura 32 e Figura 33), o sistema apresenta uma faixa de instabilidade, mas com o ajuste correto do ganho ele retorna para a região de estabilidade. Nesse caso o ganho mínimo para haver estabilidade é 4,03. É possível notar que o sistema sempre terá um comportamento oscilatório, ao passo que sempre existirão pólos complexos conjugados, independente do ajuste do ganho. Comparando com o caso de $u=20\text{m/s}$ (Figura 34, Figura 35) percebe-se que quando se aumenta a velocidade a faixa de instabilidade aumenta e para maiores velocidades a dinâmica do sistema se torna

mais lenta, ou seja, sistema demora mais tempo para responder á excitações de entrada.

4.1.3. Simulações Para um Controlador Proporcional

Em seguida mostra-se duas simulações que comprovam a análise anterior. O ganho do controlador foi fixado inicialmente em 10.

Como se pode ver pela Figura 36 o sistema é estável , o veículo acompanha a trajetória e o erro (Figura 37) tende a zero de maneira um pouco oscilatória, como era de se esperar pela análise do lugar geométrico das raízes. O valor máximo do sinal de esterçamento não ultrapassa o limite físico de 45 graus. A aceleração lateral também se mantém dentro de limites coerentes para o veículo em questão.

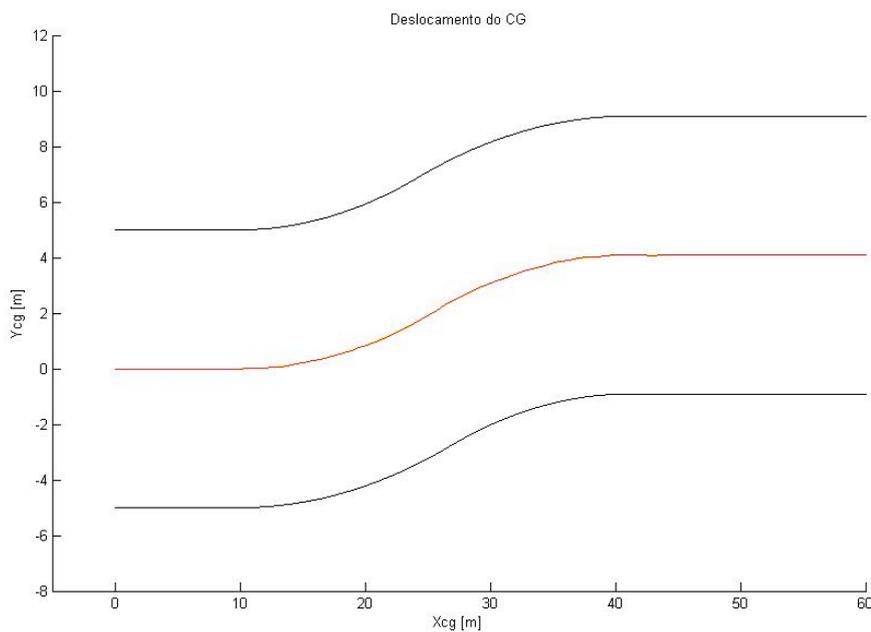


Figura 36: Deslocamento do CG - $u = 10\text{m/s}$ - $P=10$.

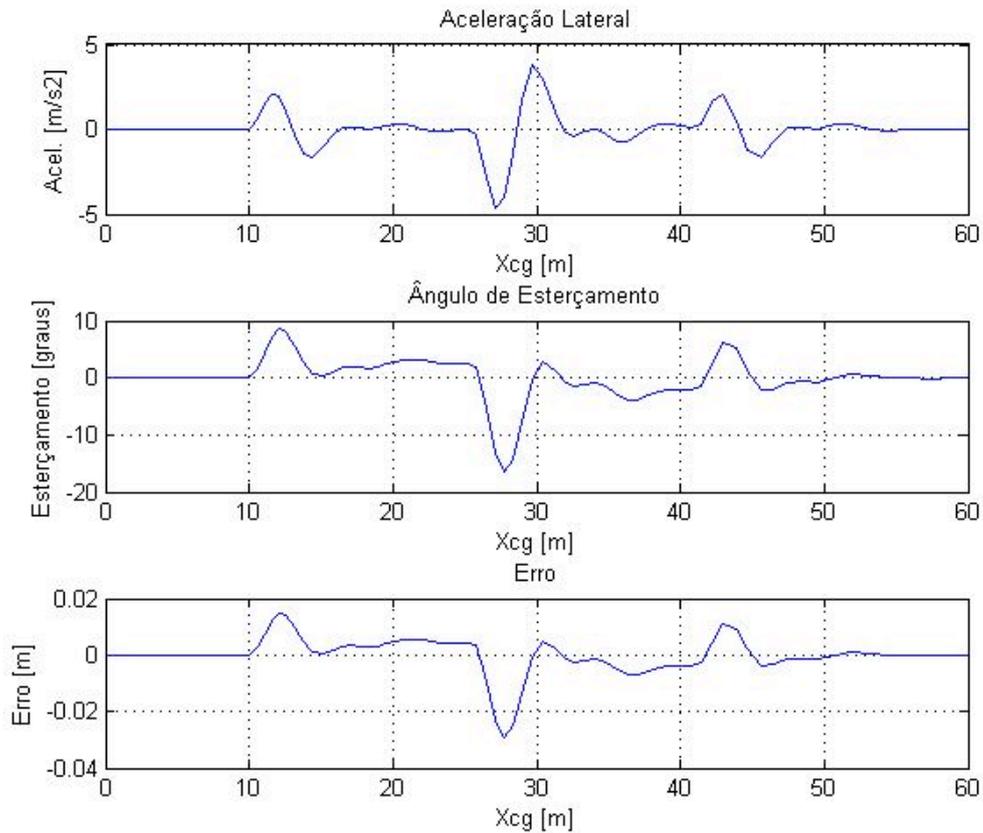


Figura 37: Variáveis de estado - $u=10m/s$ - $P=10$.

Pode-se perceber que quando a velocidade é maior (Figura 38), o comportamento do veículo é diferente, a precisão com que ele segue a trajetória não é a mesma: o erro é bem maior e o ângulo de esterçamento (Figura 39) é muito superior, além de seu comportamento não ser representativo, ao passo que é muito abrupto e passa do limite de 45 graus. Percebe-se também que a aceleração lateral atinge níveis absurdos para um carro de passeio. Concluí-se daí que um controlador puramente proporcional faz com que o veículo percorra uma dada trajetória aparentemente bem, mas o perfil do sinal de controle ainda está longe do desejável.

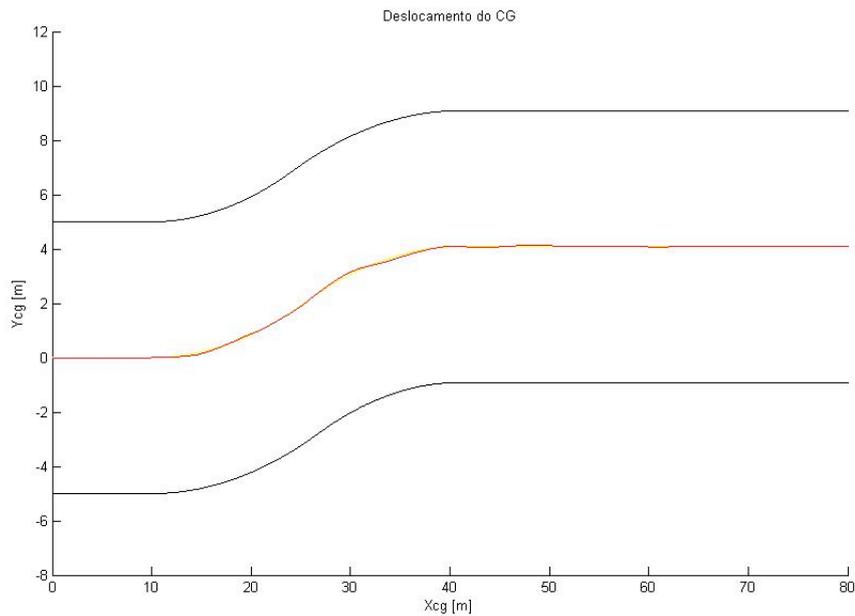


Figura 38: Deslocamento do CG - $u = 20\text{m/s}$ - $P=10$.

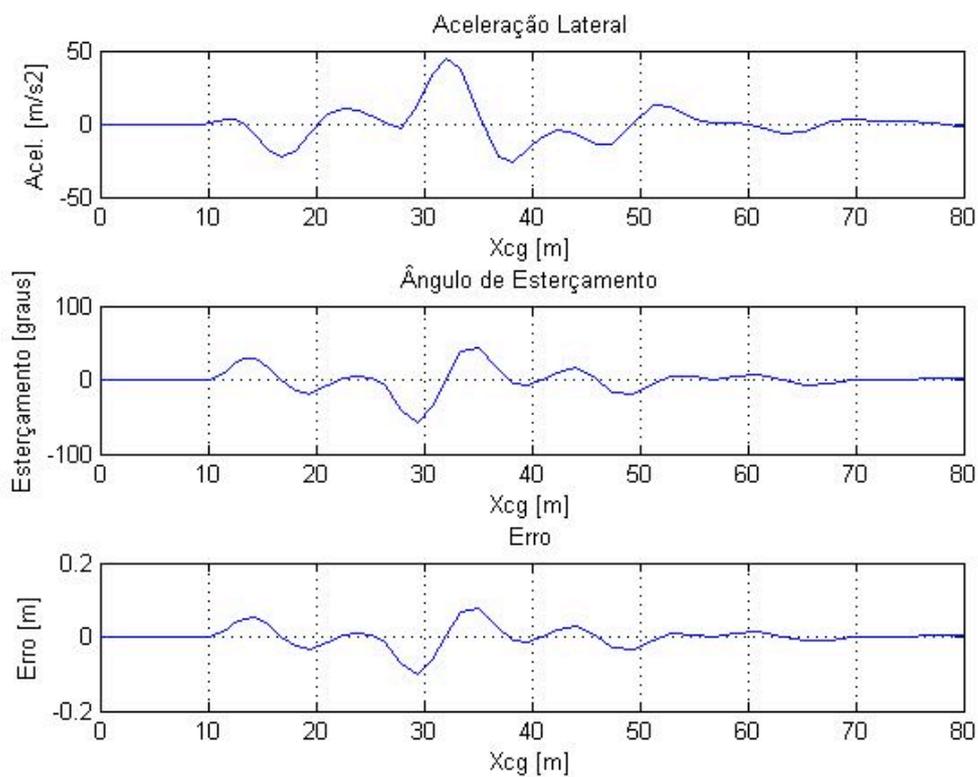


Figura 39: Variáveis de estado - $u=20\text{m/s}$ - $P=10$.

4.1.4. Controlador Proporcional Derivativo Duplo

Percebe-se no caso anterior que um ganho proporcional ao erro não é suficiente para resolver o problema com velocidades maiores. Como solução é proposto um controlador que tenha um termo derivativo de modo a inserir zeros no sistema. O objetivo de inserir zeros no sistema era de conseguir trazer pelo menos um par de pólos complexos conjugados para o eixo real, diminuindo assim a oscilação. Percebeu-se que com o PD isso não seria possível, pois se tinha dois pólos do sistema na origem, sendo assim optou-se pelo chamado PDD, onde se introduz 2 zeros. Para que esse controlador seja realizável, deve-se também adicionar novos pólo, que para não influenciar a dinâmica em questão foram alocados em -15 e -16 . A posição dos zeros foi arbitrada em -1 após alguns testes de sensibilidade, observando-se o comportamento do esterçamento. O controlador é escrito da seguinte forma:

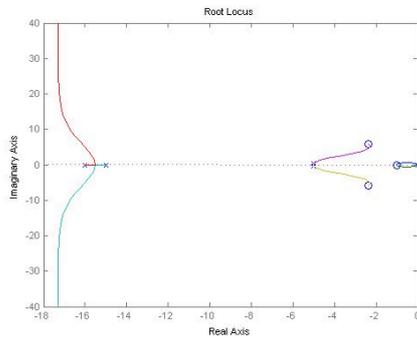
$$C(s) = K_p \cdot \frac{(s+1)(s+1)}{(s+15)(s+16)} \quad (22)$$

Dessa forma o sistema de malha aberta pode ser escrito como:

$$FTMA = \frac{(s+1)(s+1)}{(s+15)(s+16)} \cdot \frac{-E s^2 - (B.F - E.D + F.u)s - (CE - FA).u}{s^4 + (-D - A)s^3 + (A.D - B.C)s^2} \quad (23)$$

Da mesma forma que no caso anterior foi traçado o lugar geométrico das raízes para o sistema em questão, descrito na Figura 40 e Figura 41.

$u=10\text{ m/s}$



$u=20\text{ m/s}$

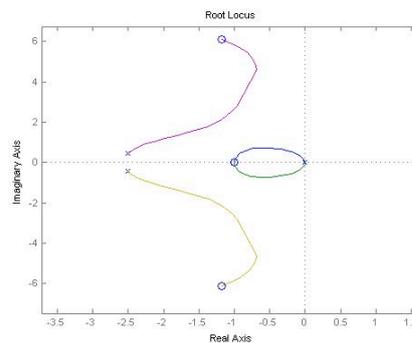
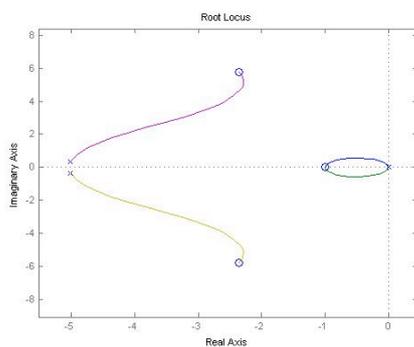
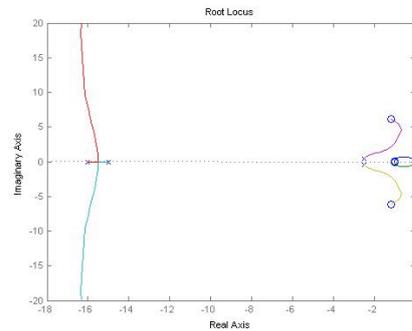


Figura 40: Lugar geométrico das raízes para $u=10\text{ m/s}$.

Figura 41: Lugar geométrico das raízes para $u=20\text{ m/s}$.

Pode-se ver que para ambos os casos o sistema é estável e da mesma forma que para o controle proporcional, o sistema com velocidade maior apresenta uma dinâmica mais lenta. É interessante ressaltar que a região de instabilidade não existe mais, pois os pólos não mais se deslocam para o semi plano positivo como no caso do controlador proporcional. É possível também, dependendo do ajuste do ganho, posicionar o par de pólos mais significativo sobre o eixo real. Nota-se que para a velocidade de 20 m/s , dependendo do ajuste do ganho, os pólos dominantes passam a ser os que possuem parte imaginária maior, essa inversão ou cruzamento não acontece para velocidades baixas. Analisa-se a seguir as mesmas simulações feitas para o controlador proporcional.

Nota-se pela Figura 42 que o controlador proporcional derivativo leva o sinal de controle, que era um problema no caso anterior, à um perfil mais ameno (sem grandes oscilações), fazendo com que o ângulo de esterçamento (Figura 43) não ultrapasse os 45 graus. A aceleração lateral também se encontra dentro de valores reais, não ultrapassando 10 m/s^2 .

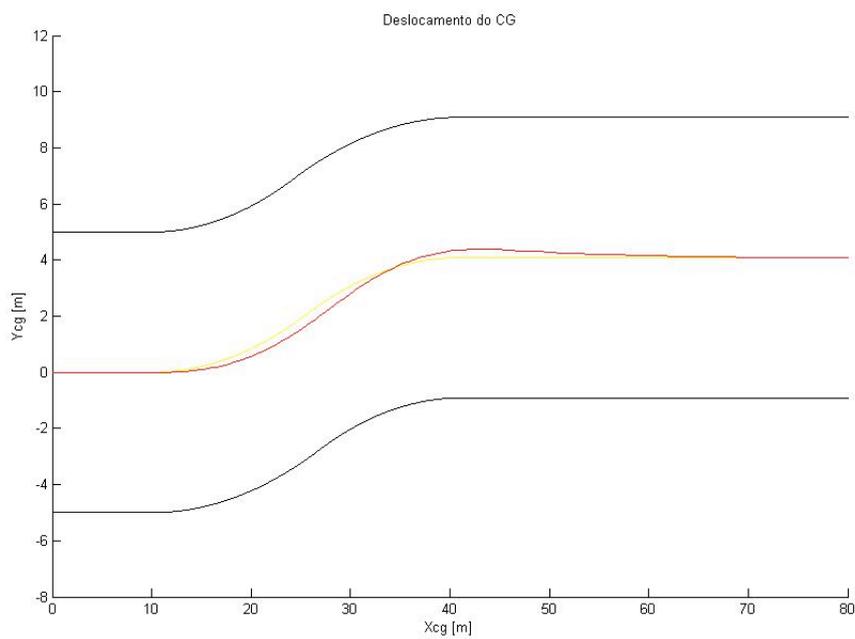


Figura 42: Deslocamento do CG - $u=10\text{m/s}$ - PDD=10.

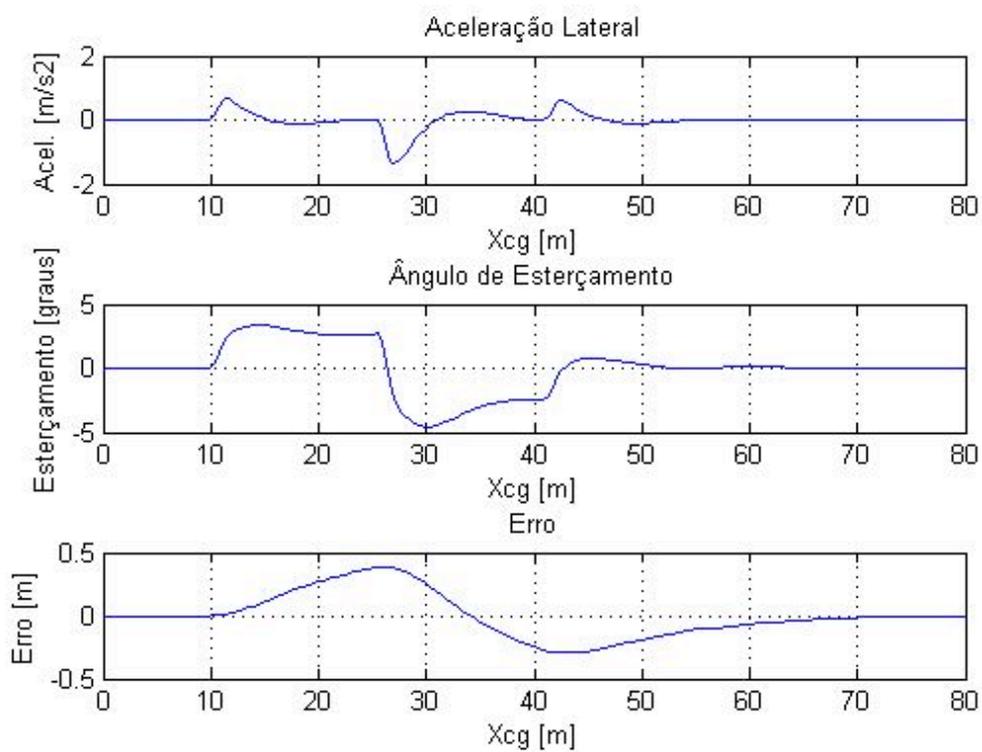


Figura 43: Variáveis de estado - $u=10\text{m/s}$ - PDD=10.

Quando a velocidade é maior, o erro conseqüentemente aumenta (Figura 45) assim como o esterçamento. A aceleração lateral já não é tão representativa ao passo que chega próxima de 20m/s^2 , o que é muito para um carro de passeio. Pode-se perceber também um perfil mais oscilatório da solução (Figura 44). Ganhos menores levariam a erros maiores, mas conseqüentemente a acelerações laterais menores também.

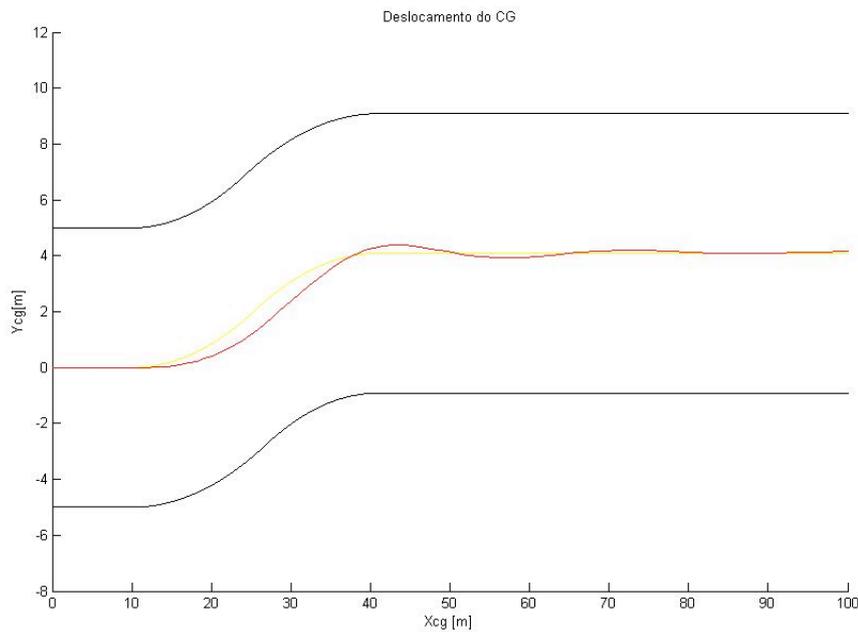


Figura 44: Deslocamento do CG - $u = 20\text{m/s}$ - PDD=10.

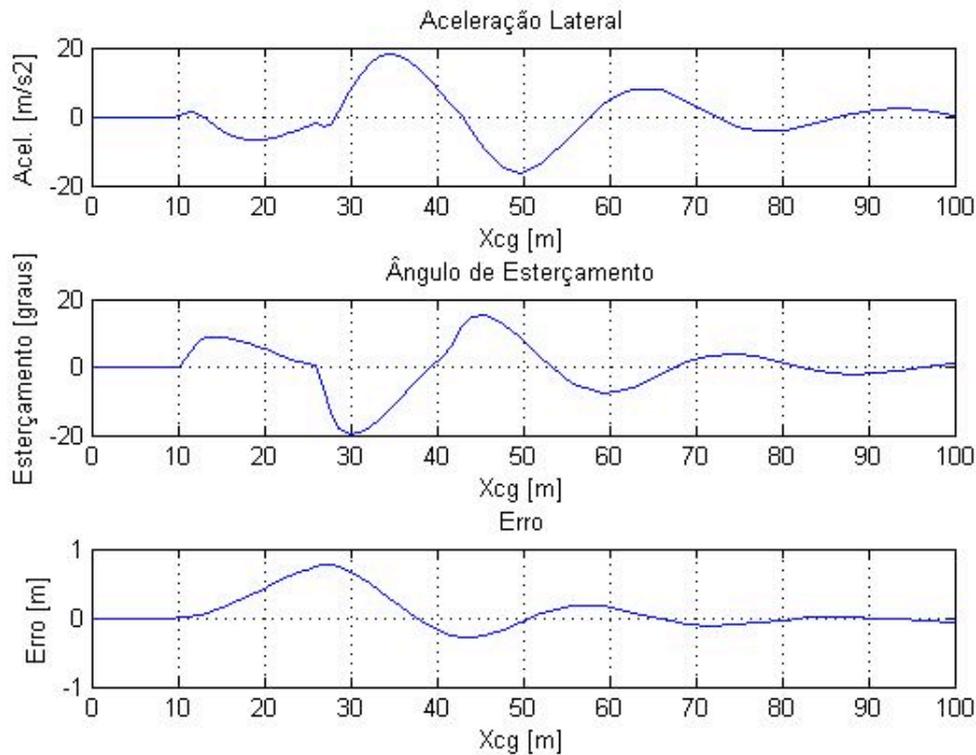


Figura 45: Variáveis de estado - $u=20\text{m/s}$ - $\text{PDD}=10$.

A conclusão mais importante que se tira dessas simulações é o fato de que o controlador PDD faz com que o ângulo de esterçamento tenha um perfil mais suave e fique dentro da faixa limite de 45 graus com o ajuste correto do ganho. O resultado, comparativamente, é um pouco pior, ou seja, para um mesmo ajuste de ganho, o controlador proporcional apresenta menos erro, mas mesmo assim o veículo se mantém na pista e seu erro vai a zero depois da manobra. Como o esterçamento está dentro do aceitável pode-se ainda aumentar o ganho para se obter um melhor resultado.

Outro ponto a se destacar é o fato que para a velocidade de 10 m/s, pode-se usar ganhos maiores sem aumentar demasiadamente a oscilação do sistema, isso pode ser explicado pelo Lugar Geométrico das Raízes, pois os pólos mais significativos tendem para o eixo real a medida que se aumenta o ganho.

Pode-se concluir que o controlador proposto leva o sistema a estabilidade e faz com que ele rastreie a trajetória desejada, além de manter o ângulo de esterçamento dentro da faixa admissível.

O perfil menos oscilatório do esterçamento é mais coerente com a ação de um ser humano ao volante, o que levanta a questão da representatividade do ser humano por um controlador. Projetar um controlador que represente o comportamento do ser humano ao volante não é o escopo desse trabalho, mas ele representa um primeiro passo para o estudo de tais controladores.

4.2. Transferência de Referencial Não Linear

A objetivo dessa seção é avaliar o controlador projetado anteriormente em uma malha de controle que apresenta elementos não lineares, nesse caso a mudança está na troca de referencial. A malha proposta a seguir não apresenta a linearização da transferência de coordenadas, ou seja aparecem senos e co-senos. Agora o sistema não possui mais as restrições de ângulos de *yaw* pequenos.

Considera-se o controlador proporcional derivativo duplo projetado anteriormente com o ganho ajustado em 10. A trajetória varia e possui ângulos de *yaw* superiores a 20 graus, para que o modelo trabalhe em sua faixa não linear.

Nessa primeira análise a velocidade é de 20m/s. Pode-se ver na Figura 46 que o resultado é bom (se mantendo dentro da pista) apesar do erro no rastreamento da trajetória. O ângulo de esterçamento está dentro de seus limites apesar de um perfil um pouco oscilatório, e o veículo percorre toda a trajetória desejada. A aceleração lateral também se encontra coerente com o veículo considerado.

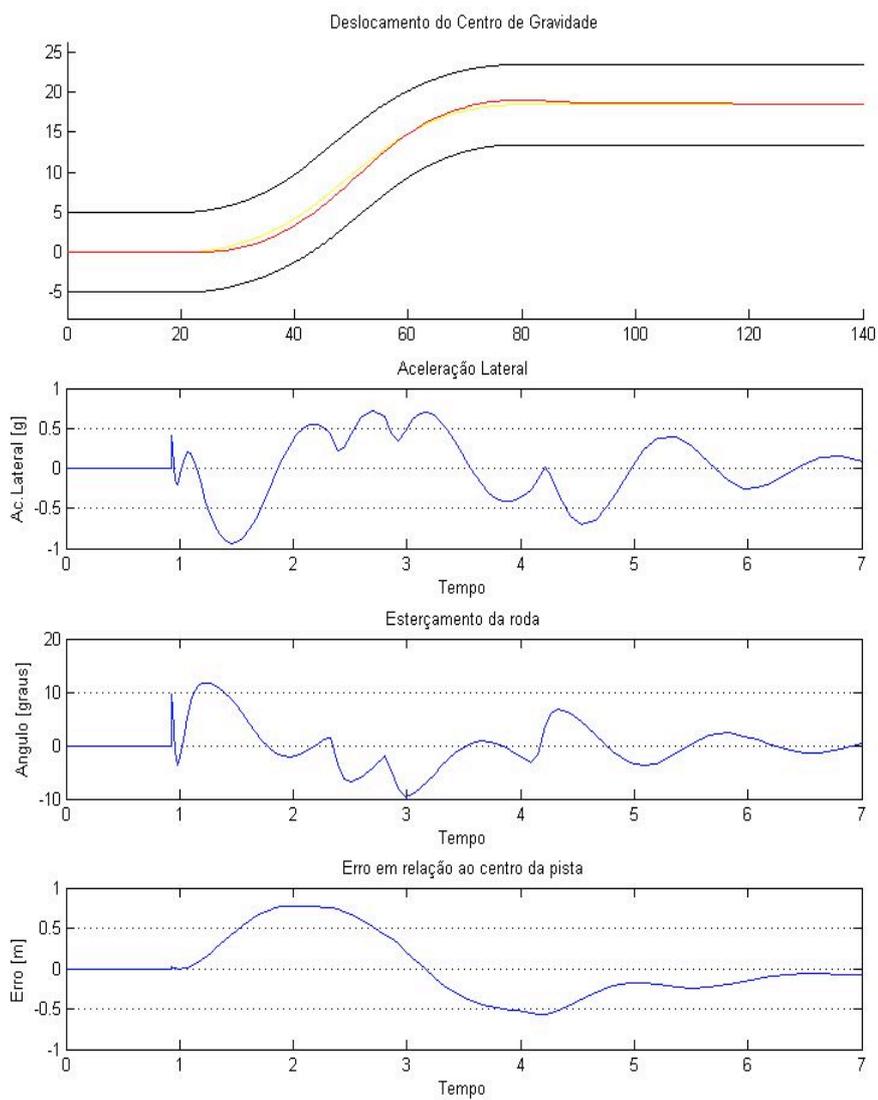


Figura 46: Troca de pista - $u = 20\text{m/s}$ - $\text{PDD} = 10$ - Malha não linear.

A trajetória da Figura 47 é uma curva em U. A velocidade é 20m/s. Pode-se ver que apesar de um erro perceptível e de um transiente que aparece, o veículo percorre a trajetória sem sair da pista, o ângulo de esterçamento se manteve limitado, salvo o transiente, mas a aceleração lateral atingiu valores muito altos.

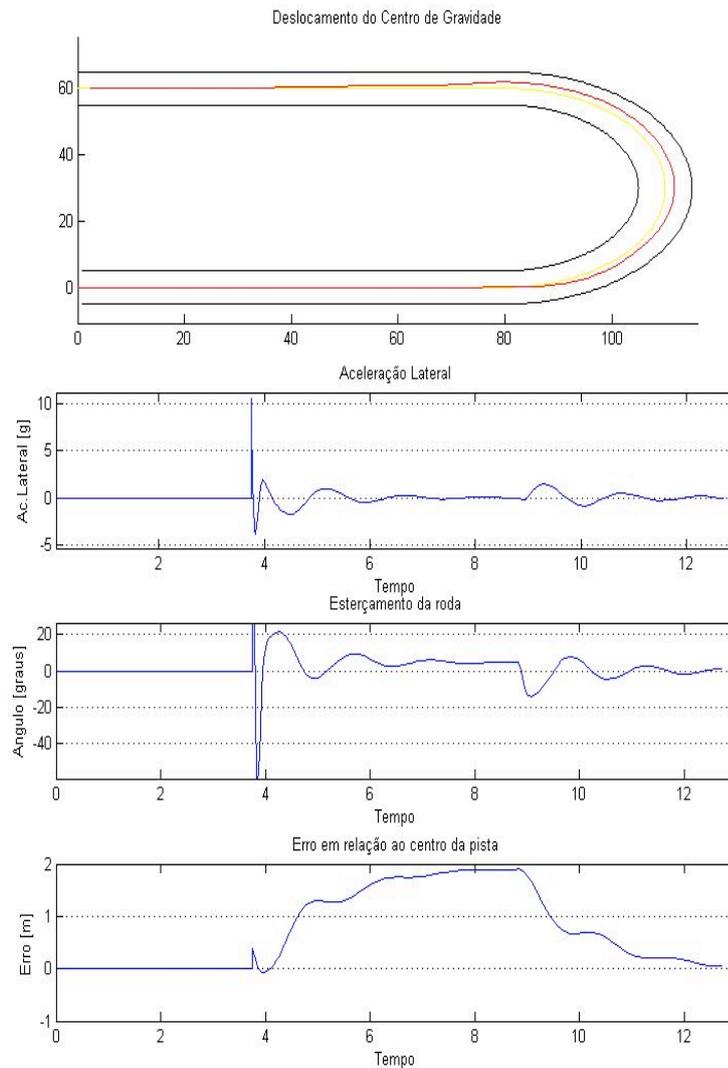


Figura 47: Curva de 180 graus - $u = 20\text{m/s}$ - PD = 10 - Malha não linear.

Na Figura 48 se tem uma trajetória em espiral e a velocidade é de 20m/s também, mais uma vez o veículo percorre a trajetória sem ultrapassar seus limites laterais, o esterçamento permanece limitado na faixa de 45 graus e a aceleração lateral apresenta valores altos para esse tipo de veículo.

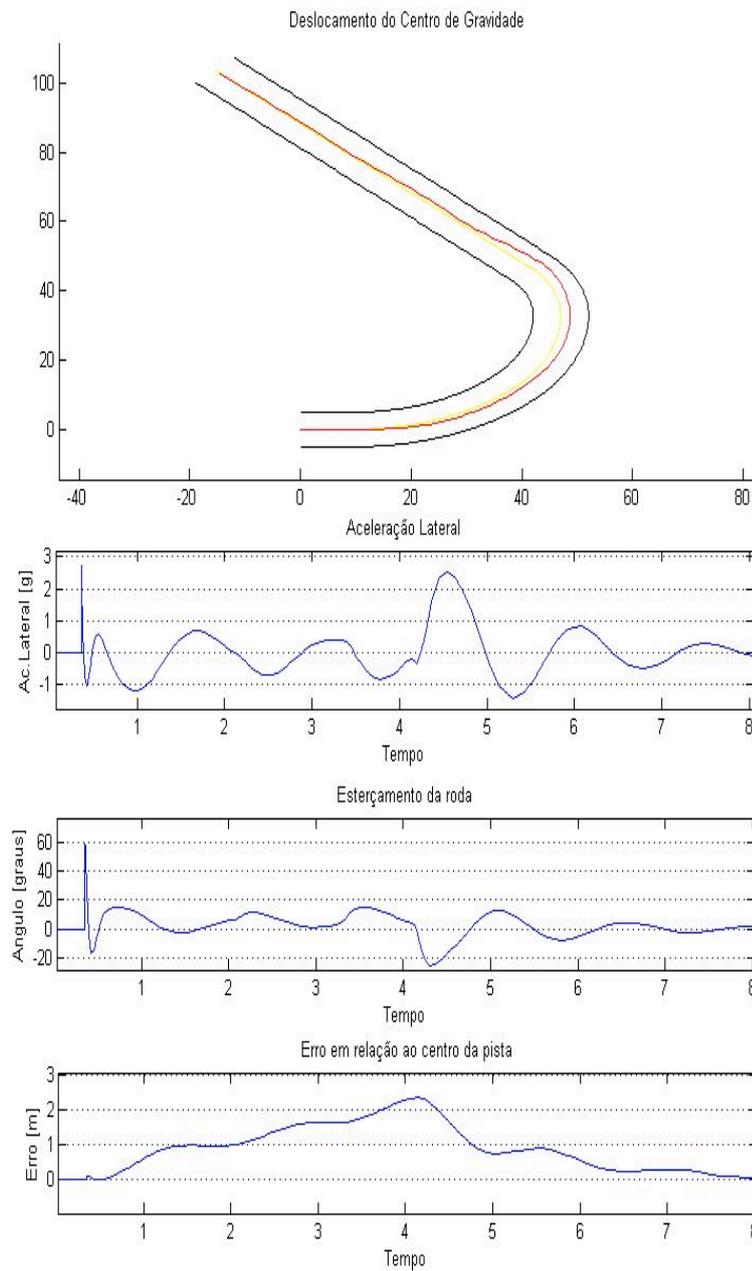


Figura 48: Espiral - $u = 20\text{m/s}$ - PDD = 10 - Malha não linear.

Na Figura 49 pode-se ver um circuito oval, a velocidade é novamente de 20m/s. Nesse caso é interessante notar que o ângulo de esterçamento tende para uma constante após um transiente oscilatório. Esse resultado era o esperado, uma vez que o circuito era um círculo de raio 50 metros. Tanto a aceleração lateral quanto o esterçamento estão dentro do limite aceitável.

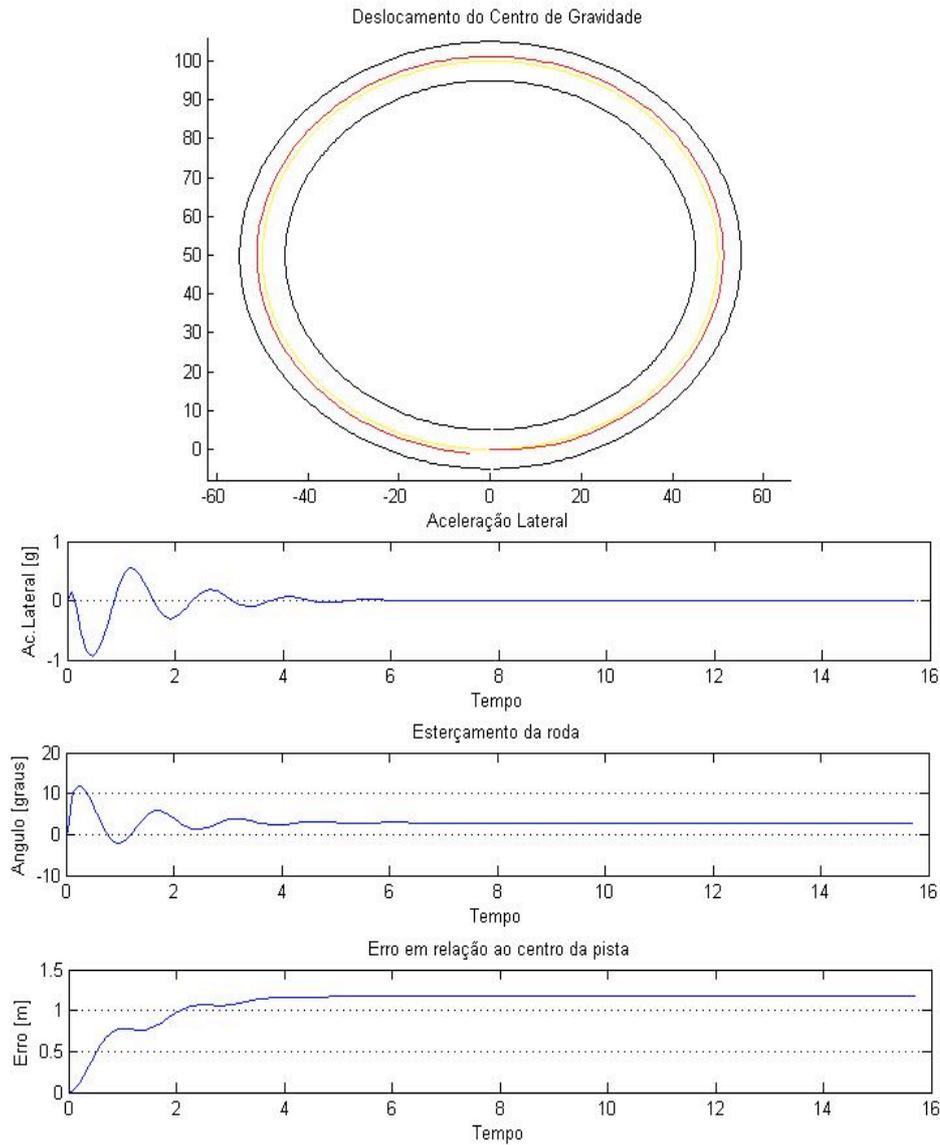


Figura 49: Círculo - $u = 20\text{m/s}$ - PDD = 10 - Malha não linear.

A Figura 50 mostra o resultado para a mesma trajetória mas com ganho do controlador igual a 100. O erro conseqüentemente diminuiu, e ainda assim o esterçamento e a aceleração lateral continuaram dentro dos limites aceitáveis. Como o objetivo não é projetar o melhor controlador, não foram estudados outros ajustes de ganhos, próximos trabalhos podem estudar a sensibilidade entre o ganho e as diferentes variáveis do sistema.

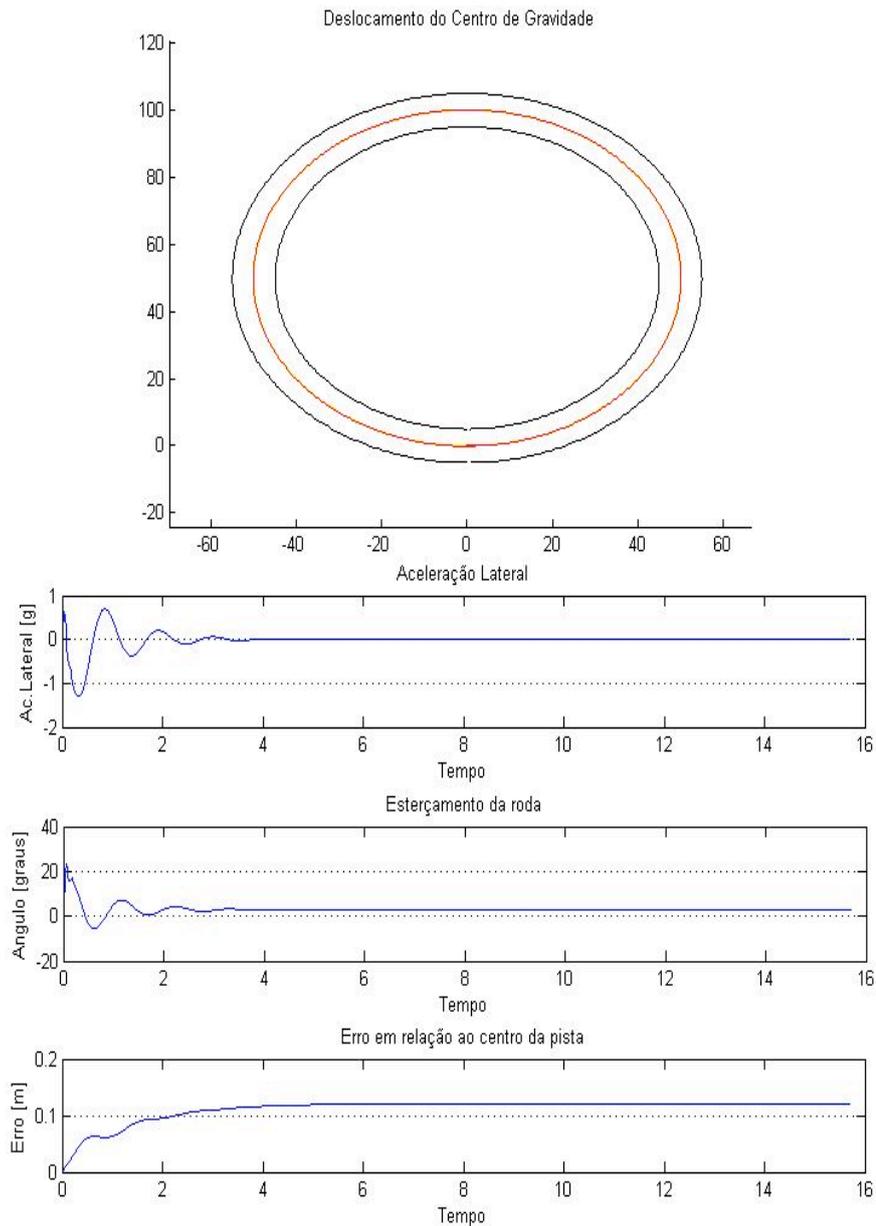


Figura 50: Círculo - $u = 20\text{m/s}$ - PDD = 100 - Malha não linear.