

Como mostrado neste trabalho, além dos métodos de integração numérica, alguns métodos aproximados tais como o HBM e os métodos de perturbação permitem resolver problemas de valor inicial associados a equações diferenciais não-lineares, estes últimos tendo a vantagem de fornecer uma solução analítica.

A maior parte da literatura de sistemas dinâmicos não-lineares trata de equações com não-linearidades polinomiais, em particular, sistemas com não-linearidades quadráticas ou cúbicas, (Nayfeh (1979), [24]). Assim, a maior parte dos métodos aproximados são desenvolvidos tendo em mente estes tipos de não-linearidades. Entretanto, um crescente número de pesquisas nos últimos anos tem sido dedicado ao estudo de sistemas com outros tipos de não-linearidade, de forma destacada para problemas com não-linearidades fracionárias, que foram analisados por métodos numéricos, métodos de perturbação e HBM, entre outras técnicas.

Em uma série de artigos, Mickens ([57], [58], [89]) estudou vários exemplos de equações diferenciais com não-linearidades fracionárias. Em particular osciladores envolvendo um único termo não-linear do tipo

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/(2n+1)} = 0$$

onde n é um inteiro positivo e a sgn é a função definida como

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(x) &= \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0 \\ \operatorname{sgn}(x) &= 0, \quad x = 0\end{aligned}$$

Este tipo de oscilador também foi estudado recentemente por Swamy et al (2003), [64], van Horssen (2003), [90], e Awrejcewicz e Andrianov (2003), [91], que deram atenção especial ao caso limite

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$$

que ocorre quando $n \rightarrow \infty$. Uma solução exata para este problema foi obtida

por Lipscom e Mickens (1994), [92], Philipchuk (1999), [93] e Potti et al (1999), [94], entre outros.

Hu e Xiong (2003), [95] analisaram um oscilador cujo potencial tem a forma

$$V(x) = V_0 x^{(2m+2)/(2n+1)}$$

Gottlieb (2003), [1], estudou osciladores com um único termo não-linear. Além do caso acima, ele considerou a não-linearidade como uma potência fracionária mais geral. Para vários casos particulares ele obteve a expressão exata para a frequência da resposta em termos de funções Beta e Gama, e soluções aproximadas com o HBM e comparou a aplicabilidade dos dois tipos de soluções.

Recentemente, Hu (2006), [96], estudou a solução de um oscilador com não-linearidade fracionária por um método iterativo e Ramos (2007), [97], investigou a mesma classe de problemas usando um método denominado “piecewise-linearized” baseado em expansões em série de Taylor da equação diferencial não-linear. Entretanto, nestas referências, várias manipulações algébricas são necessárias para resolver cada problema particular.

No capítulo anterior, dois métodos simples e eficientes foram apresentados. Embora possam apresentar algumas desvantagens em relação ao HBM, por exemplo, eles não se limitam apenas aos casos em que a não-linearidade é polinomial, mas permitem resolver problemas com não-linearidades fracionárias ou de qualquer outro tipo, sem a necessidade de alterar suas metodologias, como será mostrado a seguir com alguns exemplos.

7.1

Sistema dinâmico com não-linearidade fracionária

Seja a seguinte equação,

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x)|x|^q = 0 \quad (7-1)$$

onde q pode assumir qualquer valor real.

O termo $\operatorname{sgn}(x)$ em (7-1) faz com que a resposta se comporte qualitativamente igual às respostas de problemas com não-linearidade polinomial ímpar, mesmo quando q for par, como mostra a figura 7.1, que exhibe a função $\operatorname{sgn}(x)|x|^q$ para diferentes valores de q .

A energia potencial do problema (7-1) é exibida na figura 7.2, para diferentes valores de q .

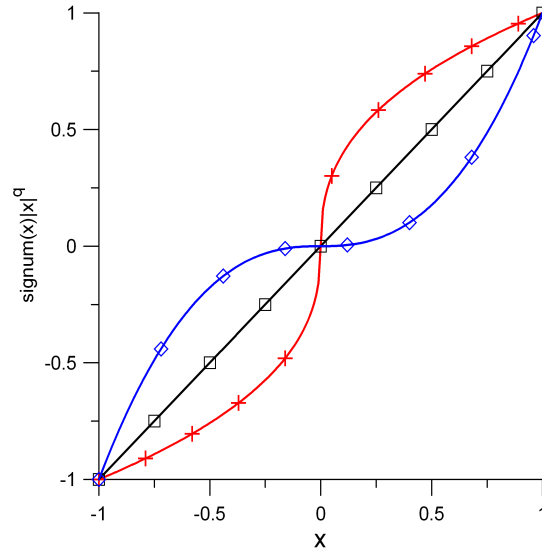


Figura 7.1: Simetria no campo de deslocamentos. $\square$, $q = 1$; $+$, $q < 1$; $\diamond$ $q > 1$.

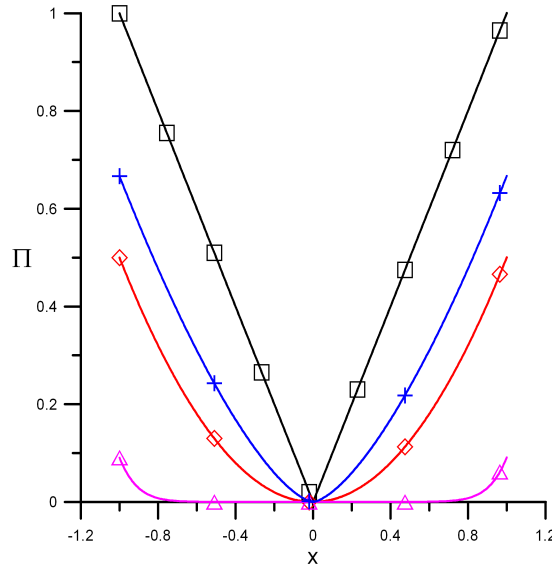


Figura 7.2: Energia potencial. $\square$, $q = 0$; $+$, $q = 0,5$; $\diamond$, $q = 1$; $\triangle$, $q = 10$.

O seguinte problema com não-linearidade fracionária foi analisado por Gottlieb (2003), [1].

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} = 0 \quad (7-2)$$

Escrevendo a solução aproximada de (7-2) em série de Taylor, têm-se,

$$x(t) = x(t_0) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_0} (t - t_0)^3 + \dots \quad (7-3)$$

e utilizando como centro da série o instante inicial, tem-se para (7-3)

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dt} |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} t^3 + \dots \quad (7-4)$$

Ao se utilizar a propriedade de simetria do problema ($x(T/4) = 0$), as raízes da equação resultante correspondem a um quarto de período e permitem obter a frequência da solução ao considerar que $T = 2\pi/\omega$.

Com uma aproximação para os deslocamentos contendo termos em t até a potência 2 em (7-4) e considerando como condições iniciais um deslocamento x_0 e uma velocidade nula, obtém-se para a frequência ω ,

$$\omega = \frac{\pi}{4x_0} \sqrt{2|x_0|^{1+\frac{\alpha}{\beta}}} \quad (7-5)$$

Considerando os termos até t^3 em (7-4) obtém-se,

$$\omega = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\sqrt[3]{6a}}{x_0} + \frac{6^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}} |x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \quad (7-6)$$

sendo

$$a = x_0^2 |x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{-6 \frac{|x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x_0}}$$

Gottlieb, [1], comparou a sua aproximação de primeira ordem com a aproximação de primeira ordem proposta por Mickens (2001), [57], para diversos valores de α e β utilizando como condição inicial $x_0 = 1$. Para $x_0 = 1$, (7-5) fornece sempre como resultado $\omega = \pi/(2\sqrt{2}) \cong 1,11$

Na tabela 7.1 comparam-se os resultados obtidos para ω com a solução aproximada escrita em série de Taylor e os resultados apresentados por Gottlieb, [1], para diversos valores de α e β . Na terceira e quarta colunas tem-se, respectivamente para a frequência ω , os resultados exatos e aproximados apresentados por Gottlieb. Em sua aproximação, ele utilizou o HBM com uma solução de primeira ordem. Os resultados aproximados obtidos por Gottlieb são mais precisos que os obtidos por Mickens, [57], com o HBM após manipular a equação, de forma a tornar a não-linearidade uma potência inteira. Já nas demais colunas, tem-se as frequências ω_i obtidas com o método de Taylor onde o índice i indica o número de termos utilizados na aproximação.

Para $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $v_0 = 0$ e assumindo que x_0 seja sempre dado por um valor positivo, se obtém, a partir de (7-4), a seguinte relação frequência-amplitude:

α	β	ω					
		exato	[1]	Taylor - n° de termos - ω_i			
				3	4	5	
3	4	1,024957	1,025674 (0,1%)	1,026172 (0,1%)	1,026172	1,025261	
5	7	1,028660	1,029613 (0,1%)	1,031161 (0,2%)	1,030068	1,029017	
2	3	1,033652	1,034982 (0,1%)	1,037605 (0,4%)	1,035324	1,034081	
3	5	1,040749	1,042734 (0,2%)	1,046260 (0,5%)	1,042774	1,041280	
3	7	1,059596	1,064045 (0,4%)	1,066857 (0,7%)	1,062224	1,060339	
1	2	1,051637	1,054910 (0,3%)	1,058540 (0,7%)	1,054086	1,052305	
1	3	1,070451	1,076845 (0,6%)	1,077433 (0,6%)	1,073094	1,071238	
1	4	1,080181	1,088681 (0,8%)	1,086257 (0,6%)	1,082587	1,080935	
1	5	1,086126	1,096092 (0,9%)	1,091378 (0,5%)	1,088264	1,086816	
1	6	1,090133	1,101695 (1,1%)	1,094725 (0,4%)	1,092036	1,090760	
1	7	1,093018	1,104867 (1,1%)	1,097083 (0,4%)	1,094725	1,093588	
1	8	1,095194	1,107679 (1,1%)	1,098835 (0,3%)	1,096737	1,095715	
1	9	1,096894	1,109890 (1,2%)	1,100188 (0,3%)	1,098300	1,097373	
1	10	1,098258	1,111675 (1,2%)	1,101265 (0,3%)	1,099549	1,098700	
1	11	1,099377	1,113145 (1,2%)	1,102142 (0,2%)	1,100570	1,099788	

Tabela 7.1: Resultados obtidos com o método de Taylor para $x_0 = 1$ e diferentes não-linearidades e aproximações, comparados com os apresentados por Gottlieb [1].

$$x_0 - \frac{\pi^2}{8\omega^2}|x_0|^{4/3} + \frac{\pi^4}{288\omega^4}|x_0|^{5/3} - \frac{7\pi^6}{103680\omega^6}|x_0|^2 = 0 \quad (7-7)$$

As figuras 7.3(a) e 7.3(b) exibem as curvas frequência-deslocamento inicial, obtidas com a eq. (7-5), com a aproximação de quatro termos, eq. (7-7), e com integração numérica. Pode-se ver que a solução com quatro termos já apresenta resultados precisos até valores bastante elevados de x_0 . É interessante observar que para expoentes fracionários menores que 1, a frequência da resposta diminui à medida que o deslocamento inicial aumenta. Quando a não-linearidade é maior que 1, a frequência cresce ao se aumentar o deslocamento. Os resultados mostram que o método de Taylor leva a soluções analíticas bastante precisas para a relação frequência-amplitude com um número pequeno de termos.

Já com o FT, a seguinte solução harmônica,

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_5 \cos 5\omega t \quad (7-8)$$

pode ser obtida seguindo a metodologia apresentada anteriormente ou simplesmente igualando os termos de mesma potência em t da série de Taylor

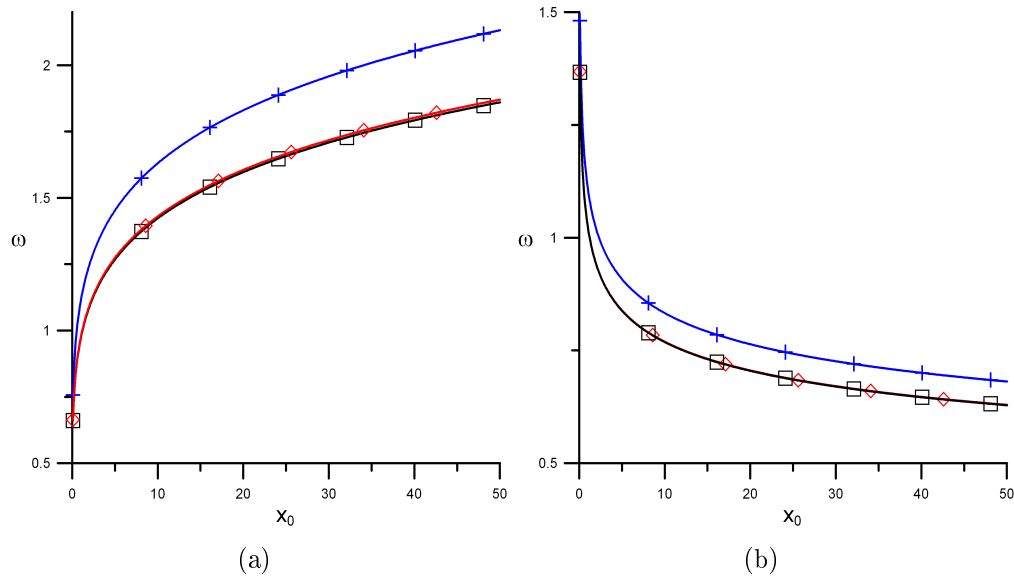


Figura 7.3: Curva frequência-deslocamento inicial. $\square$, RK; $+$, dois termos, eq. (7-5); $\diamond$, quatro termos, eq. (7-7): (a) $\ddot{x} + \text{sgn}(x)|x|^{4/3} = 0$; (b) $\ddot{x} + \text{sgn}(x)|x|^{3/4} = 0$.

gerada a partir de (7-8) com a solução (7-4). Então, escrevendo (7-8) em série de Taylor e igualando os termos de mesma potência em t com os de (7-4), obtêm-se quatro equações que, considerando que o deslocamento inicial seja sempre positivo, assumem a seguinte forma

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &= |x_0| \\ \omega^2(a_1 + 9a_3 + 25a_5) &= |x_0|^{\alpha/\beta} \\ \omega^4(a_1 + 81a_3 + 625a_5) &= \frac{\alpha}{\beta|x_0|}(|x_0|^{\alpha/\beta})^2 \\ \omega^6(a_1 + 729a_3 - 15625a_5) &= \frac{\alpha}{\beta^2}(4\alpha - 3\beta)|x_0|^{(3\alpha-2\beta)/\beta} \end{aligned}$$

as primeiras três equações são utilizadas para determinação das amplitudes e a última, para determinação de ω . Estas equações conduzem à seguinte relação frequência-deslocamento quando $\alpha = 4$ e $\beta = 3$:

$$-28|x_0|^2 = -2025x_0\omega^6 + 2331\omega^4|x_0|^{4/3} - 420|x_0|^{5/3}\omega^2 \quad (7-9)$$

onde o valor de ω encontrado é um pouco mais afastado da solução exata do que o obtido a partir da eq. (7-7), como pode-se ver na tabela 7.2, que compara várias frequências, obtidas com o FT utilizando um número crescente de harmônicos e a solução exata.

A figura 7.4 mostra as curvas frequência da resposta versus o parâmetro α/β , relacionado à não-linearidade do sistema, para duas condições iniciais de

		ω					
		FT - n° de termos					
α	β	exato	3	4	5	9	
3	4	1,024957	1,019216 (-0,6%)	1,021082	1,022102	1,023682	
5	7	1,028660	1,021909 (-0,7%)	1,024076	1,025268	1,027127	
2	3	1,033652	1,025477 (-0,8%)	1,028059	1,029489	1,031743	
3	5	1,040749	1,030432 (-1,0%)	1,033617	1,035397	1,038243	
3	7	1,059596	1,042954 (-1,6%)	1,047793	1,050563	1,055140	
1	2	1,051637	1,037775 (-1,3%)	1,041908	1,044251	1,048070	
1	3	1,070451	1,049775 (-1,9%)	1,055589	1,058957	1,064622	
1	4	1,080181	1,055664 (-2,3%)	1,062360	1,066278	1,072963	
1	5	1,086126	1,059162 (-2,5%)	1,066399	1,070656	1,077985	
1	6	1,090133	1,061480 (-2,6%)	1,069081	1,073570	1,081338	
1	7	1,093018	1,063129 (-2,7%)	1,070992	1,075647	1,083736	
1	8	1,095194	1,064361 (-2,8%)	1,072423	1,077204	1,085535	
1	9	1,096894	1,065318 (-2,9%)	1,073533	1,078414	1,086936	
1	10	1,098258	1,066081 (-2,9%)	1,074421	1,079381	1,088056	
1	11	1,099377	1,066705 (-3,0%)	1,075147	1,080171	1,088974	

Tabela 7.2: Resultados obtidos com o FT para diferentes aproximações tendo $x_0 = 1$, comparados a solução exata.

deslocamento distintas. Pode-se ver que, ao se aumentar a relação α/β , quando $x_0 < 1$, a frequência da resposta diminui, enquanto que, quando $x_0 > 1$, a frequência da resposta aumenta ao se aumentar α/β .

Observa-se que os resultados obtidos com o FT fornecem resultados coincidentes com o da integração numérica para todos os valores de α/β aqui analisados.

7.1.1

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$$

Um caso partical do problema (7-2) é

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0 \quad (7-10)$$

e recentemente foi estudado por Beléndez et all (2007 e 2008) [8], [62], que utilizaram o método de perturbação com homotopia de He (HPM), [59].

Escrevendo a solução de (7-10) em série de Taylor, se obtém

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x_0) t^2 \quad (7-11)$$

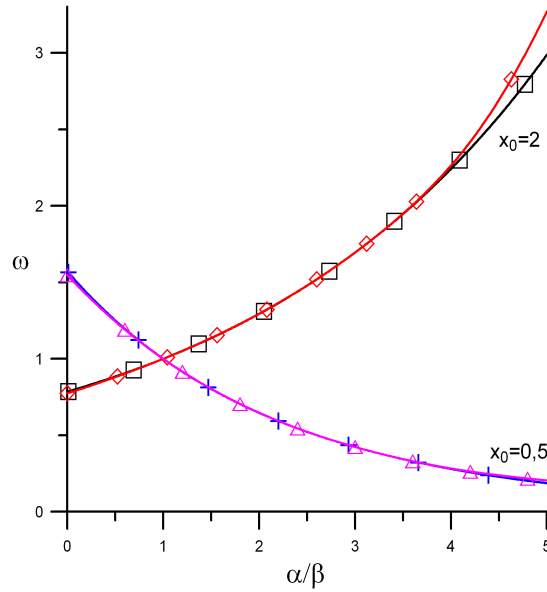


Figura 7.4: Influência da não-linearidade para diferentes deslocamentos iniciais: $\square$, RK e $x_0 = 2$; $\diamond$, FT com sete harmônicos e $x_0 = 2$; $+$, RK e $x_0 = 0,5$; $\triangle$, FT com sete harmônicos e $x_0 = 0,5$.

sendo que os termos de ordem mais alta em t são todos nulos.

De acordo com Beléndez et al., [62], a solução exata de (7-10) é dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - \frac{t^2}{2} & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{t^2}{2} - 2\sqrt{2x_0}t + 3x_0 & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \\ -\frac{t^2}{2} + 4\sqrt{2x_0}t - 15x_0 & \frac{3T}{4} \leq t \leq T \end{cases} \quad (7-12)$$

o que revela que a solução (7-11) é a solução exata no primeiro quarto de período, justificando assim que os termos de ordem superior em t sejam nulos.

Como (7-11) é exata no primeiro quarto de período, ao se aplicar as propriedades de simetria do problema ($x(T/4) = 0$), a frequência exata da resposta periodica é obtida. Desta forma tem-se

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2|x_0|}} \approx \frac{1,110721}{\sqrt{|x_0|}} \quad (7-13)$$

Beléndez et al., [62], aplicando o HPM, obtiveram a seguinte aproximação de terceira ordem:

$$\begin{aligned} x(t) = & 1,03216x_0 \cos \omega_3 t - 0,038333x_0 \cos 3\omega_3 t + \\ & 0,008251x_0 \cos 5\omega_3 t - 0,003006x_0 \cos 7\omega_3 t + \\ & 0,001414x_0 \cos 9\omega_3 t \end{aligned} \quad (7-14)$$

onde $\omega_3 = 1,111358/\sqrt{x_0}$.

Soluções periódicas podem ser obtidas aplicando o método de FT. Utilizando uma solução com o mesmo número de harmônicos que em (7-14), se obtém as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
 \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0) &= \left(\frac{1}{2} a_1 + \frac{9}{2} a_2 + \frac{25}{2} a_3 + \frac{49}{2} a_4 + \frac{81}{2} a_5 \right) \omega^2 \\
 0 &= \left(\frac{1}{24} a_1 + \frac{27}{8} a_2 + \frac{625}{24} a_3 + \frac{2401}{24} a_4 + \frac{2187}{8} a_5 \right) \omega^4 \\
 0 &= \left(\frac{1}{720} a_1 + \frac{81}{80} a_2 + \frac{3125}{144} a_3 + \frac{117649}{720} a_4 + \frac{59049}{80} a_5 \right) \omega^6 \\
 0 &= \left(\frac{1}{40320} a_1 + \frac{729}{4480} a_2 + \frac{78125}{8064} a_3 + \frac{823543}{5760} a_4 + \frac{4782969}{4480} a_5 \right) \omega^8 \\
 0 &= (a_1 + 59049 a_2 + 9765625 a_3 + 282475249 a_4 + 3486784401 a_5) \omega^{10}
 \end{aligned} \tag{7-15}$$

Resolvendo as primeiras equações em (7-15) se obtém as amplitudes dos harmônicos. Assim da última das eqs. (7-15) se obtém para a frequência

$$\omega = \frac{1,088056}{\sqrt{|x_0|}} \tag{7-16}$$

e conseqüentemente a solução periódica torna-se

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1,023126x_0 \cos \omega t - 0,025262x_0 \cos 3\omega t + \\
 &0,002339x_0 \cos 5\omega t - 0,000213x_0 \cos 7\omega t + \\
 &0,000011x_0 \cos 9\omega t
 \end{aligned} \tag{7-17}$$

onde ω é dado por (7-16)

A solução (7-17) não é coincidente com a resposta obtida através de integração numérica porque a aproximação (7-16) para a frequência possui um erro de 2,04%. Utilizando a solução exata para a frequência, eq. (7-13), a solução periódica torna-se

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1,030725x_0 \cos \omega t - 0,035115x_0 \cos 3\omega t + \\
 &0,00504x_0 \cos 5\omega t - 0,000704x_0 \cos 7\omega t + \\
 &0,000054x_0 \cos 9\omega t
 \end{aligned} \tag{7-18}$$

e passa a ser coincidente com a solução obtida com integração numérica, como mostra a figura 7.5.

A medida que mais harmônicos são utilizados na solução, a aproximação para a frequência obtida com o método de Fourier-Taylor tende ao valor exato

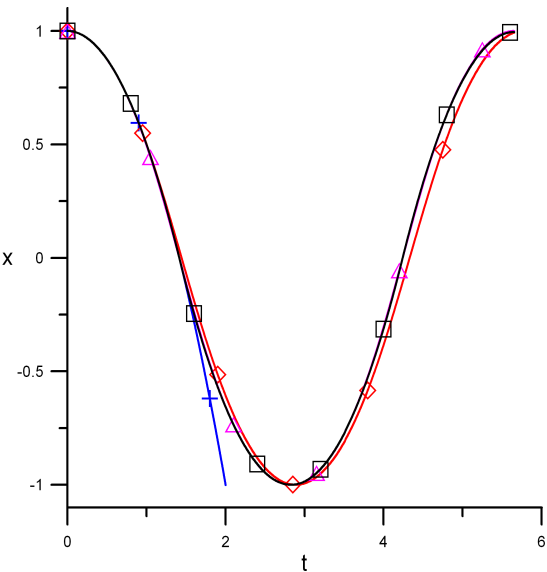


Figura 7.5: Solução no tempo do problema $\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$: $\square$, RK; $+$, eq. (7-11); $\diamond$, eq. (7-17); $\triangle$, eq. (7-18).

obtido com o método de Taylor, eq. (7-13), como mostrado na tabela 7.3.

n° de harmônicos	ω	erro (%)
1	$1/\sqrt{x_0}$	9,97
2	$1,054092/\sqrt{x_0}$	5,1
3	$1,072898/\sqrt{x_0}$	3,4
4	$1,082367/\sqrt{x_0}$	2,55
5	$1,088056/\sqrt{x_0}$	2,04
7	$1,094553/\sqrt{x_0}$	1,46
10	$1,099419/\sqrt{x_0}$	1,01
20	$1,105081/\sqrt{x_0}$	0,51
40	$1,107904/\sqrt{x_0}$	0,25

Tabela 7.3: Resultados obtidos com o método de Fourier Taylor e o erro em relação a solução exata, eq. (7-13).

7.2 Pêndulo plano

A equação que rege o movimento do pêndulo plano em vibração livre é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \tag{7-19}$$

onde g é a aceleração, l é o comprimento do pêndulo e θ , o deslocamento angular.

Em geral, para se obter uma solução analítica deste problema, expande-se $\sin \theta$ em séries de Taylor, retendo termos em θ até a potência 3 ou 5, o que limita a validade da solução a pequenos valores de θ_0 ou se escreve a solução em termos de funções elípticas.

Escrevendo a solução de (7-19) em série de Taylor, tem-se a seguinte solução para a condição inicial $\dot{\theta}(0) = 0$,

$$\theta = \theta_0 - \left(\frac{g}{2l} \sin \theta_0\right)t^2 + \frac{g^2}{24l^2}(\cos \theta_0 \sin \theta_0)t^4 + \dots \quad (7-20)$$

Substituindo $t = T/4$ em (7-20), sendo $T = 2\pi/\omega$, obtém-se a seguinte relação frequência-amplitude,

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \sqrt{\frac{g}{\theta_0 l} (3 \sin \theta_0 \pm \sqrt{9(\sin \theta_0)^2 - 6\theta_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0})} \quad (7-21)$$

e considerando apenas os dois primeiros termos em (7-20), chega-se a

$$\omega = \frac{\pi}{4\theta_0} \sqrt{2\theta_0 \frac{g}{l} \sin \theta_0} \quad (7-22)$$

Utilizando o FT com a seguinte solução aproximada,

$$\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t + c_5 \cos 5\omega t$$

obtem-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{192l^2\omega^4}(-34l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 + \frac{75}{64}\theta_0 \\ c_3 &= -\frac{1}{128l^2\omega^4}(-26l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 - \frac{25}{128}\theta_0 \\ c_5 &= \frac{1}{384l^2\omega^4}(-10l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 + \frac{3}{128}\theta_0 \end{aligned}$$

e a seguinte relação frequência-deslocamento

$$\begin{aligned} -\left(\frac{g}{l}\right)^3 (4(\cos \theta_0)^2 - 3) \sin \theta_0 &= -225\omega^6\theta_0 + 259\frac{g}{l}\omega^4 \sin \theta_0 - \\ 35\left(\frac{g}{l}\right)^2 \omega^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 & \end{aligned} \quad (7-23)$$

A figura 7.6 apresenta as curvas frequência-deslocamento obtidas a partir das relações (7-22), (7-21) e (7-23), sendo estas comparadas com os resultados

da integração numérica. Pode-se ver que poucos termos são suficientes para apresentar bons resultados, para todos os valores possíveis de θ_0 . Verifica-se que a frequência natural decresce a medida que $|\theta_0|$ aumenta e torna-se nula em $\theta_0 = \pm\pi$, que corresponde à posição do pêndulo invertido (posição de equilíbrio instável).

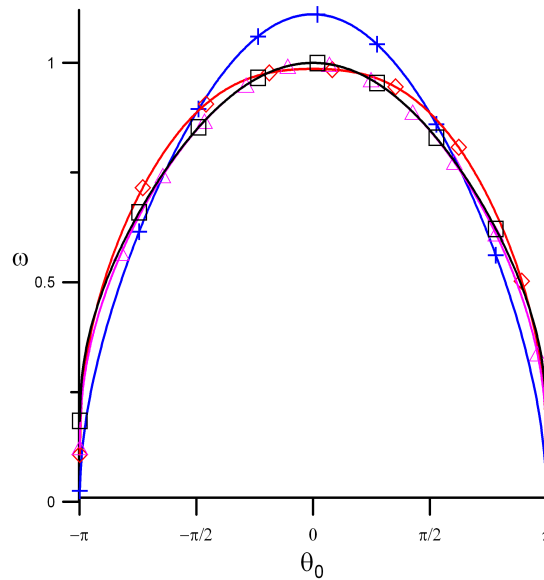


Figura 7.6: Curva frequência-deslocamento inicial do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$: $\square$, RK; $+$, eq. (7-22); $\diamond$, eq. (7-21); $\triangle$, eq. (7-23).

Verifica-se em (7-23) que, para um dado θ_0 , a frequência é função de potências de g/l . Na figura 7.7 é apresentada a influência da relação g/l sobre a frequência da resposta para dois valores de θ_0 ($\theta_0 = 85,7^\circ$ e $\theta_0 = 5^\circ$). Quanto mais curto for o pêndulo, maior será sua frequência natural não-linear. Nota-se que, independente dos valores de θ_0 e g/l , os dois métodos propostos fornecem resultados bastante precisos.

A seguir, na figura 7.8 são apresentadas algumas trajetórias no plano de fase obtidas com o FT e com integração numérica, considerando $\theta_0 = 86^\circ$ e $\theta_0 = 170^\circ$. Nota-se a boa concordância com a solução numérica mesmo para grandes valores de θ_0 , próximos da posição invertida, quando se tem um alto grau de não-linearidade.

7.3

Pêndulo Elíptico

O pêndulo elíptico consiste de um pêndulo preso a uma massa livre para se mover na horizontal, conforme mostra a figura 7.9. O comportamento caótico do pêndulo elíptico foi estudado por Ge e Lin (2007), [5], entre outros.

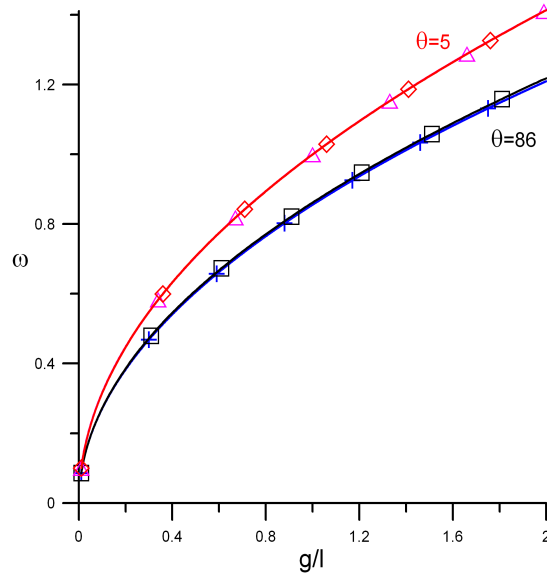


Figura 7.7: Curva frequência- g/l : $\square$, RK e $\theta_0 = 85,7^\circ$; $+$, Taylor com 5 termos; $\diamond$, RK $\theta_0 = 5^\circ$; $\triangle$, FT com cinco harmônicos.

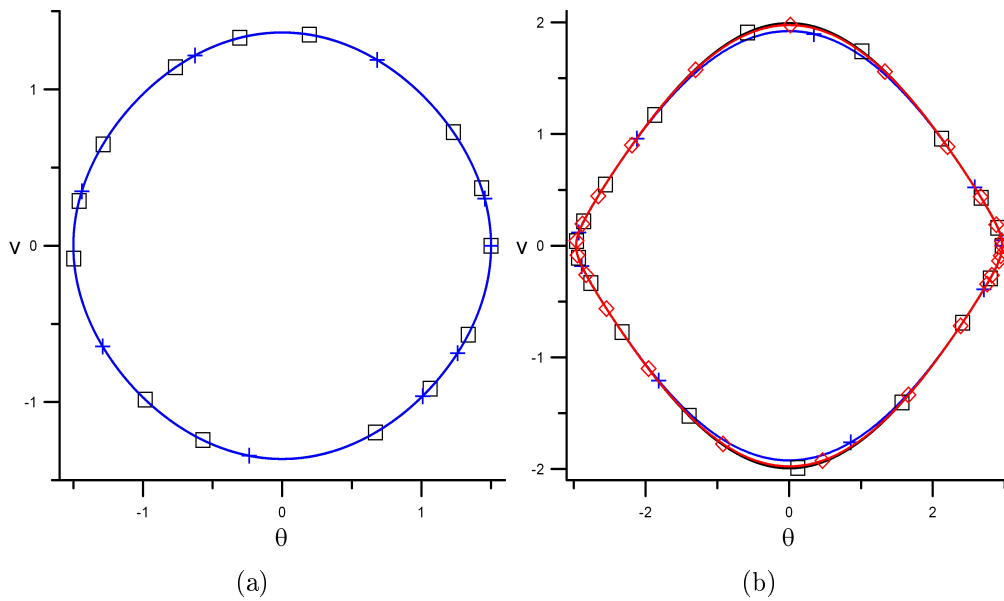


Figura 7.8: Respostas no plano de fase do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$: (a) $\theta_0 = 86^\circ$, $\square$, RK; $+$, FT com cinco harmônicos; (b) $\theta_0 = 170^\circ$, $\square$, RK; $+$, FT com oito harmônicos; $\diamond$, FT com doze harmônicos.

As equações de movimento deste tipo de estrutura permitem demonstrar a aplicação dos métodos de Taylor e Fourier-Taylor para uma não-linearidade envolvendo funções trigonométricas um pouco mais complexa que a presente no pêndulo simples e, também, a aplicação em um exemplo contendo dois graus de liberdade.

As energias cinética e potencial do pêndulo são:

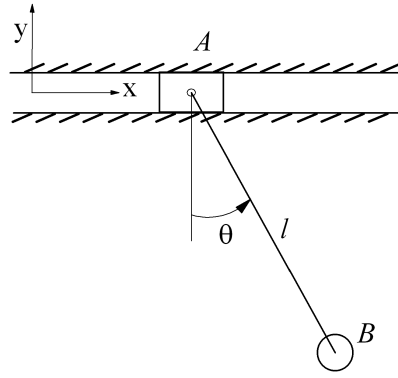


Figura 7.9: Pêndulo elíptico.

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{1}{2}(m_A \dot{x}_A^2 + m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)) \\ \Pi &= m_B g l (1 - \cos \theta)\end{aligned}\tag{7-24}$$

sendo as coordenadas da massa do pêndulo dadas por:

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + l \sin \theta \\ y_B &= -l \cos \theta\end{aligned}\tag{7-25}$$

Substituindo (7-25) em (7-24) e aplicando o princípio de Hamilton, obtêm-se as equações de movimento

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}\tag{7-26}$$

onde

$$L = \bar{T} - \Pi$$

isto é,

$$\begin{aligned}(m_A + m_B)\ddot{x}_A - m_B l \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_B l \ddot{\theta} \cos \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\ddot{x}_A}{l} \cos \theta &= 0\end{aligned}\tag{7-27}$$

Manipulando as eqs. de movimento (7-27) de forma a desacoplar as acelerações, elas tornam-se,

$$(m_A + m_B(1 - (\cos \theta)^2))\ddot{x}_A - m_B \sin \theta (l \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) = 0\tag{7-28}$$

$$\left(1 - \frac{m_B}{m_A + m_B}(\cos \theta)^2\right)\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin \theta + \frac{m_B}{m_A + m_B}\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (7-29)$$

Utilizando o método de Taylor, as soluções aproximadas para os deslocamentos $x_A(t)$ e $\theta(t)$ são dadas por duas expansões independentes:

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2!}\ddot{x}_A \Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d\ddot{x}_A}{dt} \Big|_{t=0} t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^2\ddot{x}_A}{dt^2} \Big|_{t=0} t^4 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{2!}\ddot{\theta} \Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d\ddot{\theta}}{dt} \Big|_{t=0} t^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^2\ddot{\theta}}{dt^2} \Big|_{t=0} t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-30)$$

onde x_0 e v_0 são as condições iniciais da massa m_A , e θ_0 e $\dot{\theta}_0$, as condições iniciais do pêndulo. Os termos $\ddot{x}_A$ e $\ddot{\theta}$ são diretamente retirados das eqs. (7-28) e (7-29). Com isso, as séries de potências estão determinadas. Assim tem-se para o deslocamento da massa A para $v_0 = 0$,

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_0 + \frac{gm_2}{2a}(\sin \theta_0 \cos \theta_0)t^2 + \left(-\frac{m_2^3 g^2}{6la^3} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^6 + \right. \\ &\quad \frac{1}{24la^3}(-4m_2 g^2 a^2 + 7m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 + \frac{m_2 g^2}{8la} \sin \theta_0 + \\ &\quad \left. \frac{1}{24la^3}(4m_2^3 g^2 - 8m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^4\right)t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-31)$$

e para o pêndulo, com $\dot{\theta}_0 = 0$,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \left(-\frac{g}{2l} \sin \theta_0 - \frac{m_2 g}{2la} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2\right)t^2 + \\ &\quad \left(\frac{m_2^3 g^2}{6l^2 a^3} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^7 + \frac{1}{24l^2 a^3}(g^2 a^3 - 4m_2 g^2 a^2) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \right. \\ &\quad \frac{1}{24l^2 a^3}(9m_2^2 g^2 a - 4m_2^3 g^2) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^5 + \\ &\quad \left. \frac{1}{24l^2 a^3}(6m_2 g^2 a^2 - 8m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^3\right)t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-32)$$

onde

$$a = m_1 + m_2(1 - (\cos \theta_0)^2) \quad (7-33)$$

Substituindo $t = \pi/(2\omega_1)$ em (7-31) e $t = \pi/(2\omega_2)$ em (7-32) tem-se as equações que permitem se obter as frequências de cada resposta.

Utilizando uma aproximação com três termos e assumindo que as condições iniciais são $(0,0)$ e $(\theta_0,0)$, as seguintes expressões para as frequências são obtidas:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{12la \cos \theta_0} \left(lg \cos \theta_0 (-4m_B^2 (\cos \theta_0)^4 + 8am_B (\cos \theta_0)^4 + \right.$$

$$4a^2(\cos \theta_0)^2 + 4m_B^2(\cos \theta_0)^6 - 7am_B(\cos \theta_0)^2 - 3a^2) \quad (7-34)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 = \frac{\sqrt{3}\pi}{12a} \sqrt{\frac{g}{l}} & \left(-3a^2m_B(\sin \theta_0)^3 + (3a^3 + 3m_Ba^2) \sin \theta_0 + \right. \\ & \left\{ \theta_0(24a^3m_B^3(\sin \theta_0)^7 + (-48a^3m_B^3 - 54a^4m_B^2)(\sin \theta_0)^5 + \right. \\ & (36a^5m_B + 60a^4m_B^2 + 24a^3m_B^3)(\sin \theta_0)^3 - (12a^5m_B + 6a^6 + \\ & 6a^4m_B^2) \sin \theta_0) \cos \theta_0 + 9a^4m_B^2(\sin \theta_0)^6 - 18(a^4m_B^2 + a^5m_B) \\ & \left. (\sin \theta_0)^4 + 9(a^6 + a^4m_B^2 + 2a^5m_B)(\sin \theta_0)^2 \right\}^{1/2} \Big)^{1/2} \end{aligned} \quad (7-35)$$

sendo a definido em (7-33).

Utilizando o FT, as soluções aproximadas são escritas como

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos \omega_1 t + c_3 \cos 3\omega_1 t + \dots \\ \theta(t) &= d_1 \cos \omega_2 t + d_3 \cos 3\omega_2 t + \dots \end{aligned} \quad (7-36)$$

Utilizando dois harmônicos em cada aproximação de (7-36), as soluções aproximadas tornam-se,

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{m_B g}{8a\omega_1^2} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{9}{8} x_A \right) \cos \omega_1 t - \\ & \left(\frac{m_B g}{8a\omega_1^2} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{8} x_A \right) \cos 3\omega_1 t \\ \theta(t) &= \left(-\frac{m_B g}{8la\omega_2^2} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 - \frac{g}{8l\omega_2^2} \sin \theta_0 + \frac{9}{8} \theta_0 \right) \cos \omega_2 t + \\ & \left(\frac{m_B g}{8la\omega_2^2} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 + \frac{g}{8l\omega_2^2} \sin \theta_0 - \frac{1}{8} \theta_0 \right) \cos 3\omega_2 t \end{aligned} \quad (7-37)$$

e as expressões para as frequências são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{a\sqrt{10 \cos \theta_0}} \sqrt{\frac{g}{l}} (4m_B^2(\cos \theta_0)^6 + (\cos \theta_0)^4(8am_B - 4m_B^2) + \\ & (\cos \theta_0)^2(4a^2 - 7am_B) - 3a^2)^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{1}{3la} \sqrt{\frac{g}{l\theta_0 a}} \left(-5(\sin \theta_0)^3 a^2 m_B + (5a^3 + 5m_B a^2) \sin \theta_0 + \right. \\ & \left(\theta_0(36a^3m_B^3(\sin \theta_0)^7 + (-72a^3m_B^3 - 81a^4m_B^2)(\sin \theta_0)^5 + \right. \\ & (36a^3m_B^3 + 54a^5m_B + 90a^4m_B^2)(\sin \theta_0)^3 - 9(2a^5m_B + \\ & a^6 + a^4m_B^2) \sin \theta_0) \cos \theta_0 + 25(\sin \theta_0)^6 a^4 m_B^2 - 50(a^4m_B^2 + \end{aligned} \quad (7-38)$$

$$a^5 m_B)(\sin \theta_0)^4 + 25(a^6 + a^4 m_B^2 + 2a^5 m_B)(\sin \theta_0)^2 \Big)^{1/2} \Big)^{1/2} \quad (7-39)$$

Nas figuras 7.10(a) e 7.10(b) é possível compreender o comportamento do pêndulo elíptico sujeito a um deslocamento inicial θ_0 e demais condições iniciais nulas. Em 7.10(a), a massa m_A é 100 vezes maior que a massa m_B e o pêndulo se comporta de forma semelhante ao pêndulo preso em extremidade fixa da seção anterior. Na figura 7.10(b) a razão entre as massas é 1 e os movimentos de pequena amplitude do pêndulo, apresentam períodos bem menores que em 7.10(a). Também pode-se ver que agora, ao se manter o mesmo número de termos na aproximação, perde-se um pouco da precisão, mas mesmo assim, obtém-se com apenas três termos em Taylor ou dois harmônicos com o FT uma boa aproximação com os resultados da integração numérica.

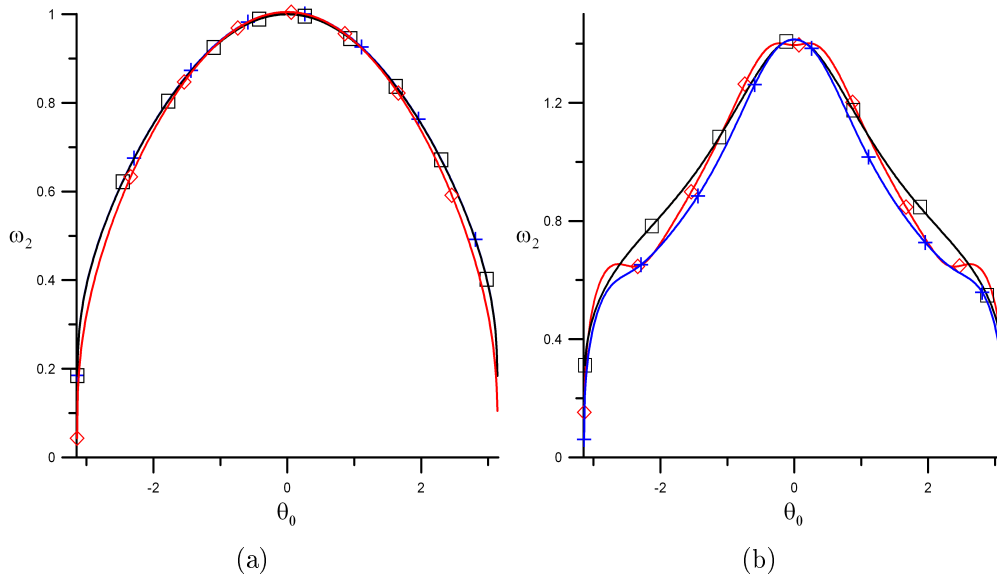


Figura 7.10: Curva ω_2 - θ_0 : (a) $m_A = 100, m_B = 1$. $\square$, RK - pêndulo 1gl; +, RK - pêndulo 2gl; $\diamond$, FT com dois harmônicos. (b) $m_A = 1, m_B = 1$. $\square$, RK; +, FT com dois harmônicos, eq. (7-39); $\diamond$, Taylor com três termos, eq. (7-35).

7.4

Viga com não-linearidades não-polinomiais

A equação da viga com não-linearidades mais completas,

$$10m\ddot{x} + \left(\frac{\pi^8}{800}x^5 - \pi^6x^3 + 200\pi^4x \right) \frac{i}{(x^2\pi^2 - 400)^{5/2}}EI + \frac{40P}{\pi x} \left(\text{EllipticE}\left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(x)x \right\} - \text{EllipticK}\left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(x)x \right\} \right) = \frac{40}{\pi}q \quad (7-40)$$

obtida na seção 2.5, não pode ser resolvida pelos métodos convencionais.

Utilizando o método de Taylor, obtém-se como aproximação,

$$x = x_0 + \frac{2P}{mx_0\pi} \left(\text{EllipticK}\left(\frac{\pi}{20}x_0\right) - \text{EllipticE}\left(\frac{\pi}{20}x_0\right) + \frac{iEI}{m(x_0^2\pi^2 - 400)^{5/2}} \left(-10x_0\pi^4 + \frac{\pi^6}{20}x_0^3 - \frac{\pi^8}{16000}x_0^5 \right) + \frac{2q}{m\pi} \right) t^2 + \dots \quad (7-41)$$

A figura 7.11 exibe a convergência da solução aproximada a medida que mais termos são adicionados em (7-41), sendo estas comparadas com a integração numérica no tempo. Verifica-se uma rápida convergência até $t = T/4$, o que permite obter uma solução analítica precisa com poucos termos.

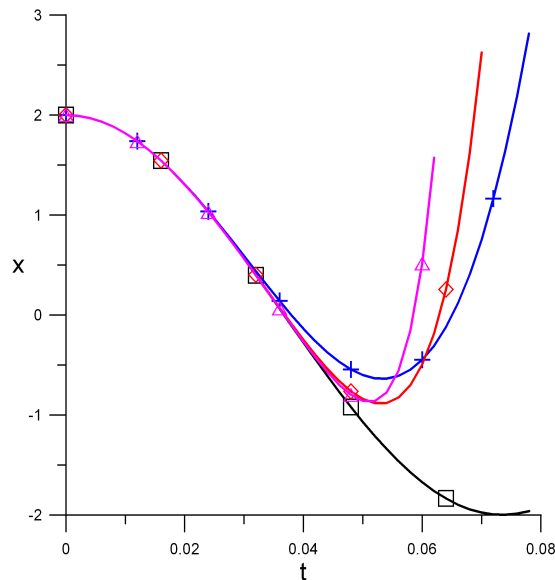


Figura 7.11: Solução no tempo da eq. (7-40) com os seguintes parâmetros: $x_0 = 2$, $P = 69311,51$, $EI = 5672067$, $q = 0$ e $m = 1$. $\square$, RK; $+$, aproximação com 3 termos; $\diamond$, 5 termos; $\triangle$, 7 termos.

A figura 7.12 exibe a curva frequência-deslocamento inicial obtida com algumas aproximações.

7.5

Arco sujeito a uma carga constante aplicada de forma súbita

O problema da flambagem dinâmica ou escape de um vale potencial, de um arco abaulado foi estudado por Lin e Bradford (2008) [66] entre outros. Através

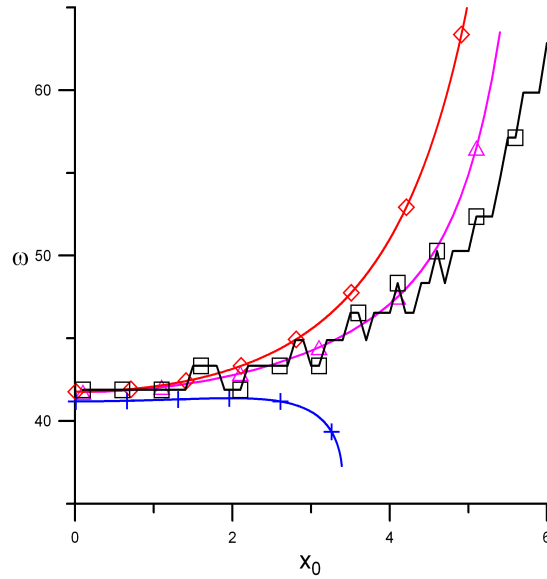


Figura 7.12: Curva frequência-deslocamento inicial do problema (7-40) com os seguintes parâmetros: $P = 69311,51$, $EI = 5672067$, $q = 0$ e $m = 1$. $\square$, RK; $+$, Taylor com três termos; $\diamond$, Taylor com quatro termos; $\triangle$, FT com três harmônicos.

do princípio da conservação de energia eles determinaram a carga constante q , que aplicada de forma súbita, faz com que ocorra a flambagem dinâmica do modelo simplificado da figura 7.13.

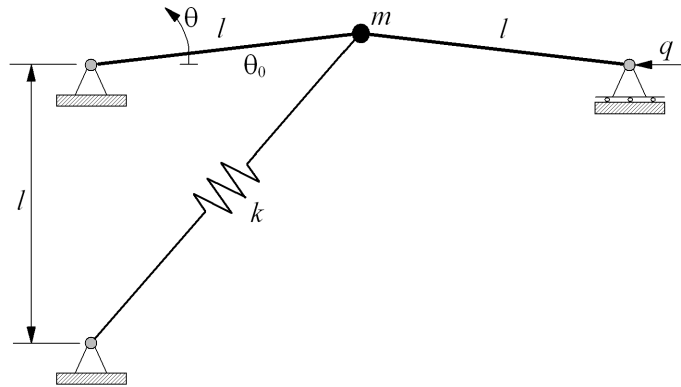


Figura 7.13: Sistema idealizado com um grau de liberdade.

A energia potencial total do problema, escrita na forma adimensional, é dada por

$$\frac{\Pi}{kl^2} = (\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 + \sin \theta_0})^2 - q(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (7-42)$$

sendo θ_0 a imperfeição inicial.

A energia cinética adimensional é dada por

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \quad (7-43)$$

Subtraindo (7-42) de (7-43) tem-se o Lagrangiano. Aplicando o cálculo variacional, encontra-se a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\theta} + \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \sin \theta}}(\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 + \sin \theta_0}) - q \sin \theta = 0 \quad (7-44)$$

Aplicando o princípio da energia potencial estacionária encontra-se os pontos de equilíbrio correspondentes a cada nível do carregamento horizontal q . Estes pontos de equilíbrio são os atratores das oscilações. Para pequenos valores de carregamento tem-se 3 pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis. Assim, a estrutura irá oscilar em torno da configuração de equilíbrio mais próxima da configuração inicial θ_0 . Já para valores maiores da carga q , tem-se apenas um único ponto de equilíbrio estável, sendo assim, a oscilação ocorre em outro vale potencial e a amplitude da resposta é muito mais ampla, como mostrado nas figuras 7.14(a) e 7.14(b).

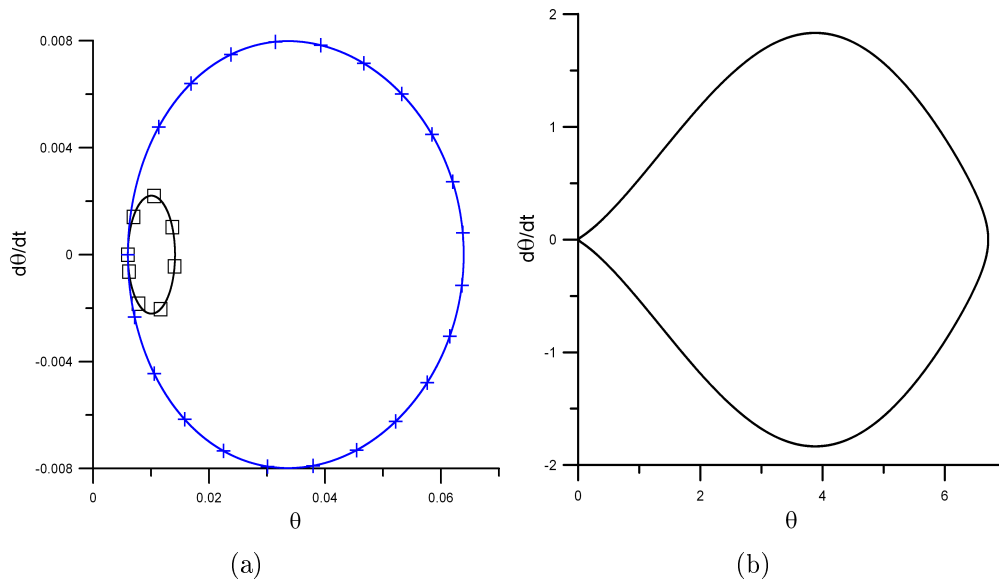


Figura 7.14: Respostas no plano fase: (a) $\square$, $q = 0,2$; $+$, $q = 0,42$; (b) $q = 0,6$

As soluções aproximadas permitem obter a curva frequência-deslocamento do problema.

Escrevendo a solução em série de Taylor e considerando que as condições iniciais são $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, tem-se

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \frac{q}{2} \sin \theta_0 \tau^2 + \left(\frac{q}{48} - \frac{q}{48} (\cos \theta_0)^2 \right) + \left(\frac{q^2}{24} \cos \theta_0 - \frac{q}{48} \right) \sin \theta_0 \tau^4 + \dots \quad (7-45)$$

e aplicando a propriedade de simetria $\dot{\theta}(T/2) = 0$, chega-se a seguinte relação frequência-amplitude,

$$\pi q \delta^3 \sin \theta_0 + ((2q \cos \theta_0 - 1) \sin \theta_0 + (1 - (\cos \theta_0)^2)) \frac{\pi^3 q}{12} \delta = 0 \quad (7-46)$$

Já utilizando o FT com a seguinte solução aproximada,

$$\theta(\tau) = c_0 + c_1 \cos \delta \tau + c_2 \cos 2\delta \tau$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \theta(\tau) = & \frac{1}{\delta^4} \left(-\frac{1}{8} q (\cos \theta_0)^2 + \frac{1}{4} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{24} (30q\delta^2 \sin \theta_0 + \right. \\ & 24\theta_0\delta^4 - 3q(\sin \theta_0 - 1)) + \left\{ \frac{1}{6} q (\cos \theta_0)^2 - \frac{1}{3} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \right. \\ & \frac{1}{24} (32q\delta^2 \sin \theta_0 - 4q \sin \theta_0 + 4q) \} \cos \delta \tau + \left\{ -\frac{1}{24} q (\cos \theta_0)^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{12} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{24} (-q - 2q\delta^2 \sin \theta_0 + q \sin \theta_0) \} \cos 2\delta \tau \right) \end{aligned} \quad (7-47)$$

e a seguinte relação frequência-amplitude

$$\begin{aligned} & \frac{q}{4} (-13(\cos \theta_0)^3 q + 16q^2 (\cos \theta_0)^2 \sin \theta_0 - (\cos \theta_0)^2 \sin \theta_0 + 2(\cos \theta_0)^2 - \\ & 4q \cos \theta_0 \sin \theta_0 + 13q \cos \theta_0 - 2 - 12q^2 \sin \theta_0 + 2 \sin \theta_0) \\ & = -\frac{1}{2} (10q \cos \theta_0 \sin \theta_0 - 5 \sin \theta_0 + 8\delta^2 \sin \theta_0 - 5(\cos \theta_0)^2 + 5) q \delta^2 \end{aligned} \quad (7-48)$$

A figura 7.15 mostra as curvas frequência-carregamento obtidas com as eqs. (7-46) e (7-48) para $\theta_0 = 0,006$ e também soluções de mais alta ordem obtidas com o método de Taylor. Pode-se ver que o FT apresenta resultados coincidentes com a integração numérica tendo apenas dois harmônicos na aproximação enquanto que o método de Taylor precisa de um número bem maior de termos. Também pode-se ver através da solução obtida com integração numérica que em $q \approx 0,42$ ocorre uma mudança drástica na curva $\delta - q$, que é justamente a mudança de vale potencial já mostrada na figura 7.14.

7.6

Equação de Mathieu não-linear

A eq. (5-10), obtida ao se aplicar uma perturbação ϵ à solução periódica $x(t)$ da equação de Duffing, será agora utilizada para estudar a estabilidade de $x(t)$.

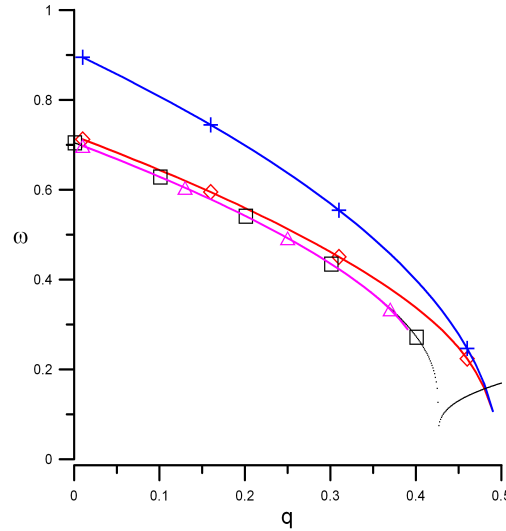


Figura 7.15: Curva frequência-carregamento. $\square$, RK; $+$, eq. (7-46); $\diamond$, Taylor com 5 termos; $\triangle$, eq. (7-48).

Retirando os termos que se anulam em (5-10), tem-se

$$\ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0\dot{\epsilon} + (\omega_0^2 + 3\beta x^2)\epsilon + 3\beta x\epsilon^2 + \beta\epsilon^3 = 0 \quad (7-49)$$

A eq. (7-49) poderá ter um único ponto fixo localizado em $(0, 0)$, ou dois, ou quatro e assim por diante, dependendo dos parâmetros. Assim, quando houver um único ponto fixo, qualquer condição inicial faz com que a perturbação atinja o ponto de equilíbrio $(0, 0)$, o que corresponde a solução perturbada $x(t) + \epsilon(t)$ voltar para sua trajetória $x(t)$, conseqüentemente $x(t)$ é estável. Quando houver mais de um ponto fixo, após o transiente ser eliminado, a perturbação ϵ terá uma trajetória fechada, o que impede, portanto, que $x(t) + \epsilon(t)$ volte para sua trajetória $x(t)$ original. Nestes casos, a trajetória $x(t)$ é dita instável. Desta forma, as incógnitas do problema (7-49) são as coordenadas ϵ_0 e v_0 do ponto fixo associado a trajetória de $\epsilon(t)$ e a frequência da resposta, ω .

Para a análise da estabilidade das soluções periódicas do problema

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \quad (7-50)$$

será primeiramente utilizado o HBM para se obter as soluções periódicas, pois a solução com um único harmônico já apresenta grande precisão para a região de primeira ressonância.

Apesar de (7-50) não ser amortecida, na equação da perturbação será inserido um amortecimento $\zeta = 0.1$ apenas para que as respostas em ϵ sejam trajetórias periódicas ou assintoticamente estáveis.

Para os parâmetros $\omega_0 = 1$, $\beta = 1$, $F = 1$ e $\Omega = 2$, as soluções da eq. (7-50)

são,

$$x_1(t) = 2,14949 \cos 2t \quad (7-51)$$

$$x_2(t) = -1,80603 \cos 2t \quad (7-52)$$

$$x_3(t) = -0,34346 \cos 2t \quad (7-53)$$

Sabendo-se que as trajetórias (7-51) e (7-53) são estáveis e que (7-52) é instável, o que se espera é que seja obtido um ponto fixo somente para a trajetória (7-52).

Utilizando o FT com uma solução contendo três pares de harmônicos,

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + c_3 \cos 3\omega t + d_3 \sin 3\omega t + \\ & c_5 \cos 5\omega t + d_5 \sin 5\omega t \end{aligned} \quad (7-54)$$

as primeiras equações envolvendo ϵ e suas derivadas são utilizadas para montar o sistema linear que fornece as amplitudes c_i e d_i presentes em (7-54). As demais equações são não-lineares em ϵ_0 , v_0 e ω , incógnitas que são obtidas iterativamente.

Ao se estudar a estabilidade da trajetória dada por (7-52), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1,4341 \\ v_0 &= -0,4137 \\ \omega &= 2,0234 \end{aligned} \quad (7-55)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 1,393790160 \cos \omega t - 0,199121037 \sin \omega t + \\ & 0,040367228 \cos 3\omega t - 0,001837654 \sin 3\omega t + \\ & 0,000031505 \cos 5\omega t + 0,000035855 \sin 5\omega t \end{aligned} \quad (7-56)$$

Já ao se utilizar uma aproximação com 5 pares de harmônicos em (7-54), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1,4718 \\ v_0 &= -0,4149 \\ \omega &= 1,9999 \end{aligned} \quad (7-57)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 1,429458773 \cos \omega t - 0,201623570 \sin \omega t + \\ & 0,042296489 \cos 3\omega t - 0,002021651 \sin 3\omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0,000031489 \cos 5\omega t + 0,000050007 \sin 5\omega t - \\
& 0,000002798 \cos 7\omega t - 0,000001095 \sin 7\omega t + \\
& 0,000000061 \cos 9\omega t - 0,000000011 \sin 9\omega t
\end{aligned} \tag{7-58}$$

A figura 7.16 mostra no espaço de fase as trajetórias dadas através das eqs. (7-56), (7-58) e a trajetória obtida com a integração numérica da eq. (7-49), tendo como condições iniciais ϵ_0 e v_0 dados em (7-57) e $x(t)$ sendo dado por (7-52). Pode-se ver que a integração numérica também fornece uma trajetória fechada, sendo coincidente com a aproximação que possui cinco pares de harmônicos.

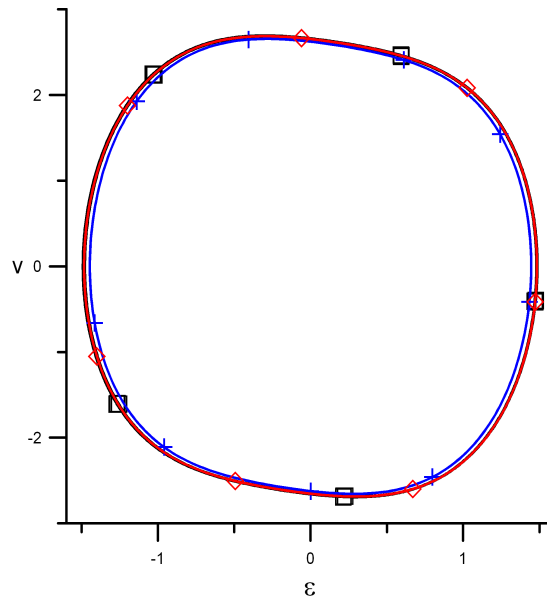


Figura 7.16: Espaço de fase do problema $\ddot{\epsilon} + 0,2\dot{\epsilon} + (1 + 9,78519(\cos 2t)^2)\epsilon - (5,41808 \cos 2t)\epsilon^2 + \epsilon^3 = 0$. $\square$, RK; +, FT com três pares de harmônicos; $\diamond$, FT com cinco pares de harmônicos.