

Neste capítulo são apresentados dois novos métodos desenvolvidos nesta tese para a solução de sistemas dinâmicos não-lineares. Eles utilizam a teoria de séries, particularmente séries de Taylor, séries de Fourier e transformadas de Padé e são de fácil implementação.

O uso de expansões em série de potência para a solução de equações diferenciais lineares, em particular, equações de segunda ordem com coeficientes variáveis, é uma técnica clássica sendo apresentada em muitos livros, tal como o de Boyce e Diprima, [86]. De fato, esta técnica pode ser utilizada para resolver problemas de valor inicial envolvendo também equações diferenciais não-lineares de qualquer ordem. Porém um dos problemas usualmente associados com as séries de potências é o tamanho do raio de convergência e a lenta convergência para instantes distantes do instante inicial, o que requer um grande número de termos para se obter a convergência. Entretanto, se alguns conceitos de simetria forem utilizados, estes problemas podem ser contornados ou minimizados.

6.1

Séries de Potências

Equações diferenciais lineares possuem famílias de soluções com um certo número de constantes arbitrárias. Em geral, deseja-se que a solução respeite um conjunto de restrições que, no caso de um sistema dinâmico, correspondem a um conjunto de condições iniciais. Dessa forma, uma única solução, dentre a família de soluções que atende ao problema, irá atender às condições iniciais.

Segundo Kreyszig (1993), [87], o método das séries de potências é um método eficiente para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis ou não. O método consiste em se escrever a solução da equação em forma de uma série de potências

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + \dots \quad (6-1)$$

onde os a_i são os coeficientes a serem determinados e t_0 é uma constante chamada de centro da série.

A solução em séries de potências é inserida na equação diferencial e os termos de mesma potência em $t - t_0$ são coletados, escrevendo-se com isso um sistema de equações que permite determinar, de forma recursiva, os coeficientes da série. Os coeficientes de ordem mais baixa da série representam as condições iniciais do problema. Assim, numa equação diferencial de segunda ordem, a_0 e a_1 em (6-1) representam as condições iniciais de deslocamento e velocidade, respectivamente, e os demais coeficientes são escritos em função destes.

A precisão da solução aproximada (6-1) decai a medida que t se afasta do centro. Quanto maior for o valor de $|t - t_0|$, mais termos são necessários para se obter um dado nível de precisão.

Uma propriedade importante das séries de potências é o raio de convergência. Dependendo do problema, a série (6-1) pode apresentar um raio de convergência infinito, isto é, para qualquer valor de t , a solução converge à medida que mais termos são adicionados à série. O raio de convergência, R , de uma série é definido por,

$$R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|} \quad (6-2)$$

Quando o raio de convergência é finito, a série converge para todo $|t - t_0| < R$ e diverge para todo $|t - t_0| > R$.

Considerando o problema de vibração livre da equação de Duffing,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-3)$$

para $\beta = 0$ a solução em séries de potências é convergente para qualquer t . Entretanto, para o caso não-linear, não é possível garantir a convergência para todo t , mas, para pequenos valores do par de condições iniciais, a série é convergente. Qaisi (1996), [88], aplicou a transformação $\tau = \sin \omega t$ à eq. (6-3), transformando a variável t em uma nova variável. Dessa forma, τ oscila entre -1 e 1. Qaisi assume que a série de potências escrita em termos de τ é convergente para $|\tau| < 1$, ou seja, para qualquer t porque a série de potências em τ acaba gerando uma função periódica em t .

6.2

Método baseado em séries de Taylor

Este é o primeiro método desenvolvido. Ele utiliza séries de Taylor e será

chamado de método de Taylor no restante desta tese.

Assim como na seção anterior, a solução para um problema de vibração,

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0 \tag{6-4}$$

também é escrita como uma série de potências,

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + \dots \tag{6-5}$$

porém agora os coeficientes a_i são determinados igualando a solução em série e suas derivadas, avaliadas em $t = t_0$, com a solução exata desconhecida e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. Então para a igualdade (6-5) tem-se,

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a_0 \\ \dot{x}(t_0) &= a_1 \\ \ddot{x}(t_0) &= 2a_2 \\ \left. \frac{d\ddot{x}}{dt} \right|_{t_0} &= 6a_3 \end{aligned} \tag{6-6}$$

onde x representa a solução exata desconhecida.

Esta forma de determinar os coeficientes faz com que a solução em série de potências (6-5) assuma a forma da série de Taylor da solução exata, com centro em torno do instante inicial, onde os dois primeiros coeficientes são as condições iniciais do problema. Assim, a série (6-5) torna-se

$$x(t) = x(t_0) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_0} \Delta t^3 + \dots \tag{6-7}$$

sendo que $\Delta t = (t - t_0)$, e, a segunda derivada, \ddot{x} , é retirada diretamente de (6-4), a saber

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{6-8}$$

Já as derivadas de mais alta ordem, presentes na série (6-7), são obtidas derivando sucessivamente \ddot{x} em (6-8) em relação ao tempo. Tem-se, por exemplo, para a terceira derivada.

$$\begin{aligned} \frac{d\ddot{x}}{dt} &= \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \end{aligned} \tag{6-9}$$

Substituindo (6-8) em (6-9), a terceira derivada passa a ser função apenas

de x e \dot{x} ,

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \quad (6-10)$$

A derivada de quarta ordem agora pode ser obtida a partir de (6-10), resultando também em uma função de x e \dot{x} , bem como as demais derivadas de ordem superior, o que faz com que cada termo da série seja função das condições iniciais, uma vez que cada derivada é avaliada no instante inicial.

No caso em que $t_0 = 0$, a série de Taylor é também conhecida como série de Maclaurin. É conveniente adotar como centro da série $t_0 = 0$, pois nesse ponto, o deslocamento e a velocidade são conhecidos, por serem parte do problema de valor inicial.

6.2.1

Vibração livre

Seja o seguinte problema de vibração livre,

$$f(\ddot{x}, x) = 0 \quad (6-11)$$

A função de energia total associada à equação de movimento (6-11) apresenta simetria em relação à velocidade ($\bar{T}(\dot{x}) = \bar{T}(-\dot{x})$), quando a energia cinética, \bar{T} , é uma função quadrática de \dot{x} , e também simetria em relação aos deslocamentos, quando a não-linearidade em x em (6-11) for uma função ímpar, isto é, ($U(x) = U(-x)$), onde U é a energia interna de deformação. Tem-se assim que a solução apresenta, no espaço de fase, simetria com relação aos eixos x e \dot{x} . As propriedades de simetria, presentes em quase todos os sistemas dinâmicos, não têm sido exploradas na solução destes problemas.

Como exibido na figura 6.1(a), nos problemas de dupla simetria, a solução consome o mesmo tempo para percorrer cada quadrante do plano de fase, ou seja, em cada quadrante do plano de fase tem-se um quarto de período. Já nos problemas em que a energia não possui dupla simetria, ($U(x) \neq U(-x)$), como, por exemplo, problemas envolvendo não-linearidades quadráticas (figura 6.1(b)), o tempo gasto em cada quadrante é diferente, sendo possível saber apenas o instante correspondente a meio período de solução, já que a simetria com relação ao eixo x persiste pois $\bar{T}(\dot{x}) = \bar{T}(-\dot{x})$.

As propriedades dos sistemas duplamente simétricos e com uma simetria, ilustradas na figura 6.1, permitem determinar, a partir das aproximações do deslocamento ou velocidade, o período T .

Assim, para o caso com dupla simetria, tem-se, partindo das condições

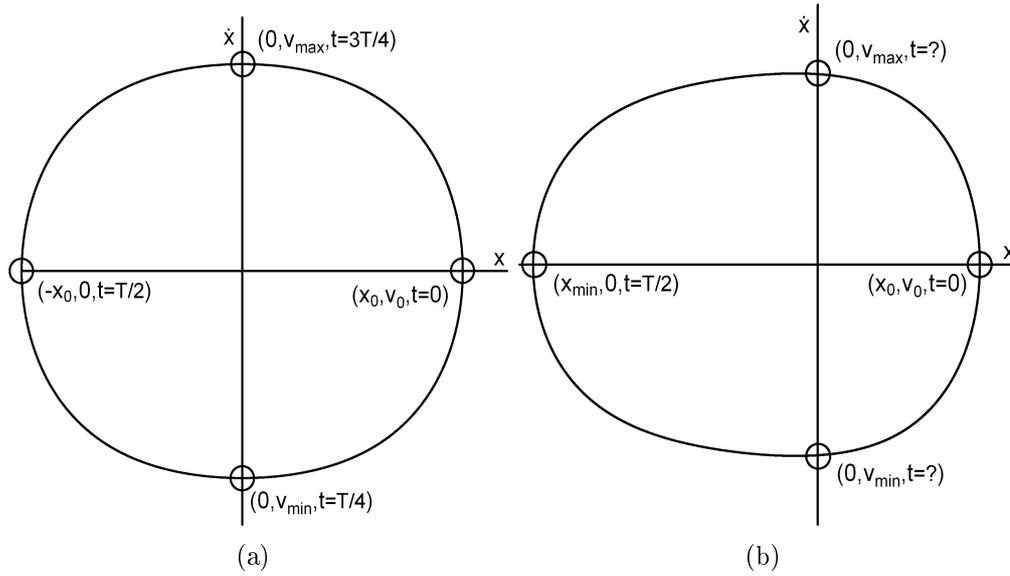


Figura 6.1: Plano de fase: (a) com dupla simetria; (b) com uma única simetria

iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$, que

$$x(T/4) = 0 \tag{6-12}$$

e nos casos com uma simetria em relação a x , tem-se que

$$\dot{x}(T/2) = 0 \tag{6-13}$$

Utilizando a solução em série de Taylor, eq. (6-7), nas igualdades (6-12) e (6-13) e levando em consideração a relação $T = 2\pi/\omega$, obtém-se uma aproximação para a frequência, ω , da resposta. Quanto mais termos são utilizados na série (6-7), mais exato será o valor de ω .

Na eq. (6-12) são necessários menos termos na série de Taylor que em (6-13) porque o intervalo de tempo em que a solução é aproximada é a metade do utilizado em (6-13). Além disso, em (6-13) utiliza-se a derivada da aproximação, o que também diminui a precisão. Cabe também ressaltar que, dada a simetria em ambos os casos com relação a x , a convergência no intervalo $0 \leq t \leq T/2$ é suficiente para se obter a resposta exata ao longo de um período já que a resposta pode ser espelhada no intervalo $-T/2 \leq t \leq 0$.

6.2.2 Equação de Duffing

Seja, como exemplo de aplicação do método, a equação de Duffing.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-14)$$

Utilizando como solução aproximada a expansão em série de Taylor de $x(t)$, eq. (6-7), com termos de até segunda ordem em t , tem-se

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{x}(0) t^2 \quad (6-15)$$

Para determinar $\ddot{x}(0)$, primeiro explicita-se \ddot{x} em (6-14). Assim, tem-se

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x^3 \quad (6-16)$$

Avaliando (6-16) no instante inicial, tem-se

$$\ddot{x}(0) = -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \quad (6-17)$$

Substituindo (6-17) em (6-15) e considerando que a velocidade inicial é nula, obtém-se a seguinte aproximação para o deslocamento

$$x(t) = x_0 - \left(\frac{1}{2} \omega_0^2 x_0 + \frac{1}{2} \beta x_0^3 \right) t^2 \quad (6-18)$$

Derivando (6-18) com relação ao tempo, obtém-se a aproximação para a velocidade,

$$\dot{x}(t) = -(\omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) t \quad (6-19)$$

Substituindo $t = T/4$, com $T = 2\pi/\omega$, em (6-18) e dividindo ambos os lados por x_0 , chega-se a

$$1 - \frac{\pi^2 \omega_0^2}{8\omega^2} - \frac{\pi^2 \beta x_0^2}{8\omega^2} = 0 \quad (6-20)$$

A relação frequência-amplitude dada em (6-20) pode ser escrita de uma forma mais simples se forem inseridos novos parâmetros,

$$\delta^2 - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2 b}{8} = 0 \quad (6-21)$$

onde δ expressa a razão entre as frequências da resposta e natural, e b expressa a não-linearidade, a saber

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6-22)$$

$$b = \frac{\beta x_0^2}{\omega_0^2} \quad (6-23)$$

A solução no tempo (6-18), escrita em termos de ω_0 , β , x_0 e t , também pode ser simplificada, passando a ser escrita em termos de b , x_0 e τ , ou seja

$$x(\tau) = x_0 - \left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}bx_0 \right) \tau^2 \quad (6-24)$$

onde

$$\tau = \omega_0 t \quad (6-25)$$

Finalmente pode-se escrever (6-24) sob uma forma adimensional através da divisão de (6-24) por x_0

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 \quad (6-26)$$

A frequência da solução, ω , é conhecida após se obter δ em (6-21),

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}b} \quad (6-27)$$

e substituir os parâmetros (6-22) e (6-23) em (6-27):

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\omega_0^2}{8} + \frac{x_0^2 \beta}{8}} \quad (6-28)$$

Com três termos na aproximação para os deslocamentos, a solução obtida é

$$\frac{x(t)}{x_0} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2 \right) \tau^4 \quad (6-29)$$

e a relação frequência-amplitude obtida em termos de δ e b é

$$\delta^4 - \frac{\pi^2}{8}\delta^2 - \frac{\pi^2}{8}\delta^2 b + \frac{\pi^4}{384} + \frac{\pi^4}{96}b + \frac{\pi^4}{128}b^2 = 0 \quad (6-30)$$

de onde se obtém

$$\delta = \frac{\pi}{12} \sqrt{9 + 9b + 3\sqrt{-9b^2 - 6b + 3}} \quad (6-31)$$

Tomando uma aproximação com quatro e cinco termos, obtém-se, respectivamente, as seguintes soluções aproximadas para o deslocamento

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x_0} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2 \right) \tau^4 - \\ \left(\frac{1}{720} + \frac{5}{144}b + \frac{17}{240}b^2 + \frac{3}{80}b^3 \right) \tau^6 \end{aligned} \quad (6-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x_0} = & 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2\right)\tau^4 - \\ & \left(\frac{1}{720} + \frac{5}{144}b + \frac{17}{240}b^2 + \frac{3}{80}b^3\right)\tau^6 + \\ & \left(\frac{1}{40320} + \frac{13}{2520}b + \frac{47}{2240}b^2 + \frac{3}{112}b^3 + \frac{7}{640}b^4\right)\tau^8 \end{aligned} \quad (6-33)$$

e também as seguintes relações frequência-amplitude,

$$\delta^6 - \frac{\pi^2}{8}\delta^4(1-b) + \frac{\pi^4}{384}\delta^2(1+4b+3b^2) - \pi^6\left(\frac{1}{46080} + \frac{5}{9216}b + \frac{17}{15360}b^2 + \frac{3}{5120}b^3\right) = 0 \quad (6-34)$$

$$\begin{aligned} \delta^8 - \frac{\pi^2}{8}\delta^6(1+b) + \frac{\pi^4}{384}\delta^4(1+4b+3b^2) - \pi^6\delta^2\left(\frac{1}{46080} + \frac{5}{9216}b + \frac{17}{15360}b^2 + \frac{3}{5120}b^3\right) + \pi^8\left(\frac{1}{10321920} + \frac{13}{645120}b + \frac{47}{573440}b^2 + \frac{3}{28672}b^3 + \frac{7}{163840}b^4\right) = 0 \end{aligned} \quad (6-35)$$

No anexo B tem-se a solução em série de Taylor da equação de Duffing (6-14).

Convergência da solução linear

Quando o parâmetro não-linear β , em (6-14), é igualado a zero, a frequência ω da solução aproximada deve ser igual à frequência da solução do problema linear, isto é, $\omega = \omega_0$. O mesmo acontece quando o deslocamento inicial é nulo, independentemente do grau de não-linearidade.

Fazendo $b = 0$, o parâmetro δ , obtido através das eqs. (6-27) e (6-30), deve ser igual a 1 para atender a relação entre δ e ω , eq. (6-22).

Substituindo $b = 0$ em (6-27), encontra-se $\delta = 1, 11$. Já Substituindo $b = 0$ em (6-30) encontram-se duas raízes para δ , a de interesse é $\delta = 0, 98$. Fazendo $b = 0$ em (6-34) e (6-35) obtém-se respectivamente $\delta = 1, 0005$ e $\delta = 0, 9999$. O último resultado é praticamente coincidente com a resposta esperada ($\delta = 1$). A tabela 6.1 exhibe estes resultados e o erro obtido com cada aproximação. Verifica-se que as aproximações são convergentes e que a aproximação com 5 termos é suficiente para se obter um valor preciso de ω .

Validação da solução linear

A solução do problema (6-14) para $\beta = 0$ é

n° de termos	δ	$ \delta - 1 $	erro (%)
2	1,110720734	0,110720734	11
3	0,986402021	0,013597978	1,36
4	1,000567233	0,000567233	0,06
5	0,999984249	0,000015750	0,0016

Tabela 6.1: Convergência da solução linear.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \tag{6-36}$$

Escrevendo (6-36) em série de Taylor, chega-se a

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \dots \tag{6-37}$$

que é a mesma série obtida com a aproximação de quatro termos, eq. (6-32), com $b = 0$.

Convergência da solução não-linear

Quando b é diferente de zero, tem-se o problema com não-linearidade. Neste caso, as soluções aproximadas necessitam de um número crescente de termos a medida que b aumenta para se obter uma solução convergente no intervalo de interesse.

A tabela (6.2) mostra a convergência do parâmetro δ com $b = 1$, obtido ao se substituir em (6-12), diferentes soluções aproximadas, com um número crescente de termos.

n° de termos	δ	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	-	-	-
6	1,357606555	0,039819994	3,02
7	1,261243896	0,056542665	4,29
8	1,334632001	0,016845440	1,28
9	1,302941478	0,014845083	1,13
10	1,324637050	0,006850489	0,52
13	1,315997839	0,001788722	0,14
16	1,318165233	0,000378672	0,03
19	1,317686254	0,000100307	0,008

Tabela 6.2: Convergência da solução não-linear para $b = 1$.

Para $b = 1$, a aproximação com cinco termos, eq. (6-35), não permite encontrar uma raiz para δ porque a solução (6-33) diverge um pouco antes

do deslocamento cortar o eixo horizontal, como mostra a figura 6.2. Já para a aproximação com seis e sete termos é possível obter aproximadamente o instante em que $x = 0$.

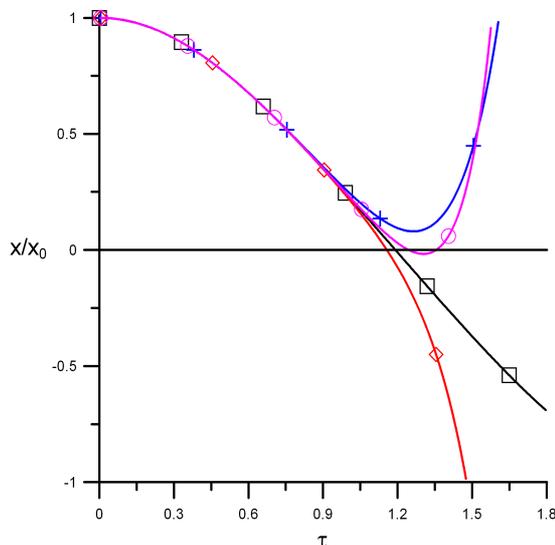


Figura 6.2: Convergência em τ das aproximações. \square , RK; $+$, Taylor com cinco termos (eq. (6-33)); \diamond , Taylor com seis termos; \circ , Taylor com sete termos.

Devido as características das potências de b nas aproximações, a velocidade de convergência da solução diminui quando este parâmetro é maior que 1, como mostra a tabela 6.3, para $b = 1, 1$. Convém salientar que $b = 1$ já representa um problema com grande não-linearidade.

n° de termos	δ	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	-	-	-
6	1,390457096	0,045216509	3,36
7	-	-	-
8	1,365417429	0,020176842	1,5
9	1,324992260	0,020248327	1,5
10	1,353916132	0,008675545	0,64
13	1,342561260	0,002679327	0,2
16	1,345724780	0,000484193	0,03
19	1,344976040	0,000264547	0,02
26	1,345132441	0,000010814	0,008

Tabela 6.3: Convergência da solução não-linear para $b = 1, 1$.

A tabela 6.4 apresenta o máximo valor de b obtido em aproximações com diferente números de termos, para que o erro em δ seja aproximadamente igual a 0,01%. A figura 6.3 exibe a curva onde o erro é aproximadamente 0,01%. Valores abaixo da curva correspondem a um erro inferior a 0,01%. Pode-se ver

n° de termos	b_{max}	δ	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	0,003	1,001040747	0,000108643	0,01
6	0,015129	1,00565916	0,000074571	0,007
7	0,050176	1,01861519	0,000080762	0,008
8	0,120409	1,04404616	0,000104425	0,01
9	0,16	1,05807185	0,000104333	0,01
10	0,25	1,08914753	0,000115775	0,01
11	0,330625	1,11621354	0,000117394	0,01
12	0,400689	1,13912456	0,000103038	0,009
13	0,501264	1,17117561	0,000109687	0,009
14	0,600625	1,20192849	0,000118381	0,01
15	0,700569	1,23200948	0,000126563	0,01
16	0,781456	1,25578985	0,000131438	0,01
17	0,861184	1,27878619	0,000120495	0,009
18	0,94090	1,30143195	0,000121088	0,009
19	1,030225	1,32612585	0,000125857	0,009
20	1,140624	1,35605640	0,000130015	0,009
21	1,279161	1,39269897	0,000125185	0,009
22	1,380625	1,41893228	0,000137869	0,01
23	1,449616	1,43647615	0,000144322	0,01

Tabela 6.4: Máximos valores do parâmetro de não-linearidade, b , para que as aproximações apresentem um erro de aproximadamente 0,01% em δ .

que a curva pode ser aproximada por uma reta, então para uma determinada não-linearidade, a equação da reta pode ser utilizada para estimar o número mínimo de termos para que a série seja precisa.

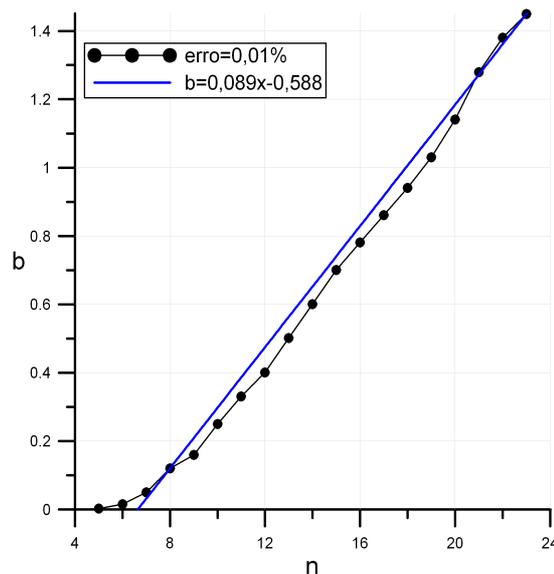


Figura 6.3: Curva correspondente a um erro inferior ou igual a 0,01%.

Validação da solução não-linear

Assumindo como exemplo $b = 1,1$ em (6-33), tem-se pelo método aqui proposto

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - 1,05\tau^2 + 0,37625\tau^4 - 0,175204167\tau^6 + 0,082753177\tau^8 \quad (6-38)$$

Para o mesmo problema, obtém-se com o HBM a seguinte solução, considerando três harmônicos.

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 0,980682954 \cos \delta\tau + 0,018957528 \cos 3\delta\tau + 0,000359517 \cos 5\delta\tau \\ \delta &= 1,345130894 \end{aligned}$$

que, escrita em série de Taylor, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 1 - 1,049699864\tau^2 + 0,373892418\tau^4 \\ &\quad - 0,167985518\tau^6 + 0,070655635\tau^8 + \dots \end{aligned} \quad (6-39)$$

Comparando (6-38) com (6-39), observa-se que os termos constantes são iguais e que o segundo e terceiro termos em ambas as soluções são bem próximos.

Já para uma aproximação com sete harmônicos, tem-se com o HBM,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 0,980676137 \cos \delta\tau + 0,018957267 \cos 3\delta\tau + \\ &\quad 0,000359641 \cos 5\delta\tau + 0,000006823 \cos 7\delta\tau + 0,000000129 \cos 9\delta\tau + \\ &\quad 0,000000002 \cos 11\delta\tau + 0,0000000005 \cos 13\delta\tau \\ \delta &= 1,345126674 \end{aligned}$$

de onde obtém-se a seguinte série de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 1 - 1,05\tau^2 + 0,376249994\tau^4 - 0,175204081\tau^6 + \\ &\quad 0,082752542\tau^8 + \dots \end{aligned} \quad (6-40)$$

Ao se comparar a série (6-40) com a solução em série de Taylor (6-38), percebe-se que, agora, aumentou-se o número de casas decimais em que os termos são coincidentes.

Cabe ressaltar que cada termo da série de Taylor (6-39) ou (6-40) tem contribuições de todos os harmônicos usados na solução aproximada com o

HBM. Assim, a medida que aumenta o número de harmônicos, os coeficientes da série correspondente à solução harmônica aproximada convergem para os valores obtidos pelo método de Taylor. Pode-se afirmar que cada termo da série de Taylor obtida pelo método proposto tem contribuição de um número infinito de harmônicos.

Por outro lado, a medida que τ cresce, a série de Taylor exige um número cada vez maior de termos para a convergência, enquanto que as soluções em termos de funções trigonométricas mantêm seu grau de aproximação para qualquer τ .

Entretanto, como tanto no caso da vibração livre quanto na forçada, todos os métodos se restringem a fornecer apenas a resposta periódica permanente, a série de Taylor pode fornecer uma solução precisa com poucos termos usando as propriedades de simetria da resposta no espaço de fase.

6.2.3

Relação entre os métodos de Taylor e LP

Mostrou-se nos capítulos anteriores a relação entre os diversos métodos e o método clássico LP. A seguir, mostra-se a correlação entre a solução obtida com o método de Taylor e a solução obtida através do método de LP.

A solução de primeira ordem encontrada com o LP para a equação de Duffing com não-linearidade cúbica é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{1}{32\omega_0^2} \beta x_0^3 \right) \cos \omega t + \frac{1}{32\omega_0^2} \beta x_0^3 \cos 3\omega t \quad (6-41)$$

onde

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0} \beta x_0^2 \quad (6-42)$$

Utilizando os parâmetros adimensionais (6-22) e (6-23) para reescrever (6-41) e (6-42), tem-se

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = \left(1 - \frac{1}{32} b \right) \cos \delta \tau + \frac{1}{32} b \cos 3\delta \tau \quad (6-43)$$

$$\delta = 1 + \frac{3}{8} b \quad (6-44)$$

Substituindo (6-44) em (6-43) e expandindo (6-43) em série de Taylor em torno de $t = 0$ e coletando os termos em b , chega-se a

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = \left(1 - \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{24} \tau^4 - \frac{1}{720} \tau^6 + \dots \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \dots\right) + \\
 & b^2\left(-\frac{21}{128}\tau^2 + \frac{49}{256}\tau^4 - \frac{379}{5120}\tau^6 + \dots\right) + \\
 & b^3\left(-\frac{9}{512}\tau^2 + \frac{99}{1024}\tau^4 - \frac{279}{4096}\tau^6 + \dots\right) + \dots \quad (6-45)
 \end{aligned}$$

A comparação da solução (6-45) com as soluções obtidas em séries de Taylor torna-se mais fácil se estas últimas também forem reescritas com os termos de mesma potência em b em evidência. Tomando a solução com quatro termos, (6-32), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6\right) + \\
 & b^2\left(\frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6\right) - \frac{3}{80}\tau^6 b^3 \quad (6-46)
 \end{aligned}$$

Pode-se observar que apenas os termos até a potência 1 em b são coincidentes. Isto ocorre porque a solução obtida com LP é de primeira ordem em b .

Considerando uma solução aproximada de terceira ordem dada pelo LP, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & \cos \delta\tau + \left(-\frac{1}{32}\cos \delta\tau + \frac{1}{32}\cos 3\delta\tau\right)b + \\
 & \left(\frac{23}{1024}\cos \delta\tau + \frac{1}{1024}\cos 5\delta\tau - \frac{3}{128}\cos 3\delta\tau\right)b^2 + \\
 & \left(-\frac{547}{32768}\cos \delta\tau + \frac{297}{16384}\cos 3\delta\tau + \frac{1}{32768}\cos 7\delta\tau - \right. \\
 & \left. \frac{3}{2048}\cos 5\delta\tau\right)b^3 \quad (6-47)
 \end{aligned}$$

$$\delta = 1 + \frac{3}{8}b - \frac{21}{256}b^2 + \frac{81}{2048}b^3 \quad (6-48)$$

Substituindo (6-48) em (6-47) e expandindo (6-47) em série de Taylor, tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & \left(1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \frac{1}{40320}\tau^8 + \dots\right) + \\
 & b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \frac{13}{2520}\tau^8 + \dots\right) + \\
 & b^2\left(\frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6 + \frac{47}{2240}\tau^8 + \dots\right) +
 \end{aligned}$$

$$b^3 \left(-\frac{3}{80}\tau^6 + \frac{3}{112}\tau^8 + \dots \right) + \frac{84723}{14680064}\tau^8 b^4 + \dots \quad (6-49)$$

A solução por Taylor com termos até τ^8 , eq. (6-33), reescrita com b em evidência, toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \frac{1}{40320}\tau^8 + \\ & \left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \frac{13}{2520}\tau^8 \right) b + \\ & \left(\frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6 + \frac{47}{2240}\tau^8 \right) b^2 + \\ & \left(-\frac{3}{80}\tau^6 + \frac{3}{112}\tau^8 \right) b^3 + \frac{7}{640}\tau^8 b^4 \end{aligned} \quad (6-50)$$

Comparando (6-49) com (6-50) pode-se ver que, novamente, para os termos com potência em b igual ou inferior à ordem da solução aproximada obtida com o LP, os resultados são coincidentes.

Para que os termos que multiplicam b^4 em (6-49) e (6-50) sejam coincidentes é necessário que a expansão em LP contemple o termo de quarta ordem. Isto quer dizer que, ao se adicionar mais um termo na série de Taylor, na verdade se está adicionando o primeiro termo da série de Taylor de um dado super-harmônico em Lindstedt-Poincaré e mais um termo em todas as séries já existentes de todos os harmônicos inferiores.

Reconstrução das soluções de LP a partir das séries de Taylor

Devido a correspondência que há entre as soluções de LP e séries de Taylor, pode-se obter a solução que seria obtida aplicando o LP a partir de uma solução escrita em série de Taylor.

Seja a aproximação em série de Taylor com cinco termos da equação de Duffing.

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \left(-\frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 \right) t^2 + \left(\frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 + \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 \right) t^4 + \left(-\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \right. \\ & \left. \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 \right) t^6 + \left(\frac{1}{40320}\omega_0^8 x_0 + \frac{13}{2520}\omega_0^6 \beta x_0^3 + \right. \\ & \left. \frac{47}{2240}\omega_0^4 \beta^2 x_0^5 + \frac{3}{112}\omega_0^2 \beta^3 x_0^7 + \frac{7}{640}\beta^4 x_0^9 \right) t^8 \end{aligned} \quad (6-51)$$

Deseja-se, por exemplo, uma solução similar à obtida com o LP com quatro

harmônicos, isto é,

$$x(t) = (a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3) \cos \omega t + (b_1\beta + b_2\beta^2 + b_3\beta^3) \cos 3\omega t + (c_2\beta^2 + c_3\beta^3) \cos 5\omega t + d_3\beta^3 \cos 7\omega t \quad (6-52)$$

com

$$\omega = w_0 + w_1\beta + w_2\beta^2 + w_3\beta^3 \quad (6-53)$$

onde os coeficientes a_i , b_i , c_i , d_i e w_i são incógnitas a serem determinadas.

A ordem da solução a ser obtida deve sempre ser, no máximo, igual à maior potência de β presente na série (6-51) menos um. Caso contrário, faltariam equações para determinar todos os coeficientes em (6-52) e (6-53).

Para cada harmônico em (6-52) tem-se que a série de Taylor é dada por

$$\cos \bar{x}t = 1 - \frac{1}{2}\bar{x}^2t^2 + \frac{1}{24}\bar{x}^4t^4 - \frac{1}{720}\bar{x}^6t^6 + \frac{1}{40320}\bar{x}^8t^8 + \dots \quad (6-54)$$

com $\bar{x} = \omega, 3\omega, 5\omega, \dots$

Substituindo (6-54) em (6-52) e eliminando na expressão resultante os termos em β com potências maiores que a ordem da solução a ser encontrada, chega-se a,

$$\begin{aligned} x(t) = & a_0 + (a_1 + b_1)\beta + (a_2 + b_2 + c_2)\beta^2 + (a_3 + b_3 + c_3 + d_3)\beta^3 - \\ & \left\{ \frac{1}{2}w_0^2a_0 + \beta \left(w_0w_1a_0 + \frac{1}{2}w_0^2a_1 + \frac{9}{2}w_0^2b_1 \right) + \beta^2 \left(\frac{25}{2}w_0^2c_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. (w_0w_2 + \frac{1}{2}w_1^2)a_0 + w_0w_1a_1 + \frac{1}{2}w_0^2a_2 + 9w_0w_1b_1 + \frac{9}{2}w_0^2b_2 \right) + \right. \\ & \left. \beta^3 \left((w_0w_3 + w_1w_2)a_0 + \left(\frac{1}{2}w_1^2 + w_0w_2 \right)a_1 + w_0w_1a_2 + \frac{1}{2}w_0^2a_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. (9w_0w_2 + \frac{9}{2}w_1^2)b_1 + 9w_0w_1b_2 + \frac{9}{2}w_0^2b_3 + 25w_0w_1c_2 + \frac{25}{2}w_0^2c_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{49}{2}w_0^2d_3 \right) \right\} t^2 + \left\{ \frac{1}{24}w_0^4a_0 + \left(\frac{1}{6}w_0^3w_1a_0 + \frac{1}{24}w_0^4a_1 + \frac{27}{8}w_0^4b_1 \right) \beta + \right. \\ & \left(\left(\frac{1}{4}w_0^2w_1^2 + \frac{1}{6}w_0^3w_2 \right)a_0 + \frac{1}{6}w_0^3w_1a_1 + \frac{1}{24}w_0^4a_2 + \frac{27}{2}w_0^3w_1b_1 + \right. \\ & \left. \frac{27}{8}w_0^4b_2 + \frac{625}{24}w_0^4c_2 \right) \beta^2 + \left(\left(\frac{1}{6}w_0w_1^3 + \frac{1}{6}w_0^3w_3 + \frac{1}{2}w_0^2w_1w_2 \right)a_0 + \right. \\ & \left(\frac{1}{6}w_0^3w_2 + \frac{1}{4}w_0^2w_1^2 \right)a_1 + \frac{1}{6}w_0^3w_1a_2 + w_0^4 + \frac{1}{24}w_0^4a_3 + \\ & \left(\frac{81}{4}w_0^2w_1^2 + \frac{27}{2}w_0^3w_2 \right)b_1 + \frac{27}{2}w_0^3w_1b_2 + \frac{27}{8}w_0^4b_3 + \\ & \left. \left. \frac{625}{6}w_0^3w_1c_2 + \frac{625}{24}w_0^4c_3 + \frac{2401}{24}w_0^4d_3 \right) \beta^3 \right\} t^4 - \left\{ \frac{1}{720}w_0^6a_0 + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{720}w_0^6a_1 + \frac{81}{80}w_0^6b_1 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_0 \right) \beta + \left(\left(\frac{1}{48}w_0^4w_1^2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{120}w_0^5w_2)a_0 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_1 + \frac{1}{720}w_0^6a_2 + \frac{243}{40}w_0^5w_1b_1 + \\
 & \frac{81}{80}w_0^6b_2 + \frac{3125}{144}w_0^6c_2)\beta^2 + \left(\frac{1}{120}w_0^5w_3 + \frac{1}{36}w_0^3w_1^3 + \right. \\
 & \frac{1}{24}w_0^4w_1w_2)a_0 + \left(\frac{1}{48}w_0^4w_1^2 + \frac{1}{120}w_0^5w_2\right)a_1 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_2 + \\
 & \left.\left(\frac{1}{720}w_0^6a_3 + \left(\frac{243}{16}w_0^4w_1^2 + \frac{243}{40}w_0^5w_2\right)b_1 + \frac{243}{40}w_0^5w_1b_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{81}{80}w_0^6b_3 + \frac{3125}{24}w_0^5w_1c_2 + \frac{3125}{144}w_0^6c_3 + \frac{117649}{720}d_3w_0^6\right)\beta^3\right\}t^6 \\
 & + \left\{ \frac{1}{40320}w_0^8a_0 + \left(\frac{1}{5040}w_0^7w_1a_0 + \frac{1}{40320}w_0^8a_1 + \frac{729}{4480}w_0^8b_1\right)\beta + \right. \\
 & \left(\frac{1}{1440}w_0^6w_1^2 + \frac{1}{5040}w_0^7w_2\right)a_0 + \frac{1}{5040}w_0^7w_1a_1 + \frac{1}{40320}w_0^8a_2 + \\
 & \frac{729}{560}w_0^7w_1b_1 + \frac{729}{4480}w_0^8b_2 + \frac{78125}{8064}w_0^8c_2)\beta^2 + \\
 & \left(\frac{1}{5040}w_0^7w_3 + \frac{1}{5040}w_0^7w_3 + \frac{1}{720}w_0^5w_1^3 + \frac{1}{720}w_0^6w_1w_2\right)a_0 + \\
 & \left(\frac{1}{1440}w_0^6w_1^2 + \frac{1}{5040}w_0^7w_2\right)a_1 + \frac{1}{5040}w_0^7w_1a_2 + \frac{1}{40320}w_0^8a_3 + \\
 & \left(\frac{729}{160}w_0^6w_1^2 + \frac{729}{560}w_0^7w_2\right)b_1 + \frac{729}{560}w_0^7w_1b_2 + \frac{729}{4480}w_0^8b_3 + \\
 & \left. \frac{78125}{1008}w_0^7w_1c_2 + \frac{78125}{8064}w_0^8c_3 + \frac{823543}{5760}d_3w_0^8\right)\beta^3\left\}t^8 \right. \quad (6-55)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Igualando os termos de mesma potência em t em (6-55) e (6-51), obtêm-se um sistema de cinco equações. Em cada uma destas equações, igualando, a seguir, os termos de mesma potência em β , obtêm-se quatro novas equações.

A seguinte equação é obtida dos termos em t^0 ,

$$x_0 = a_0 + (a_1 + b_1)\beta + (a_2 + b_2 + c_2)\beta^2 + (a_3 + b_3 + c_3 + d_3)\beta^3 \quad (6-56)$$

Igualando os termos de mesma potência em β , tem-se

$$\begin{aligned}
 a_0 &= x_0 \\
 a_1 + b_1 &= 0 \\
 a_2 + c_2 + b_2 &= 0 \\
 b_3 + a_3 + d_3 + c_3 &= 0
 \end{aligned}$$

onde a primeira equação já permite determinar o valor de a_0 .

Igualando os termos em t^2 nas eqs. (6-55) e (6-51), e, posteriormente, igualando os termos de mesma potência em β , tem-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\omega_0^2x_0 &= -\frac{1}{2}\omega_0^2x_0 \\
 -4\omega_0^2b_1 - \omega_0w_1x_0 &= -\frac{1}{2}\beta x_0^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8\omega_0 w_1 b_1 - \frac{1}{2} w_1^2 x_0 - \omega_0 w_2 x_0 - 12\omega_0^2 c_2 - 4\omega_0^2 b_2 = 0 \\
 & -8\omega_0 w_2 b_1 - w_1 w_2 x_0 - \omega_0 w_3 x_0 - 4\omega_0^2 b_3 - 24d_3 \omega_0^2 - 12\omega_0^2 c_3 - \\
 & 8\omega_0 w_1 b_2 - 24\omega_0 w_1 c_2 - 4w_1^2 b_1 = 0
 \end{aligned} \tag{6-57}$$

onde a primeira eq. em (6-57) é uma identidade e deve ser, portanto, desconsiderada.

A partir de (6-57) pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{8\omega_0^2} x_0^3 - \frac{1}{4\omega_0} w_1 x_0 \\
 b_2 &= -\frac{1}{4\omega_0^3} w_1 x_0^3 + \frac{3}{8\omega_0^2} w_1^2 x_0 - \frac{1}{4\omega_0} w_2 x_0 - 3c_2 \\
 b_3 &= \frac{3}{8\omega_0^4} w_1^2 x_0^3 - \frac{1}{2\omega_0^3} w_1^3 x_0 - 6d_3 - 3c_3 + \\
 & \quad \frac{3}{4\omega_0^2} w_1 w_2 x_0 - \frac{1}{4\omega_0^3} w_2 x_0^3 - \frac{1}{4\omega_0} w_3 x_0
 \end{aligned}$$

Igualando os termos em t^4 nas eqs.(6-55) e (6-51) e igualando os termos de mesma potência em β , tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{5}{12} \omega_0^2 x_0^3 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_1 x_0 &= \frac{1}{6} \omega_0^2 x_0^3 \\
 -\frac{11}{6} \omega_0^2 w_1^2 x_0 + 16\omega_0^4 c_2 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_2 x_0 + \frac{5}{6} \omega_0 w_1 x_0^3 &= \frac{1}{8} x_0^5 \\
 \frac{5}{12} w_1^2 x_0^3 + \frac{5}{6} \omega_0 x_0^3 w_2 + 64\omega_0^3 w_1 c_2 - \frac{3}{2} \omega_0 w_1^3 x_0 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_3 x_0 + \\
 16\omega_0^4 c_3 + 80d_3 \omega_0^4 - \frac{11}{3} \omega_0^2 w_1 w_2 x_0 &= 0
 \end{aligned}$$

de onde se determina

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{3}{8\omega_0} x_0^2 \\
 c_2 &= \frac{9}{2048\omega_0^4} x_0^5 + \frac{1}{24\omega_0} w_2 x_0 \\
 c_3 &= -\frac{87}{16384\omega_0^6} x_0^7 - \frac{11}{384\omega_0^3} w_2 x_0^3 + \frac{1}{24\omega_0} w_3 x_0 - 5d_3
 \end{aligned}$$

Igualando agora os termos em t^6 nas eqs. (6-55) e (6-51) e posteriormente igualando os termos de mesma potência em β , tem-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{11}{96} \omega_0^2 x_0^5 - \frac{8}{15} \omega_0^5 w_2 x_0 &= -\frac{17}{240} \omega_0^2 x_0^5 \\
 -\frac{89}{1024} x_0^7 - 64d_3 \omega_0^6 - \frac{8}{15} w_3 x_0 \omega_0^5 - \frac{53}{60} w_2 x_0^3 \omega_0^3 &= \frac{3}{80} x_0^7
 \end{aligned}$$

Com isso tem-se que

$$w_2 = -\frac{21}{256\omega_0^3}x_0^4$$

$$d_3 = \frac{59}{163840\omega_0^6}x_0^7 - \frac{1}{120\omega_0}w_3x_0$$

Finalmente, igualando os termos em t^8 nas eqs. (6-55) e (6-51) encontra-se mais uma equação. Nesta nova equação, igualando os termos de mesma potência em β , tem-se

$$-\frac{16}{35}\omega_0^7w_3x_0 + \frac{201}{4480}\omega_0^2x_0^7 = \frac{3}{112}\omega_0^2x_0^7$$

necessária para se obter w_3 ,

$$w_3 = \frac{81}{2048\omega_0^5}x_0^6$$

Assim todas as incógnitas em (6-52) e (6-53) estão determinadas, obtendo-se

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{1}{32\omega_0^2}x_0^3\beta + \frac{23}{1024\omega_0^4}x_0^5\beta^2 - \frac{547}{32768\omega_0^6}x_0^7\beta^3\right) \cos \omega t +$$

$$\left(\frac{1}{32\omega_0^2}x_0^3\beta - \frac{3}{128\omega_0^4}x_0^5\beta^2 + \frac{297}{16384\omega_0^6}x_0^7\beta^3\right) \cos 3\omega t +$$

$$\left(\frac{1}{1024\omega_0^4}x_0^5\beta^2 - \frac{3}{2048\omega_0^6}x_0^7\beta^3\right) \cos 5\omega t +$$

$$\frac{1}{32768\omega_0^6}x_0^7\beta^3 \cos 7\omega t$$
(6-58)

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}x_0^2\beta - \frac{21}{256\omega_0^3}x_0^4\beta^2 + \frac{81}{2048\omega_0^5}x_0^6\beta^3$$
(6-59)

Escrevendo (6-59) em termos dos parâmetros adimensionais, tem-se

$$\delta = 1 + \frac{3}{8}b - \frac{21}{256}b^2 + \frac{81}{2048}b^3$$
(6-60)

A figura 6.4(a) exhibe as curvas obtidas com as eqs. (6-60) e (6-35). Com a eq. (6-35) foi possível se obter respostas para δ somente até $b = 0,69$. A curva obtida a partir de (6-60), mostra-se melhor. Já na figura 6.4(b), adicionou-se mais um termo na série de Taylor e conseqüentemente foi possível se obter uma solução de LP contendo um harmônico a mais. Os resultados obtidos com o LP são melhores que os obtidos com séries de Taylor somente em um pequeno intervalo de valores de b . A partir disto, a solução em série de Taylor apresenta melhores resultados. Nota-se que um pequeno número de termos na série de

Taylor é suficiente para se obter soluções precisas até valores elevados de b .

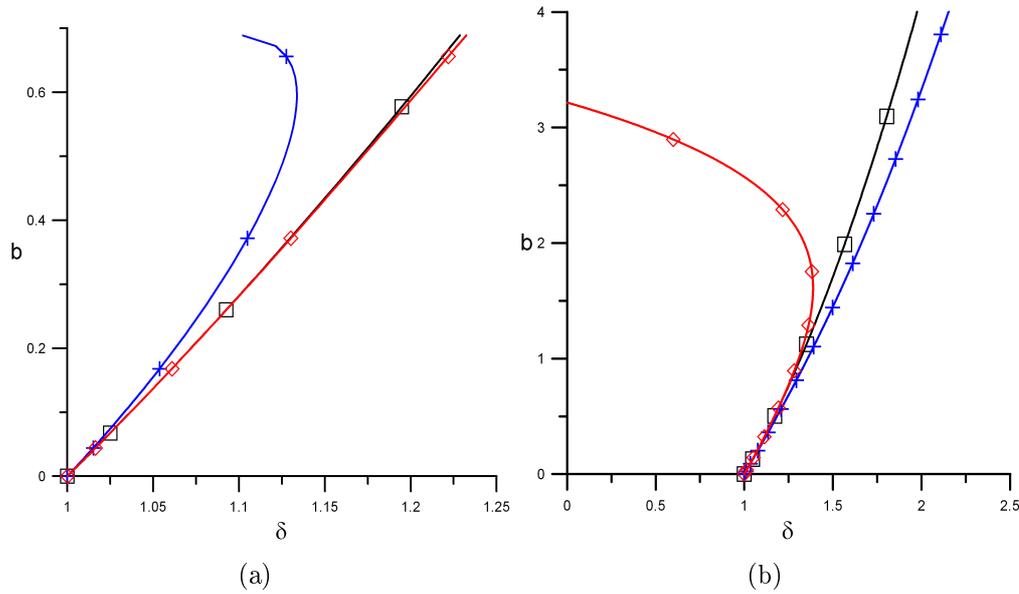


Figura 6.4: Soluções aproximadas, \square , RK. (a) +, Taylor com cinco termos, eq. (6-35); \diamond ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com cinco termos, eq. (6-60); (b) +, Taylor com seis termos; \diamond ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com seis termos.

No item 4 do anexo B tem-se o procedimento que obtém as soluções de LP a partir de séries de Taylor.

6.2.4 Soluções em série de Fourier a partir da série de Taylor

Como foi visto através das eqs. (6-38) e (6-40), há uma correspondência entre a série de Taylor de uma solução obtida com o HBM e a solução do método de Taylor. Então, a série de Taylor também pode ser utilizada para se obter soluções em séries de Fourier.

Igualando os termos de mesma potência em t da solução em série de Taylor e da série de Taylor obtida a partir de uma série de Fourier, pode-se determinar as amplitudes e a frequência da série de Fourier. Considerando uma série de Fourier com os três primeiros harmônicos, tem-se,

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_5 \cos 5\omega t \tag{6-61}$$

e escrevendo (6-61) em série de Taylor, tem-se

$$x(t) = a_1 + a_3 + a_5 - \left(a_1 + 9a_3 + 25a_5 \right) \frac{\omega^2 t^2}{2} + \left(a_1 + 81a_3 + \right.$$

$$625a_5 \frac{\omega^4 t^4}{24} - \left(a_1 + 729a_3 + 15625a_5 \right) \frac{\omega^6 t^6}{720} + \dots \quad (6-62)$$

Igualando os primeiros termos de mesma potência em t de (6-62) e da solução em série de Taylor para a equação de Duffing,

$$x(t) = x_0 - \left(\omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3 \right) \frac{t^2}{2} + \left(\omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \right) \frac{t^4}{24} - \left(\omega_0^6 x_0 + 25\omega_0^4 \beta x_0^3 + 51\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 + 27\beta^3 x_0^7 \right) \frac{t^6}{720} + \dots \quad (6-63)$$

obtém-se o seguinte sistema,

$$x_0 = a_1 + a_3 + a_5 \quad (6-64)$$

$$-\frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 = -\frac{25}{2}a_5 \omega^2 - \frac{1}{2}a_1 \omega^2 - \frac{9}{2}a_3 \omega^2 \quad (6-65)$$

$$\frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 + \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 + \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 = \frac{625}{24}a_5 \omega^4 + \frac{27}{8}a_3 \omega^4 + \frac{1}{24}a_1 \omega^4 \quad (6-66)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 \\ & = -\frac{81}{80}a_3 \omega^6 - \frac{3125}{144}a_5 \omega^6 - \frac{1}{720}a_1 \omega^6 \end{aligned} \quad (6-67)$$

que permitem determinar as amplitudes dos harmônicos e a frequência da solução (6-61).

Com as eqs. (6-64) a (6-66) monta-se um sistema linear,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & -\frac{9}{2}\omega^2 & \frac{25}{2}\omega^2 \\ \frac{1}{24}\omega^4 & \frac{27}{8}\omega^4 & \frac{625}{24}\omega^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 + \frac{1}{2}\beta x_0^3 \\ -\frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 - \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 - \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 \end{bmatrix}$$

cujas soluções fornece

$$a_1 = \left(\frac{75}{64} - \frac{17\omega_0^2}{96\omega^2} + \frac{\omega_0^4}{192\omega^4} \right) x_0 + \left(-\frac{17}{96\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{48\omega^4} \right) \beta x_0^3 + \frac{\beta^2 x_0^5}{64\omega^4} \quad (6-68)$$

$$a_3 = \left(\frac{13\omega_0^2}{64\omega^2} - \frac{25}{128} - \frac{\omega_0^4}{128\omega^4} \right) x_0 + \left(\frac{13}{64} - \frac{\omega_0^2}{32\omega^2} \right) \frac{\beta x_0^3}{\omega^2} - \frac{3\beta^2 x_0^5}{128\omega^4} \quad (6-69)$$

$$a_5 = \left(\frac{3}{128} - \frac{5\omega_0^2}{192\omega^2} + \frac{\omega_0^4}{384\omega^4} \right) x_0 + \left(-\frac{5}{192} + \frac{\omega_0^2}{96\omega^2} \right) \frac{\beta x_0^3}{\omega^2} + \frac{\beta^2 x_0^5}{128\omega^4} \quad (6-70)$$

A eq. (6-67) é então utilizada para a determinação da relação frequência-amplitude. Substituindo (6-68) a (6-70) em (6-67) obtém-se,

$$-\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 = \left(\frac{259\omega^2 \omega_0^2}{720} - \right.$$

$$\left(\frac{5\omega^4}{16} - \frac{7\omega_0^4}{144}\right)\omega^2 x_0 + \left(\frac{259}{720}\omega^2 - \frac{7\omega_0^2}{36}\right)\omega^2 \beta x_0^3 - \frac{7\omega^2 \beta^2 x_0^5}{48} \quad (6-71)$$

que é mais exata que a relação ω - x_0 que pode ser obtida ao se aplicar o conceito de simetria à solução (6-63).

Utilizando menos harmônicos em (6-61), é possível se obter expressões analíticas para ω ou δ . Assim, para (6-61) com somente os dois primeiros harmônicos, encontra-se a seguinte solução para os deslocamentos

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8\delta^2}b - \frac{1}{8\delta^2}\right) \cos \delta\tau + \left(\frac{1}{8\delta^2}b - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\delta^2}\right) \cos 3\delta\tau$$

e a seguinte relação frequência-amplitude

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{3} \sqrt{5 + 5b + \sqrt{16 + 14b - 2b^2}} \quad (6-72)$$

Utilizando apenas o primeiro harmônico em (6-61) encontra-se a relação,

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + b} \quad (6-73)$$

e a correspondente solução no tempo

$$\frac{x}{x_0} = \cos \delta\tau \quad (6-74)$$

A vantagem do presente método sobre o HBM é que, neste método, os coeficientes dos harmônicos são obtidos através de um sistema de equações lineares, enquanto que no HBM, obtém-se um sistema não-linear.

Convém ressaltar que os coeficientes dos harmônicos a_i aqui determinados não são iguais aos determinados através do HBM. Entretanto, a diferença entre os coeficientes obtidos através dos dois métodos, diminui a medida que o número de harmônicos cresce nas duas aproximações.

Isto acontece porque, a medida que mais harmônicos são acrescentados na solução do HBM, a série de Taylor desta solução torna-se cada vez mais próxima da solução do método de Taylor. Isto é, a série de Taylor obtida a partir de uma solução do HBM que possui ou não todos os harmônicos relevantes para o cálculo da amplitude da resposta, não é exata. A diferença entre os termos correspondentes destas séries é crescente, como já foi mostrado através das eqs. (6-38), (6-39) e (6-40).

Como exemplo tem-se

$$x'' + x + 1,1x^3 = 0 \quad (6-75)$$

onde $x(t)$ passou a ser escrito como $x(\tau)$ através da transformação $\tau = \omega_0 t$.

Utilizando uma aproximação contendo três harmônicos, para a solução da eq. (6-75),

$$x(\tau) = a_1 \cos \delta\tau + a_3 \cos 3\delta\tau + a_5 \cos 5\delta\tau$$

as respostas obtidas aplicando o HBM e as eqs. (6-68) a (6-71) são apresentadas, respectivamente, nas segunda e terceira colunas da tabela 6.5. Observa-se que a diferença entre as amplitudes é crescente.

harmônico i	HBM a_i	Taylor a_i	dif. (%)
1	0,9806829543	0,9810838194	0,04
3	0,0189575282	0,0184871156	2,48
5	0,0003595175	0,0429064999	19,3

Tabela 6.5: Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida com o HBM.

Já ao se comparar as soluções de mais alta ordem, verifica-se que a diferença na amplitude de cada harmônico diminui, como mostrado na tabela 6.6, onde as amplitudes das soluções de cinco harmônicos são comparadas.

harmônico i	HBM a_i	Taylor a_i	dif. (%)
1	0,9806761397	0,9806797579	0,0004
3	0,0189572665	0,0189527993	0,02
5	0,0003596415	0,0003607078	2,96
7	0,0000068227	0,0000065676	3,74
9	0,0000001294	0,0000001673	29

Tabela 6.6: Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida pelo HBM.

Como já mencionado, a relação frequência-amplitude obtida ao se transformar a solução em série de Taylor em uma série de Fourier é mais precisa que relação frequência-amplitude obtida ao se aplicar as propriedades de simetria à solução em série, como mostra a figura 6.5, que apresenta o erro obtido no cálculo de δ com a aproximação em série de Taylor com 16 termos e o erro obtido com a solução de 15 harmônicos, gerada a partir desta série de 16 termos.

Esta melhoria ocorre principalmente nos casos em que a série de potências diverge antes de atingir um quarto de período, sendo assim impossível se obter uma estimativa para a frequência da resposta com o método de Taylor. Ao se determinar a série de Fourier que gera a solução em série de Taylor, sempre

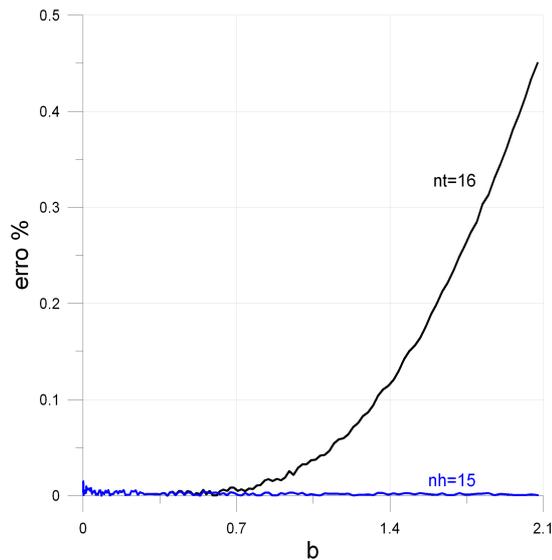


Figura 6.5: Variação do erro em δ obtidos com a aproximação em série (dezesseis termos) e com a solução harmônica contruída a partir desta série (quinze harmônicos).

se obtém uma estimativa para freqüência da resposta, conforme mostrado na figura 6.6, onde é apresentado uma série de Taylor com 5 termos, que diverge antes do instante $t = T/4$, mas que pode ser utilizada para escrever uma série de Fourier com quatro harmônicos que converge para todo o período.

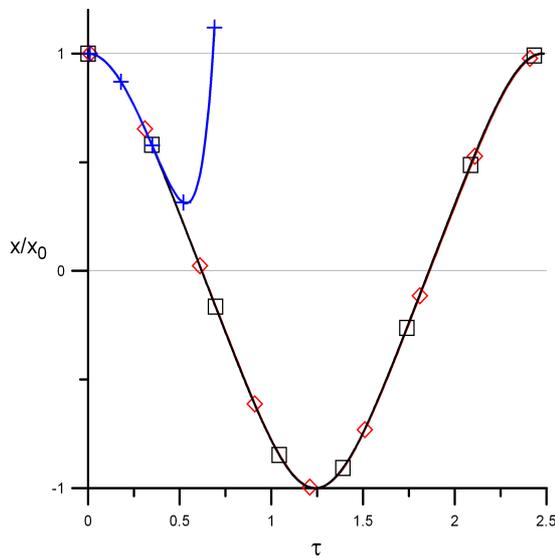


Figura 6.6: Solução no tempo do problema $x'' + x + 7.5x^3 = 0$ para as condições iniciais (1,0): \square , RK; +, Taylor com cinco termos; \diamond , série de Fourier com quatro harmônicos.

No item 3.2 do anexo B tem-se o procedimento que transforma a solução em série de Taylor em uma série de Fourier.

6.2.5 Aproximações de Padé

Segundo Richards (2002)[81], aproximações por funções racionais, tais como funções de Padé, são algumas vezes bem superiores às séries de potências.

O método de obtenção da aproximação de Padé se dá pela substituição da série de potência $\sum_{n=0}^N a_n t^n$ por uma razão de polinômios

$$P_M^N = \frac{\sum_{i=0}^N A_i t^i}{\sum_{j=0}^M B_j t^j} \quad (6-76)$$

onde se impõe $B_0 = 1$. Seguindo o procedimento apresentado por Richards (2002)[81], fazendo $M = N$ ao igualar (6-76) à série de potência já determinada e coletando as mesmas potências em t , chega-se a um sistema linear de $2N + 1$ equações que permite determinar os coeficientes A_i e B_i em função dos coeficientes a_n da série de potência. O Maple permite a obtenção destas séries de Padé, onde se pode inclusive, variar os parâmetros M e N . Quando M e N não são informados, o Maple atribui automaticamente os valores de M e N , sendo que M é sempre igual a N .

A série de Taylor contendo apenas dois termos não pode ser transformada em uma série de Padé. A solução em série de Taylor com três termos, eq. (6-29), quando transformada em uma série de Padé de acordo com os parâmetros default do Maple é

$$5\pi^2 - 48\delta^2 + 3\pi^2 b = 0 \quad (6-77)$$

Novamente, utilizando os parâmetros default do Maple, as séries de Padé obtidas a partir das séries de Taylor com quatro e cinco termos são, respectivamente

$$5\pi^2 - 48\delta^2 + 3\pi^2 b = 0 \quad (6-78)$$

$$\begin{aligned} &313\pi^4 + 3894\pi^4 b - 27600\pi^2 \delta^2 + 92880\pi^2 \delta^2 b + 241920\delta^4 + \\ &6840\pi^4 b^2 + 3618\pi^4 b^3 - 1451520\delta^4 b + 144720\pi^2 \delta^2 b^2 + \\ &567\pi^4 b^4 + 45360\pi^2 \delta^2 b^3 - 725760\delta^4 b^2 = 0 \end{aligned} \quad (6-79)$$

A tabela 6.7 apresenta a convergência, do caso linear ($b = 0$), das séries de Padé geradas com os parâmetros default do Maple e comparadas com a convergência das séries de Taylor. Pode-se ver que as séries de Padé apresentam piores resultados.

Já para o caso não-linear com $b = 1$, as séries de Padé obtidas com

n° de termos	δ_{taylor}	erro (%)	δ_{pade}	erro (%)
2	1,110720734	11	-	-
3	0,986402021	1,36	1,013944669	1,39
4	1,000567233	0,06	1,013944669	1,39
5	0,999984249	0,0016	0,999981166	0,0019
7	0,999999996	0	-	-

Tabela 6.7: Convergência da série de Padé (solução linear).

os parâmetros default do Maple obtiveram melhores resultados que as série de Taylor, como mostrado na tabela 6.8. Os resultados podem ser ainda melhorados ao se escolher os valores de M e N , como mostra a tabela 6.9.

n° de termos	δ_{taylor}	erro (%)	δ_{pade}	erro (%)
4	-	-	1,282549831	2,67
5	-	-	1,319949652	0,16
6	1,357606555	3,02	1,319949652	0,16
7	1,261243896	4,29	1,317794830	0,0006

Tabela 6.8: Convergência da série de Padé do problema não-linear, $b = 1$.

6.2.6 Vibração Forçada

No problema de vibração forçada, se assume que o período da resposta permanente seja igual ao período da excitação. Então, o que se procura no problema de vibração forçada são as condições iniciais x_0 e v_0 que tornam a solução aproximada estacionária, isto é, as coordenadas do ponto fixo da seção de Poincaré.

Analisando primeiramente o problema sem amortecimento,

$$f(\ddot{x}, x, t) = 0 \tag{6-80}$$

as propriedades de simetria utilizadas no problema de vibração livre permanecem aplicáveis pois tem-se para o ponto fixo que $v_0 = 0$. Nos casos em que a não-linearidade em (6-80) é ímpar, se pode escrever que

$$x(T/4) = 0 \tag{6-81}$$

n° de termos	δ_{pade} (Tab. 6.8)	erro (%)	$\bar{\delta}_{pade}$ (com M e N)	$ \bar{\delta}_{pade} - \delta_{exato} $	erro (%)	M	N
4	1,28254983	2,67	1,32164066	0,00385410	0,29	4	2
5	1,31994965	0,16	1,31994965	0,00216309	0,16	4	4
6	1,31994965	0,16	1,31774659	0,00003997	0,003	4	6
7	1,31779483	0,0006	1,31774659	0,00003997	0,003	4	6

Tabela 6.9: Convergência da série de Padé, tendo um número variável de termos no numerador, do problema não-linear $b = 1$.

Em se tratando de não-linearidade par, tem-se

$$\dot{x}(T/2) = 0 \tag{6-82}$$

Deve ser observado que (6-81) e (6-82) são iguais às equações utilizadas para determinar ω no problema de vibração livre com duas, ou uma, simetrias respectivamente. A única diferença está na aplicação: agora estas equações são utilizadas para determinar x_0 .

Já na presença do amortecimento, a coordenada de velocidade do ponto fixo deixa de ser zero e, portanto, agora são necessárias duas equações para determinar as coordenadas do ponto fixo. Novamente a figura 6.1 pode ser utilizada para determinar estas equações. Pode-se ver que para condições iniciais tendo $v_0 \neq 0$, as igualdades (6-81) e (6-82) não são mais válidas. Porém, as propriedades de simetria da resposta no plano de fase indicam, para o caso de não-linearidade ímpar, as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} x(T/2) &= -x_0 \\ \dot{x}(T/2) &= -v_0 \end{aligned} \tag{6-83}$$

e para não-linearidades pares, há simetria apenas na velocidade

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0 \\ \dot{x}(T/2) &= -v_0 \end{aligned} \tag{6-84}$$

As eqs. (6-83) e (6-84) também são válidas para o problema forçado amortecido, sendo que o sistema (6-84) necessita de um número maior de termos na solução em série que em (6-83), porque a aproximação para o deslocamento é avaliada em $t = T$.

Entretando, como mostrado na figura 6.7, em alguns casos, tais como ressonâncias de ordem mais altas, a resposta no plano de fase não apresenta

nenhuma simetria. Então nestes casos, deve-se utilizar a periodicidade da resposta, isto é,

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0 \\ \dot{x}(T) &= v_0 \end{aligned} \tag{6-85}$$

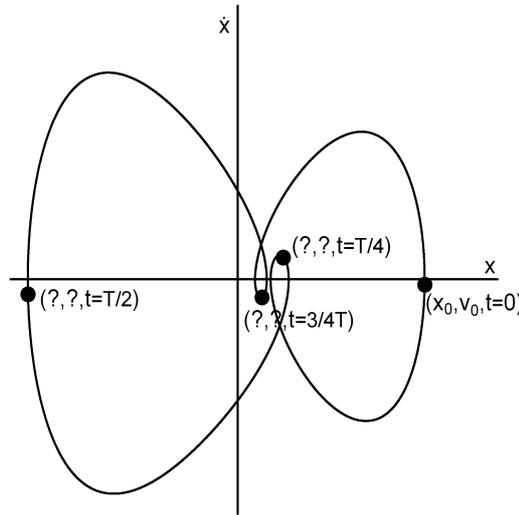


Figura 6.7: Plano de fase de um problema forçado amortecido e com não-linearidade ímpar.

Uma forma de se utilizar a eq. (6-81) ou (6-82) como aproximação para o problema não-linear amortecido, é inserindo um ângulo de fase ϕ na excitação. O ângulo de fase permite mudar a posição do ponto fixo da solução permanente. Isto faz com que se possa impor $v_0 = 0$, permitindo que as eqs. (6-81) e (6-82) sejam usadas na região da primeira ressonância.

Considerando que $x(T/4) = 0$ é verdadeiro para o problema não-linear amortecido, $\ddot{x}(T/4)$ também será nulo porque x é periódica. Assim tem-se as seguintes equações para não-linearidade ímpar,

$$\begin{aligned} x(T/4) &= 0 \\ f(\dot{x}(T/4), T/4, \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{6-86}$$

Da mesma forma, para o caso de não-linearidade par, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(T/2) &= 0 \\ f(\ddot{x}(T/2), x(T/2), T/2, \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{6-87}$$

Ao se inserir o ângulo de fase ϕ , obtém-se um sistema de equações que não fornece, como solução, as coordenadas x_0 e v_0 do ponto fixo, mas sim, um x'_0 e um ϕ . Onde x'_0 é o deslocamento máximo.

6.2.7 Equação de Duffing

Considera-se agora o problema forçado-amortecido. Seja a equação

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \quad (6-88)$$

Utilizando uma aproximação com quatro termos com centro em $t = 0$, tem-se

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0}t^3 \quad (6-89)$$

Da eq. (6-88), tem-se

$$\ddot{x} = F \cos \Omega t - 2\zeta\omega_0\dot{x} - \omega_0^2x - \beta x^3 \quad (6-90)$$

que avaliado no instante inicial $t_0 = 0$, leva a

$$\ddot{x}(0) = F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3 \quad (6-91)$$

Derivando (6-90) em relação ao tempo, obtém-se,

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = -F\Omega \sin \Omega t - 2\zeta\omega_0\ddot{x} - \omega_0^2\dot{x} - 3\beta x^2\dot{x} \quad (6-92)$$

Substituindo (6-90) em (6-92) e avaliando no instante $t = 0$, tem-se,

$$\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0} = 4\zeta^2\omega_0^2v_0 + (2\omega_0^3x_0 + 2\omega_0\beta x_0^3 - 2\omega_0F)\zeta - (\omega_0^2 + 3\beta x_0^2)v_0 \quad (6-93)$$

Substituindo (6-93) e (6-91) em (6-89), obtém-se finalmente a aproximação para os deslocamentos,

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + v_0t + \frac{1}{2!}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t^2 \\ & + \frac{1}{3!}(4\zeta^2\omega_0^2v_0 + 2\zeta\omega_0^3x_0 + 2\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0 - \\ & 2\zeta\omega_0F)t^3 \end{aligned} \quad (6-94)$$

Derivando (6-94) em relação a t , tem-se a aproximação para a velocidade

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & v_0 + (F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t + \frac{1}{2}(-2\zeta\omega_0F + \\ & 4\zeta^2\omega_0^2v_0 + 2\zeta\omega_0^3x_0 + 2\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0)t^2 \end{aligned} \quad (6-95)$$

Substituindo (6-94) e (6-95) nas eqs. (6-83), chega-se ao sistema de equações

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\pi^2}{2\Omega^2}\beta + \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left(2 - \frac{\pi^2}{2\Omega^2}\omega_0^2 + \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left(\frac{\pi}{\Omega} - \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0 + \frac{\pi^3\omega_0^2}{3\Omega^3} \left(2\zeta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^3}{2\Omega^3}\beta x_0^2 \right)v_0 + \end{aligned} \quad (6-96)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2\Omega^2}F - \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0F = 0 \\ & \left(-\frac{\pi}{\Omega}\beta + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left(-\frac{\pi}{\Omega}\omega_0^2 + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left(2 - 2\frac{\pi}{\Omega}\zeta\omega_0 + \frac{\pi^2\omega_0^2}{\Omega^2} \left(2\zeta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3\pi^2}{2\Omega^2}\beta x_0^2 \right)v_0 + \end{aligned} \quad (6-97)$$

$$\frac{\pi}{\Omega}F - \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0F = 0$$

que permitem obter, de forma aproximada, as coordenadas do ponto fixo, x_0 e v_0 .

Inserindo um ângulo de fase em (6-88), tem-se,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos(\Omega t + \phi) \quad (6-98)$$

cuja solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \left(\frac{1}{2}F \cos \phi - \frac{1}{2}\omega_0^2x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 \right)t^2 + \left(\frac{1}{3}\zeta\omega_0^3x_0 - \right. \\ & \left. \frac{1}{6}F\Omega \sin \phi - \frac{1}{3}\zeta\omega_0F \cos \phi + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 \right)t^3 \end{aligned} \quad (6-99)$$

Derivando (6-99) em relação a t , obtém-se a aproximação para a velocidade,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (F \cos \phi - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t + \left(\zeta\omega_0^3x_0 - \frac{1}{2}F\Omega \sin \phi - \right. \\ & \left. \zeta\omega_0F \cos \phi + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 \right)t^2 \end{aligned} \quad (6-100)$$

Substituindo (6-99) e (6-100) nas eqs. (6-86), obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\pi^2}{8\Omega^2}\beta + \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left(-\frac{\pi^2}{8\Omega^2}\omega_0^2 + 1 + \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left(\frac{\pi^2}{8\Omega^2}F - \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0F \right) \cos \phi - \frac{\pi^3}{48\Omega^2}F \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (6-101)$$

$$\begin{aligned} & \left(\zeta\pi\frac{\omega_0}{\Omega}F - \frac{1}{2\Omega^2}\zeta^2\omega_0^2\pi^2F \right) \cos \phi + \left(F - \frac{1}{4\Omega}\zeta\omega_0\pi^2F \right) \sin \phi + \\ & \left(-\zeta\pi\frac{\pi\omega_0}{\Omega}\beta + \frac{1}{2\Omega^2}\zeta^2\omega_0^2\pi^2\beta \right)x_0^3 + \left(-\zeta\pi\frac{\omega_0^3}{\Omega} + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{1}{2\Omega^2} \zeta^2 \omega_0^4 \pi^2 \right) x_0^3 = 0 \quad (6-102)$$

que levam a melhores resultados que as eqs. (6-96) e (6-97) para pequenos valores de não-linearidade ou amortecimento, pois foram obtidas avaliando as funções aproximadas em $T/4$.

Inserindo em (6-96), (6-97), (6-101) e (6-102) os seguintes parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Omega}{\omega_0} \\ b &= \frac{\beta x_0^2}{\omega_0^2} \\ f &= \frac{F}{x_0 \omega_0^2} \\ v &= \frac{v_0}{u_0 \omega_0} \end{aligned} \quad (6-103)$$

obtêm-se para as eqs. (6-96) e (6-97)

$$\begin{aligned} &\left(-\delta\pi^2\zeta + \frac{2\pi^3}{3}\zeta^2 + \delta^2\pi - \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^3}{2}b \right)v + \left(-\frac{\pi^3}{3}\zeta + \frac{\pi^2}{2}\delta \right)f + \\ &\left(-\frac{\pi^2}{2}\delta + \frac{\pi^3}{3}\zeta \right)b + 2\delta^3 + \frac{\pi^3}{3}\zeta - \frac{\pi^2}{2}\delta = 0 \\ &\left(-2\delta\pi\zeta + 2\pi^2\zeta^2 + 2\delta^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2}b \right)v + (-\pi^2\zeta + \delta\pi)f + \\ &(\pi^2\zeta - \delta\pi)b + \pi^2\zeta - \delta\pi = 0 \end{aligned} \quad (6-104)$$

e para as eqs. (6-101) e (6-102)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\pi^2}{8\delta^2}f - \frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta f \right) \cos \phi + \left(-\frac{\pi^2}{8\delta^2} + \frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta \right)b + 1 + \\ &\frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta - \frac{\pi^2}{8\delta^2} - \frac{\pi^3}{48\delta^2}f \sin \phi = 0 \\ &\left(-\frac{\pi^2}{2\delta^2}\zeta^2 f + \frac{\pi}{\delta}\zeta f \right) \cos \phi + \left(-\frac{\pi^2}{4\delta}\zeta f + f \right) \sin \phi + \\ &\left(-\frac{\pi}{\delta}\zeta + \frac{\pi^2}{2\delta^2}\zeta^2 \right)b + \frac{\pi^2 + 2\delta^2}{\zeta} - \frac{\pi}{\delta}\zeta = 0 \end{aligned} \quad (6-105)$$

Convergência da solução linear não-amortecida

Considerando $\beta = 0$ e que o coeficiente ζ seja muito pequeno, a solução permanente de (6-88) é dada aproximadamente por

$$x = \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \quad (6-106)$$

Utilizando as relações (6-103), chega-se à seguinte expressão para o deslocamento máximo obtido em (6-106),

$$f = 1 - \delta^2 \quad (6-107)$$

Fazendo $\beta = 0$, $\zeta = 0$ e $v_0 = 0$ em (6-94) tem-se,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(F - \omega_0^2 x_0)t^2 \quad (6-108)$$

Substituindo (6-108) em (6-81) e utilizando as relações (6-103), obtém-se

$$f = 1 - \frac{8\delta^2}{\pi^2} \approx 1 - 0.81\delta^2 \quad (6-109)$$

A medida que mais termos são adicionados à aproximação (6-108), (6-81) da lugar à soluções cada vez mais precisas, fazendo com que as relações aproximadas de f e δ sejam cada vez mais próximas da solução exata (6-107).

Para $\delta = 2$, a eq. (6-107) fornece $f = -3$. A tabela 6.10 apresenta os valores de f , e os respectivos erros, obtidos com as equações construídas ao se utilizar a eq. (6-81).

n° de termos	f	erro (%)
2	-2,242	25,2
3	-3,087	-2,9
4	-2,996	0,13
5	-3,0001	-0,003
6	-3,000	-0,00006

Tabela 6.10: Convergência da relação $f - \delta$ aproximada do problema linear não-amortecido.

Convergência da solução linear amortecida

Seja o problema linear amortecido

$$\ddot{x} + 2\omega_0\zeta\dot{x} + \omega_0^2x = F \cos \Omega t$$

A parcela permanente da solução exata é dada por,

$$x = \frac{F((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\Omega\omega_0\zeta \sin \Omega t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega_0^2\Omega^2\zeta^2} \tag{6-110}$$

Avaliando (6-110) e sua derivada em relação a t em $t = 0$, tem-se as coordenadas do ponto fixo

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)F}{\omega_0^4 + (4\zeta^2 - 2)\Omega^2\omega_0^2 + \Omega^4} \\ v^* &= \frac{2\zeta\omega_0\Omega^2 F}{\omega_0^4 + (4\zeta^2 - 2)\Omega^2\omega_0^2 + \Omega^4} \end{aligned} \tag{6-111}$$

Como mostrado nas tabelas 6.11 a 6.14, o sistema (6-86) converge mais rapidamente que o sistema (6-83). Assumindo $F = 10$, $\Omega = 2$, $\omega_0 = 1$, $\zeta = 0,05$ e $\beta = 0$, a tabela 6.11 exibe a convergência da aproximação para o deslocamento e velocidade em $t = T/2$, tendo como condições iniciais o ponto fixo exato (6-111), enquanto que a tabela 6.12 exibe a convergência das coordenadas do ponto fixo obtidas resolvendo o sistema (6-83). Já a tabela 6.13 exibe a convergência da aproximação para o deslocamento e velocidade em $t = T/4$, do problema (6-98), que contem o ângulo de fase, ϕ , na excitação. Agora as condições iniciais são os valores exatos do deslocamento máximo de (6-98) e o ϕ que anula a velocidade no instante inicial. Em $t = T/4$, a solução exata fornece, $x(T/4) = 0$ e $v(T/4) = 6,652$. Finalmente, a tabela 6.14 exibe a convergência do deslocamento máximo e de ϕ , obtidos ao se resolver o sistema (6-86).

n° de termos	$x(T/2)$	$ x(T/2) - x(T/2)_{exato} $	erro (%)	$v(T/2)$	$ v(T/2) - v(T/2)_{exato} $	erro (%)
3	13,753	10,434	314	21,294	21,736	4912
4	12,610	9,291	279	19,110	19,553	4418
5	-0,859	4,178	126	-15,189	14,746	3333
6	-0,295	3,614	108	-13,393	12,950	2927
7	4,136	0,817	24,6	3,533	3,975	898
9	3,222	0,096	2,9	-1,035	0,593	134
11	3,326	0,008	0,23	-0,386	0,057	12,8
13	3,318	0,0004	0,01	-0,446	0,004	0,85
15	3,319	0,00002	0,0006	-0,442	0,0002	0,04

Tabela 6.11: Convergência da solução linear amortecida em $t = T/2$ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$.

n° de termos	x_0	v_0
4	2,626	-17,171
5	-9,647	13,286
6	-7,885	9,508
7	-1,782	-2,166
9	-3,565	0,825
11	-3,294	0,407
13	-3,320	0,445
15	-3,318	0,442

Tabela 6.12: Convergência das coordenadas do ponto fixo da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$.

n° de termos	$x(T/4)$	$v(T/4)$
4	0,844	10,721
5	-0,075	6,117
6	-0,073	6,127
7	0,003	6,683
9	-0,0001	6,651
11	0,000002	6,652

Tabela 6.13: Convergência da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$

Convergência da solução não-linear sem amortecimento

Neste caso se pode utilizar a eq. (6-81) ou em caso de não-linearidade par, eq. (6-82).

Tomando como condição inicial de deslocamento a coordenada do ponto fixo da solução obtida com o HBM, as aproximações em série de Taylor cobrem, com precisão, um intervalo de tempo cada vez maior a medida que mais termos são adicionados à aproximação, como mostrado na tabela 6.15, onde, para o problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$, são apresentados os máximos valores de t e as correspondentes porcentagens de período que representam, ao limitar o erro entre as soluções do HBM e em série de Taylor em 0,01% de x_0 , isto é, o ponto de divergência da série de Taylor. Conforme a tabela 6.15 é esperado que a partir da aproximação com vinte termos, o ponto fixo já seja obtido aproximadamente com a eq. (6-81), pois a série é convergente em aproximadamente um quarto de período.

A tabela 6.16 apresenta a coordena x_0 do ponto fixo obtida com eq.

n° de termos	deslocamentos máximos			ϕ
	$ x $	$ x - x_{exato} $	erro (%)	
4	4,532	1,206	36	-0,116
5	3,221	0,105	3,2	-0,060
6	3,223	0,103	3,09	-0,061
7	3,331	0,005	0,14	-0,067
9	3,326	0,0001	0,004	-0,0665
11	3,326	0,000003	0,00008	-0,0666

Tabela 6.14: Convergência do deslocamento máximo e ϕ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$.

n° de termos	t	$\frac{t}{T}(\%)$
10	1,143	18,19
20	1,453	23,12
40	1,633	26,00

Tabela 6.15: Convergência do instante t que limita o erro da aproximação a menos de 0,01% do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$.

(6-81). Entretanto, para não-linearidade maiores, a necessidade de um número muito grande de termos na série torna-se um empecilho para as soluções em série, como mostram as tabelas 6.17 à 6.19. Nestas tabelas, são apresentados, a porcentagem de T em que a aproximação fornece um erro menor ou equivalente a 0,01% de x_0 e também a coordenada x_0 do ponto fixo obtido utilizando a eq. (6-81). Na tabela 6.17 tem-se o problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$. Já na tabela 6.18, tem-se o problema $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$, enquanto que na tabela 6.19, tem-se o problema $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$.

Convergência da solução não-linear amortecida

Na presença de amortecimento a utilização do método torna-se mais complicada porque se eleva o custo computacional. Embora as eqs. (6-86) não sejam exatas, para pequenos níveis de amortecimento elas devem apresentar melhores resultados que o sistema (6-83). Considerando o problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$, a convergência da solução no tempo e do cálculo do ponto fixo é apresentada na tabela 6.20 para as eqs (6-83). e utilizando as eqs. (6-86) o erro obtido com as soluções é apresentado na tabela 6.21.

n° de termos	x_0	erro (%)
10	0,865	2,7
20	0,888	0,19
40	0,889	0,0004

Tabela 6.16: Convergência do cálculo do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$.

n° de termos	t	$\frac{t}{T}$ (%)	x_0	erro (%)
10	0,99	15,75	1,047	7,83
20	1,255	19,97	1,081	4,83
40	1,409	22,43	1,103	2,82
80	1,492	23,74	1,118	1,54

Tabela 6.17: Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$.

n° de termos	t	$\frac{t}{T}$ (%)	x_0	erro (%)
10	0,476	15,16	1,403	10,14
20	0,603	19,2	1,446	7,38
40	0,677	21,55	1,474	5,6
80	0,717	22,81	1,491	4,53

Tabela 6.18: Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$.

n° de termos	t	$\frac{t}{T}$ (%)	x_0	erro (%)
10	0,413	13,16	2,855	14,86
20	0,552	16,64	2,892	13,75
40	0,586	18,67	2,914	13,11
80	0,62	19,75	2,925	12,76

Tabela 6.19: Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$.

Solução em série de Fourier

Da mesma forma que na vibração livre, a série de Taylor será utilizada para obter a solução em série de Fourier. Para vibração forçada ainda não foi possível encontrar um relação entre as soluções de LP e o presente método.

n° de termos	t	$\frac{t}{T}$ (%)	x_0	erro (%)	v_0	erro (%)
10	0,709	11,28	0,564	35,1	0,106	42,3
20	1,203	19,15	0,607	30,2	-0,003	101,8
40	1,453	23,12	0,576	33,7	0,052	71,9
80	1,637	26,06	0,583	32,9	0,031	83,3

Tabela 6.20: Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-83).

n° de termos	x'_0	erro (%)	ϕ	erro (%)
10	0,782	11,6	-103,35	-
20	0,856	3,2	0,205	19,6
40	0,888	0,4	0,167	2,3
80	0,891	0,8	0,16	6,4

Tabela 6.21: Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-86).

Considerando a solução (6-94), serão adicionados termos de mais alta ordem em t para que uma solução com um maior número de harmônicos possa ser construída.

Igualando os termos de mesma potência em t da solução em série de Taylor e da série de Taylor da solução em série de Fourier

$$x(t) = a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + a_3 \cos 3\Omega t + b_3 \sin 3\Omega t \quad (6-112)$$

obtem-se as seguintes equações

$$x_0 = a_1 + a_3 \quad (6-113)$$

$$v_0 = 3b_3\Omega + b_1\Omega \quad (6-114)$$

$$\frac{F}{2} - \zeta\omega_0 v_0 - \frac{\omega_0^2}{2}x_0 - \frac{\beta}{2}x_0^3 = -\frac{9}{2}a_3\Omega^2 - \frac{1}{2}a_1\Omega^2 \quad (6-115)$$

$$\left(\frac{2\zeta^2\omega_0^2}{3} - \frac{\omega_0^2}{6} - \frac{\beta}{2}x_0^2\right)v_0 - \frac{\zeta\omega_0 F}{3} + \frac{\zeta\omega_0^3}{3}x_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta}{3}x_0^3 = -\frac{9}{2}b_3\Omega^3 - \frac{1}{6}b_1\Omega^3 \quad (6-116)$$

$$\frac{\beta^2 x_0^5}{8} + \left(-\frac{\zeta^2 \omega_0^2 \beta}{6} + \frac{\omega_0^2 \beta}{6}\right)x_0^3 + \left(\frac{\zeta \omega_0 \beta}{2} v_0 - \frac{\beta F}{8}\right)x_0^2 + \left(\frac{\omega_0^4}{24} - \frac{\beta}{4} v_0^2 - \frac{\zeta^2 \omega_0^4}{6}\right)x_0 + \frac{\zeta^2 \omega_0^2 F}{6} + \left(-\frac{\zeta^3 \omega_0^3}{3} + \frac{\zeta \omega_0^3}{6}\right)v_0 - \frac{F \Omega^2}{24} = \frac{\omega_0^2 F}{24} = \frac{27}{8} a_3 \Omega^4 + \frac{1}{24} a_1 \Omega^4 \quad (6-117)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\zeta\omega_0\beta^2}{10}x_0^5 + \frac{9\beta^2}{40}v_0x_0^4 + \left(\frac{\zeta^3\omega_0^3\beta}{15} - \frac{2\zeta\omega_0^3\beta}{15}\right)x_0^3 + \left(\left(\frac{\omega_0^2\beta}{5} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{3\zeta^2\omega_0^2\beta}{10}\right)v_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta F}{10}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3\beta F}{20}v_0 - \frac{\zeta\omega_0^5}{30} + \frac{\zeta^3\omega_0^5}{15} + \right. \\
 & \left. \frac{2\zeta\omega_0\beta}{5}v_0^2\right)x_0 - \frac{\beta}{20}v_0^3 + \frac{\zeta\omega_0 F\Omega^2}{60} + \left(\frac{2\zeta^4\omega_0^4}{15} + \frac{\omega_0^4}{120} - \frac{\zeta^2\omega_0^4}{10}\right)v_0 + \\
 & \frac{\zeta\omega_0^3 F}{30} - \frac{\zeta^3\omega_0^3 F}{15} = \frac{81}{40}b_3\Omega^5 + \frac{1}{120}b_1\Omega^5
 \end{aligned} \tag{6-118}$$

que permitem determinar as amplitudes dos harmônicos e as coordenadas x_0 e v_0 do ponto fixo.

Com as eqs. (6-113) à (6-116), monta-se um sistema linear e obtém-se a seguinte solução para as amplitudes

$$a_1 = \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\omega_0\zeta v_0 - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3) + \frac{9}{8}x_0 \tag{6-119}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{8\Omega^3}(9\Omega^2 + 4\omega_0^2\zeta^2 - \omega_0^2 - 3\beta x_0^2)v_0 + \\
 & \frac{1}{4\Omega^3}(\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0 F + \omega_0^3 x_0)\zeta
 \end{aligned} \tag{6-120}$$

$$a_3 = \frac{1}{8\Omega^2}(-F + 2\zeta\omega_0 v_0 + \omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) - \frac{x_0}{8} \tag{6-121}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \frac{1}{24\Omega^3}(\omega_0^2 - 4\zeta^2\omega_0^2 + 3\beta x_0^2 - \Omega^2)v_0 + \\
 & \frac{1}{12\Omega^3}(\omega_0 F - \omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^3 x_0)\zeta
 \end{aligned} \tag{6-122}$$

As eqs. (6-117) e (6-118) são utilizadas para determinar x_0 e v_0 . Com a determinação das amplitudes dos harmônicos, estas equações passam a ser

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta^2}{8}x_0^5 + \left(-\frac{\zeta^2\omega_0^2\beta}{6} - \frac{5\Omega^2\beta}{12} + \frac{\omega_0^2\beta}{6}\right)x_0^3 + \left(\frac{\zeta\omega_0\beta}{2}v_0 - \frac{\beta F}{8}\right)x_0^2 + \\
 & \left(-\frac{5\Omega^2\omega_0^2}{12} - \frac{\zeta^2\omega_0^4}{6} - \frac{\beta}{4}v_0^2 + \frac{3\Omega^4}{8} + \frac{\omega_0^4}{24}\right)x_0 - \frac{\zeta^3\omega_0^3}{3}v_0 + \\
 & \frac{\zeta^2\omega_0^2 F}{6} + \frac{3F\Omega^2}{8} + \left(\frac{\omega_0^3}{6} - \frac{5\Omega^2\omega_0}{6}\right)\zeta v_0 - \frac{\omega_0^2 F}{24} = 0 \\
 & -\frac{\zeta\omega_0\beta^2}{10}x_0^5 + \frac{9\beta^2}{40}v_0x_0^4 + \left(\frac{\zeta^3\omega_0^3\beta}{15} + \left(-\frac{2\omega_0^3\beta}{15} + \frac{\Omega^2\omega_0\beta}{6}\right)\zeta\right)x_0^3 + \\
 & \left(-\frac{3\zeta^2\omega_0^2\beta}{10}v_0 + \left(\frac{\omega_0^2\beta}{5} - \frac{\Omega^2\beta}{4}\right)v_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta F}{10}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3\beta F}{20}v_0 + \right. \\
 & \left. \frac{\zeta^3\omega_0^5}{15} + \left(\frac{\Omega^2\omega_0^3}{6} - \frac{\omega_0^5}{30} + \frac{2\omega_0\beta}{5}v_0^2\right)\zeta\right)x_0 + \frac{2\zeta^4\omega_0^4}{15}v_0 - \frac{\zeta^3\omega_0^3 F}{15} + \\
 & \left(-\frac{3\omega_0 F\Omega^2}{20} + \frac{\omega_0^3 F}{30}\right)\zeta - \frac{\beta}{20}v_0^3 + \left(\frac{\Omega^2\omega_0^2}{3} - \frac{\omega_0^4}{10}\right)v_0\zeta^2 +
 \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{12}\Omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{120}\omega_0^4 + \frac{3}{40}\Omega^4 \right) v_0 = 0$$

Como já mencionado, a série de Taylor obtida a partir de uma solução do HBM não é coincidente com a série obtida através do método de Taylor. A medida que mais harmônicos são adicionados à aproximação, o HBM irá fornecer uma solução que ao ser convertida em série de Taylor, se aproxima cada vez mais da solução obtida com o método de Taylor. Isto significa que ao se obter uma solução em série de Fourier a partir da solução em série de Taylor, tem-se uma solução diferente da obtida com o HBM, mas, conforme mais harmônicos são adicionados, obtém-se uma série de Fourier cada vez mais próxima da solução que seria obtida com o HBM.

Tomando como referência soluções com diferentes número de harmônicos, obtidas com o HBM para o problema forçado sem amortecimento, $\ddot{x} + x + x^3 = \cos 2t$, a tabela 6.22 exibe o erro obtido em cada amplitude, ao se comparar as amplitudes dos harmônicos das séries de Fourier, obtidas a partir da série (6-94), com as amplitudes das soluções do HBM que contém o mesmo número de harmônicos. Para a solução com três harmônicos, as amplitudes c_i , da solução de referência (HBM), e \tilde{c}_i , da solução obtida a partir de (6-94), são mostradas. Para as soluções com 7 e 10 harmônicos, apenas as diferenças em cada harmônico são exibidas.

c_i	\tilde{c}_i	erro(%)		
		n° de termos		
		3	7	10
2,108	2,094	0,65	0,0007	0,000003
0,083	0,073	12,49	0,018	0,0001
0,003	0,004	31,34	0,11	0,0007
			1,03	0,008
			6,78	0,07
			32,45	0,63
			93,64	4,08
				20,03
				69,24
				143

Tabela 6.22: Comparação entre as amplitudes da solução obtida com o HBM e da solução em série de Fourier, obtida a partir da solução em série de Taylor.

Embora a solução com três harmônicos apresente um grande erro nas amplitudes do segundo e terceiro harmônicos, a solução é bem próxima da obtida com o HBM porque estas amplitudes são pequenas.

6.2.8 Validação da Solução em série

A solução da seguinte equação diferencial,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \quad (6-123)$$

obtida através do método da série de Taylor é,

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + v_0t + \left(\frac{1}{2}F - \zeta\omega_0v_0 - \frac{1}{2}\omega_0^2x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3\right)t^2 + \\ & \left(-\frac{1}{3}\zeta\omega_0F + \frac{2}{3}\zeta^2\omega_0^2v_0 + \frac{1}{3}\zeta\omega_0^3x_0 + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \right. \\ & \left. \frac{1}{6}\omega_0^2v_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^2v_0\right)t^3 + \dots \end{aligned} \quad (6-124)$$

Substituindo (6-124) em (6-123) obtém-se

$$F - \frac{1}{2}t^2F\Omega^2 + \frac{1}{24}t^4F\Omega^4 + \dots = F \cos \Omega t \quad (6-125)$$

Os termos à esquerda da igualdade em (6-125) são exatamente a série de Taylor da excitação. Logo, se pode concluir que a solução em série de Taylor é exata.

Porém, o que acontece na prática é que as eqs. (6-81) ou (6-83) por exemplo, não apresentam resultados exatos porque a série não é exata nos pontos de avaliação, $t = T/4$ e $t = T/2$. Isto pode ser melhor compreendido ao considerar a solução em série de Taylor como se fosse a série de Taylor de uma série de Fourier que contém infinitos harmônicos. E os super-harmônicos de amplitudes bem pequenas, que seriam facilmente desprezados ao se escrever a solução em série de Fourier, passam a ser importantes, causando o erro.

O erro acontece porque quando se está avaliando a série em um determinado instante de tempo, na verdade se está avaliando a série de cada harmônico individualmente. E para vários super-harmônicos, de amplitude bem pequena, o instante $T/4$ por exemplo, pode ser bem superior ao período do próprio super-harmônico.

Escrevendo um harmônico em série de Taylor tem-se,

$$a \cos \Omega_i t = a - \frac{a}{2}\Omega_i^2 t^2 + \frac{a}{24}\Omega_i^4 t^4 - \frac{a}{720}\Omega_i^6 t^6 + \frac{a}{40320}\Omega_i^8 t^8 + \dots \quad (6-126)$$

A figura 6.8(a), mostra que a importância de cada termo da série (6-126) cresce com o tempo. Para que a série seja precisa quando avaliada em um instante igual ao dobro do período do harmônico, $t = 2T_i$, é necessário um número bem maior de termos, como mostrado na figura 6.8(b), para que todos os termos importantes sejam considerados.

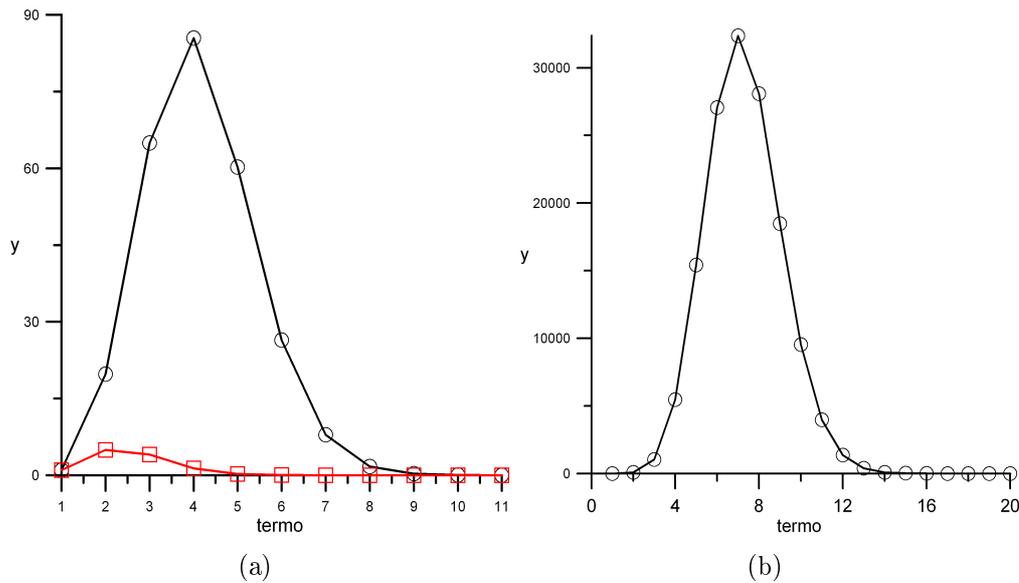


Figura 6.8: Importância dos termos não-nulos da série de Taylor que representa $\cos \Omega t$, avaliados em diferentes instantes de tempo: (a) \square , instante $t = 0,5T$; \circ , $t = T$; (b) $t = 2T$.

Utilizando uma série de 30 termos é possível, até com uma certa folga, cobrir com precisão três períodos de qualquer harmônico isoladamente. Assim, para garantir que a solução em série seja coincidente com a solução numérica em $t = T/4$, bastaria considerar que os harmônicos importantes de uma possível solução em série de Fourier, isto é, aqueles que possuem amplitudes que não podem ser desprezadas, não devem ter período inferior a $T/12$, o que corresponde ao décimo segundo harmônico. Porém, este critério não funciona. Os harmônicos superiores, de amplitude menor ainda, podem acabar gerando um erro ao se avaliar a série em $T/4$. Então nestes casos é necessário um número muito grande de termos.

6.3 Método de Fourier-Taylor (FT)

Foi demonstrado, para os casos de vibração livre e forçada, que uma forma de melhorar as soluções em série de Taylor é transforma-las em soluções periódicas tais como séries de Fourier.

Como será demonstrado mais adiante, esta transformação da série de Taylor em série de Fourier pode ser feita de imediato se for utilizada uma série de Fourier no lugar da série de potências na solução aproximada. Como este método utiliza conceitos de séries de Taylor e Fourier, ao longo do texto será chamado de método Fourier-Taylor (FT). Seja a série de Fourier,

$$\tilde{x} = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cos i\omega t + \sum_{i=1}^n d_i \sin i\omega t \quad (6-127)$$

Os coeficientes da solução aproximada (6-127) são determinados da mesma forma que foram determinados os coeficientes da série de Taylor. A solução aproximada $\tilde{x}(t)$ e suas derivadas são avaliadas no instante inicial e igualadas aos valores dados pela solução exata desconhecida, $x(t)$, e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. As equações assumem então a forma:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0) &= x_0 \\ \frac{d\tilde{x}(0)}{dt} &= v_0 \\ \frac{d^2\tilde{x}(0)}{dt^2} &= \ddot{x}(0) \\ \frac{d^3\tilde{x}(0)}{dt^3} &= \left. \frac{d\ddot{x}}{dt} \right|_0 \\ &\vdots \\ \frac{d^n\tilde{x}(0)}{dt^n} &= \left. \frac{d^{n-2}\ddot{x}}{dt^{n-2}} \right|_0 \end{aligned} \quad (6-128)$$

Assim como no HBM, o esforço computacional pode ser reduzido se for levada em consideração o tipo de não-linearidade e de excitação. Quando todas as não-linearidades são ímpares e a excitação não possuir termos constantes, pode-se retirar o termo constante, c_0 , e os demais harmônicos pares em (6-127).

Na ausência de amortecimento e em problemas em que $v_0 = 0$, se pode simplificar ainda mais ao se retirar todos os termos de seno da solução aproximada.

A seguir, descreve-se a aplicação do método em função do tipo de problema.

6.3.1 Resolução de problemas de vibração livre

A solução é escrita com n harmônicos de cossenos. As condições iniciais são $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = 0$. A frequência, ω , da resposta faz parte do conjunto de incógnitas, juntamente com as amplitudes dos harmônicos.

Para a resolução do problema são necessárias $n + 1$ equações em (6-128). Sendo que as equações que possuem derivadas ímpares são desprezadas, pois produzem a igualdade $0 = 0$.

O procedimento consiste em escrever na forma de um sistema linear as n

primeiras equações não nulas de (6-128), para determinar as amplitudes dos harmônicos e do termo constante, quando for o caso. A frequência ω é retirada da última das eqs. (6-128). Esta equação é não-linear em ω . A razão pela qual se utiliza sempre a última equação para determinar ω é que desta forma a solução aproximada atenderá automaticamente as condições iniciais.

6.3.2 Equação de Duffing

Tomando como exemplo a equação de Duffing do problema de vibração livre,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-129)$$

e a aproximação

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (6-130)$$

são necessárias três equações para determinar a solução aproximada, duas para os coeficientes dos harmônicos e uma para a frequência ω . Para montar estas equações, primeiramente deve-se avaliar a solução aproximada e suas derivadas em relação a t , no instante inicial,

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_3 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{x}(0) &= -c_1\omega^2 - 9c_3\omega^2 \\ x'''(0) &= 0 \\ x''''(0) &= c_1\omega^4 + 81c_3\omega^4 \end{aligned} \quad (6-131)$$

Avaliando \ddot{x} e as demais derivadas no instante inicial, levando em conta que $v_0 = 0$, tem-se,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{x}(0) &= -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ x'''(0) &= 0 \\ x''''(0) &= \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 6\beta x_0 v_0^2 + 3\beta^2 x_0^5 \end{aligned} \quad (6-132)$$

Igualando as eqs. (6-131) e (6-132), tem-se as equações necessárias para a obtenção da solução aproximada,

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= x_0 \\ -c_1\omega^2 - 9c_3\omega^2 &= -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ c_1\omega^4 + 81c_3\omega^4 &= \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{aligned} \quad (6-133)$$

As duas primeiras eqs. em (6-133) formam um sistema linear que permite se determinar os valores de c_1 e c_3 . Assim tem-se para (6-130),

$$x(t) = \left(\frac{9}{8} - \frac{\omega_0^2}{8\omega^2} - \frac{\beta x_0^2}{8\omega^2} \right) x_0 \cos \omega t + \left(\frac{\omega_0^2}{8\omega^2} + \frac{\beta x_0^2}{8\omega^2} - \frac{1}{8} \right) x_0 \cos 3\omega t \quad (6-134)$$

A última eq. em (6-133), a ser utilizada como relação frequência-amplitude, toma a forma

$$9\omega^4 x_0 - (10\beta x_0^3 + 10\omega_0^2 x_0)\omega^2 + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 = 0 \quad (6-135)$$

Adimensionalizando (6-135), tem-se,

$$1 + 4b + 3b^2 + 9\delta^4 - 10(1 + b)\delta^2 = 0 \quad (6-136)$$

Adicionando mais um harmônico à solução aproximada,

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t + c_5 \cos 5\omega t \quad (6-137)$$

e aplicando o presente método, chega-se ao seguinte sistema linear para a determinação dos coeficientes de (6-137).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\omega^2 & -9\omega^2 & -25\omega^2 \\ \omega^4 & 81\omega^4 & 625\omega^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} x_0 \\ -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-138)$$

Resolvendo (6-138), obtém-se a solução no tempo e a relação frequência-amplitude. Escrevendo a solução no tempo em termos dos parâmetros adimensionais tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= \left(\frac{b^2}{64\delta^4} + \frac{75}{64} - \frac{17}{96\delta^2} - \frac{17b}{96\delta^2} + \frac{1}{192\delta^4} + \frac{b}{48\delta^4} \right) \cos \delta\tau + \\ & \left(\frac{13}{64\delta^2} - \frac{1}{128\delta^4} - \frac{25}{128} - \frac{b}{32\delta^4} - \frac{3b^2}{128\delta^4} + \frac{13b}{64\delta^2} \right) \cos 3\delta\tau + \\ & \left(\frac{3}{128} - \frac{5b}{192\delta^2} + \frac{1}{384\delta^4} + \frac{b}{96\delta^4} + \frac{b^2}{128\delta^4} - \frac{5}{192\delta^2} \right) \cos 5\delta\tau \end{aligned} \quad (6-139)$$

Para a relação frequência-amplitude na forma adimensional, tem-se

$$225\delta^6 - (259 + 259b)\delta^4 + (105b^2 + 35 + 140b)\delta^2 - 25b - 51b^2 - 27b^3 = 1 \quad (6-140)$$

Com quatro e cinco harmônicos na solução aproximada obtém-se respectivamente as seguintes relações δ - b .

$$11025\delta^8 - (12916 + 12916b)\delta^6 + (5922b^2 + 7896b + 1974)\delta^4 - (2268b^3 + 4284b^2 + 2100b + 84)\delta^2 + 1 + 208b + 846b^2 + 1080b^3 + 441b^4 = 0 \tag{6-141}$$

$$893025\delta^{10} - (1057221b + 1057221)\delta^8 + (691240b + 172810 + 518430b^2)\delta^6 - (237006b^3 + 447678b^2 + 219450b + 8778)\delta^4 + (34320b + 139590b^2 + 165 + 72765b^4 + 178200b^3)\delta^2 - 1 - 1849b - 15078b^2 - 36126b^3 - 34425b^4 - 11529b^5 = 0 \tag{6-142}$$

A figura 6.9 exibe a convergência da relação freqüência-amplitude obtida com as aproximações com dois, três e quatro harmônicos, respectivamente eqs. (6-136), (6-140) e (6-141).

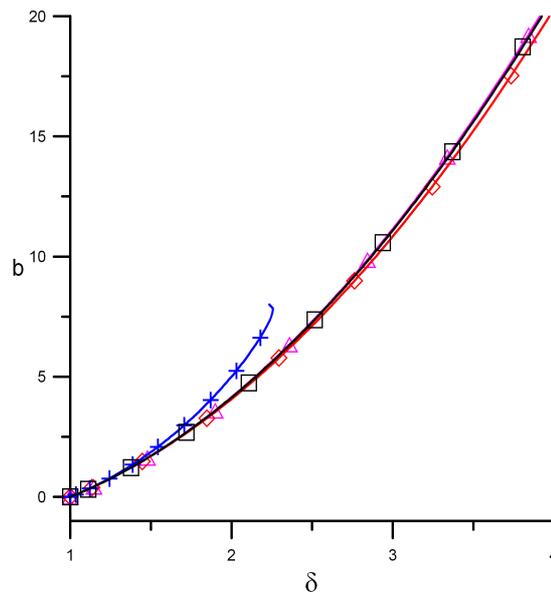


Figura 6.9: Soluções exata e aproximadas com diferentes números de harmônicos: \square , RK; $+$, FT com dois harmônicos; \diamond , FT com três harmônicos; \circ , FT com quatro harmônicos;

Relação entre os métodos de Taylor e Fourier-Taylor

Adimensionalizando a solução (6-134) e escrevendo-a em série de Taylor, têm-se

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\right)\tau^2 + \left(\frac{5}{12}\delta^2b - \frac{3}{8}\delta^4 + \frac{5}{12}\delta^2\right)\tau^4 +$$

$$\left(\frac{1}{8}\delta^6 - \frac{91}{720}\delta^4 b - \frac{91}{720}\delta^4\right)\tau^6 + \dots \quad (6-143)$$

Comparando (6-143) com (6-32) se observa que os termos de potência zero e dois em τ são iguais.

Já escrevendo a solução com três harmônicos, eq. (6-139), em série de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{b}{6} + \frac{b^2}{8}\right)\tau^4 - \\ & \left((7 + 28b + 21b^2)\frac{\delta^2}{144} - \frac{259}{720}(1 + b)\delta^4 + \frac{5}{16}\delta^6\right)\tau^6 + \dots \end{aligned}$$

encontra-se mais uma parcela coincidente com a série exata (6-32), como era de se esperar.

Através das comparações pode-se concluir que cada novo harmônico acrescentado à solução corresponde a um novo termo da série de Taylor. Dessa forma, o procedimento de transformar a solução em série de Taylor em uma série de Fourier é equivalente à aplicação do FT.

O FT apresenta duas vantagens sobre o método de Taylor. A primeira é que a solução é periódica. A segunda vantagem é que, por ser periódica, a função aproximadora possui infinitas derivadas, permitindo que seja construído um número qualquer de equações, e, com isso, se escreve uma equação adicional, para se determinar a frequência ω . Em Taylor, a aproximação possui derivadas finitas e portanto, todas as equações são utilizadas para determinar os coeficientes da série. Então, ω é obtida avaliando a função de deslocamento em $T/4$ ou $T/2$, de acordo com o tipo de não linearidade, o que pode conduzir a um ω com um grande erro se um número insuficiente de termos for utilizado. O FT possui uma forma diferente de determinar aproximadamente ω , que geralmente apresenta melhores resultados em relação ao Taylor.

6.3.3 Método Fourier-Taylor-Galerkin (FTG)

Ao se substituir uma determinada solução aproximada em uma equação diferencial, obtém-se um resíduo. Este resíduo é justamente provocado porque a solução aproximada não consegue atender a igualdade de forma exata. Quanto mais exata for a solução, menor será seu resíduo.

As soluções obtidas com o FT atendem a igualdade (6-129) no instante inicial e conseqüentemente no instante correspondente a um período da resposta. Substituindo soluções com diferentes números de harmônicos em (6-129), se

verifica que o resíduo diminui a medida que o que cresce o número de harmônicos. Porém, nota-se que dentro do intervalo $[0, T]$, (6-129) é satisfatoriamente atendida somente nos instantes que correspondem à $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$ e $t = T$, enquanto que no HBM ou Galerkin-Urabe, conforme se utilizam soluções com mais harmônicos, além de diminuir o resíduo, também se aumenta o número de vezes em que o resíduo torna-se nulo dentro do intervalo $[0, T]$.

As relações frequência-deslocamento obtidas na seção anterior podem ser melhoradas se forem obtidas de forma a se minimizar o resíduo na equação diferencial, ao longo do período da resposta.

Utilizando Galerkin para minimizar o resíduo provocado pelas soluções, tem-se

$$\int_0^{2\pi/\omega} WR = 0 \quad (6-144)$$

onde R é o resíduo obtido ao substituir a solução aproximada na equação diferencial e W é a função peso dada por

$$W = \frac{\partial x}{\partial \omega} \quad (6-145)$$

sendo que x é a solução aproximada.

Assim, a relação frequência-deslocamento passa a ser dada por (6-144).

Tomando como exemplo a solução (6-134), (6-144) torna-se

$$\begin{aligned} & -\frac{45x_0^2}{64}\omega^{10} + \left(-\frac{1703x_0^4}{32768}\beta + \frac{5x_0^2\omega_0^2}{64}\right)\omega^8 + \left(\frac{45x_0^2\omega_0^4}{64} + \right. \\ & \left. \frac{10317x_0^4\omega_0^2}{8192}\beta + \frac{4557x_0^6}{8192}\beta^2\right)\omega^6 - \left(\frac{5x_0^2\omega_0^6}{64} + \frac{4825x_0^4\omega_0^4}{16384}\beta + \right. \\ & \left. \frac{2905x_0^6\omega_0^2}{8192}\beta^2 + \frac{2265x_0^8\beta^3}{16384}\right)\omega^4 + \left(\frac{217x_0^4\omega_0^6}{8192}\beta + \frac{651x_0^6\omega_0^4}{8192}\beta^2 + \right. \\ & \left. \frac{651x_0^8\omega_0^2}{8192}\beta^3 + \frac{217x_0^{10}}{8192}\beta^4\right)\omega^2 - \frac{63x_0^4\omega_0^8}{32768}\beta - \frac{63x_0^6\omega_0^6}{8192}\beta^2 - \\ & \left. \frac{63x_0^{10}\omega_0^2}{8192}\beta^4 - \frac{189x_0^8\omega_0^4}{16384}\beta^3 - \frac{63x_0^{12}}{32768}\beta^5 = 0 \right. \quad (6-146) \end{aligned}$$

O resíduo provocado pela solução (6-134) ao se obter ω em (6-146) no lugar de se utilizar (6-135), é significativamente reduzido, como mostra a figura 6.10, conseqüentemente a curva $\omega-x_0$ se torna mais precisa.

6.3.4

Resolução de problemas de vibração forçada sem amortecimento

Neste caso tem-se o mesmo número de incógnitas da vibração livre. Agora a frequência da solução é igual à frequência Ω da excitação ou a um múltiplo desta frequência, e x_0 passa a ser incógnita, representando a coordenada do ponto fixo da solução permanente.

Para a obtenção das amplitudes dos harmônicos e de x_0 , as equações que possuem derivadas ímpares em (6-128) devem ser novamente desprezadas. Da mesma forma que na vibração livre, monta-se um sistema linear tendo as amplitudes como incógnitas. A coordenada x_0 do ponto fixo é determinada resolvendo a última das eqs. (6-128), que será sempre não-linear em x_0 . Como tem-se uma única equação não-linear, pode-se utilizar o Maple para resolver esta equação, facilitando a aplicabilidade do método, pois todas as raízes são obtidas de uma única vez através de um simples comando.

Equação de Duffing

Para resolver o problema,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \tag{6-147}$$

a solução é aproximada por,

$$\tilde{x}(t) = c_1 \cos \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t \tag{6-148}$$

Avaliando a função $x(t)$ e suas derivadas no instante inicial, e as igualando

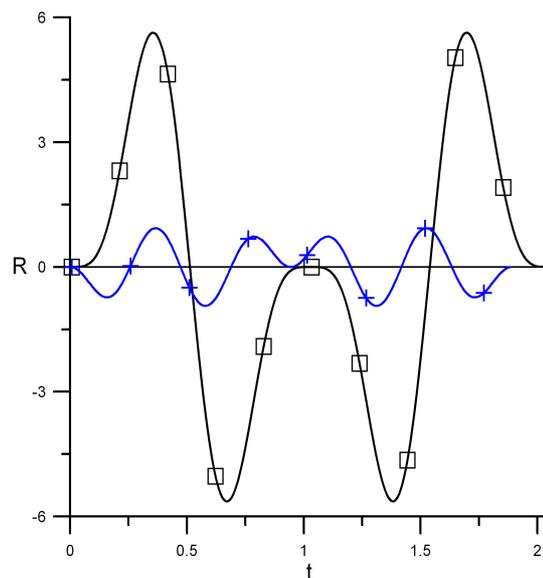


Figura 6.10: Resíduo causado por (6-134) para $\omega_0 = 1,5$, $\beta = 3$ e $x_0 = 2$: \square , ω dado por (6-135); $+$, ω dado por (6-146).

à função aproximada (6-148) e suas derivadas, tem-se as seguintes equações,

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_3 \\ F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 &= -c_1 \Omega^2 - 9c_3 \Omega^2 \\ -F(\Omega^2 + \omega_0^2) + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 F + \\ 3\beta^2 x_0^5 &= c_1 \Omega^4 + 81c_3 \Omega^4 \end{aligned} \quad (6-149)$$

Resolvendo as duas primeiras eqs. de (6-149), encontra-se para c_1 e c_3

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{9}{8}x_0 + \frac{1}{8\Omega^2}(F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3) \\ c_3 &= -\frac{x_0}{8} + \frac{1}{8\Omega^2}(-F + \omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) \end{aligned} \quad (6-150)$$

e a última das eqs. (6-149), que será utilizada para determinar x_0 , torna-se

$$\begin{aligned} -F\Omega^2 - \omega_0^2 F + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 F + 3\beta^2 x_0^5 \\ = 10\Omega^2 \beta x_0^3 + (-9\Omega^4 + 10\Omega^2 \omega_0^2)x_0 - 10F\Omega^2 \end{aligned} \quad (6-151)$$

Com uma aproximação com três harmônicos,

$$\tilde{x}(t) = c_1 \cos \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t + c_5 \cos 5\Omega t \quad (6-152)$$

chega-se ao seguinte sistema linear,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Omega^2 & -9\Omega^2 & -25\Omega^2 \\ \Omega^4 & 81\Omega^4 & 625\Omega^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} x_0 \\ F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ -F(\Omega^2 + \omega_0^2 + 3\beta x_0^2) + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-153)$$

e à seguinte relação frequência-amplitude,

$$\begin{aligned} -18\beta F^2 x_0 + (\omega_0^4 + \Omega^4 + \omega_0^2 \Omega^2 + (42\omega_0^2 \beta + 3\beta \Omega^2)x_0^2 + \\ 45\beta^2 x_0^4)F - \omega_0^6 x_0 - 25\omega_0^4 \beta x_0^3 - 51\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - 27\beta^3 x_0^7 \\ = -c_1 \Omega^6 - 729c_3 \Omega^6 - 15625c_5 \Omega^6 \end{aligned} \quad (6-154)$$

Resolvendo (6-153), obtém-se

$$c_1 = \left(\frac{11}{64\Omega^2} - \frac{\omega_0^2}{192\Omega^4} \right) F + \left(-\frac{17\omega_0^2}{96\Omega^2} + \frac{75}{64} + \frac{\omega_0^4}{192\Omega^4} \right) x_0 -$$

$$\frac{\beta F}{64\Omega^4}x_0^2 + \left(\frac{\omega_0^2\beta}{48\Omega^4} - \frac{17\beta}{96\Omega^2}\right)x_0^3 + \frac{\beta^2}{64\Omega^4}x_0^5 \quad (6-155)$$

$$c_3 = \left(-\frac{25}{128\Omega^2} + \frac{\omega_0^2}{128\Omega^4}\right)F + \left(\frac{13\omega_0^2}{64\Omega^2} - \frac{25}{128} - \frac{\omega_0^4}{128\Omega^4}\right)x_0 + \quad (6-156)$$

$$\frac{3\beta F}{128\Omega^4}x_0^2 + \left(\frac{13\beta}{64\Omega^2} - \frac{\omega_0^2\beta}{32\Omega^4}\right)x_0^3 - \frac{3\beta^2}{128\Omega^4}x_0^5$$

$$c_5 = \left(\frac{3}{128\Omega^2} - \frac{\omega_0^2}{384\Omega^4}\right)F + \left(-\frac{5\omega_0^2}{192\Omega^2} + \frac{3}{128} + \frac{\omega_0^4}{384\Omega^4}\right)x_0 - \quad (6-157)$$

$$\frac{\beta F}{128\Omega^4}x_0^2 + \left(-\frac{5\beta}{192\Omega^2} + \frac{\omega_0^2\beta}{96\Omega^4}\right)x_0^3 + \frac{\beta^2}{128\Omega^4}x_0^5$$

e a eq. (6-154) torna-se

$$\begin{aligned} & -27\beta^3x_0^7 + (105\Omega^2\beta^2 - 51\omega_0^2\beta^2)x_0^5 + 45\beta^2x_0^4F - (259\Omega^4\beta - \\ & 140\Omega^2\omega_0^2\beta + 25\omega_0^4\beta)x_0^3 - (102\beta\Omega^2 - 42\omega_0^2\beta)Fx_0^2 - (18\beta F^2 - \\ & 35\Omega^2\omega_0^4 + \omega_0^6 + 259\Omega^4\omega_0^2 - 225\Omega^6)x_0 - (34\omega_0^2\Omega^2 - \omega_0^4 - \\ & 225\Omega^4)F = 0 \end{aligned} \quad (6-158)$$

Assim como ocorreu nos casos de vibração livre, é de se esperar que as soluções apresentem um resíduo maior quando x_0 é retirado de uma das eqs. (6-128). Substituindo as soluções aproximadas na equação diferencial e aplicando o método de Galerkin para minimizar o resíduo ao longo do período da resposta, se obtém uma relação frequência-amplitude mais precisa.

Substituindo (6-155) à (6-157) em (6-152) e esta na eq. diferencial (6-147) e aplicando o método de Galerkin utilizando como função peso

$$W = \frac{\partial x}{\partial \Omega} \quad (6-159)$$

encontra-se melhores resultado que ao se considerar a função peso sendo dada por

$$W = \frac{\partial x}{\partial x_0} \quad (6-160)$$

como mostrado na figura 6.11.

A figura 6.12 exhibe as curvas frequência-amplitudes do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$, obtidas utilizando o FT com Galerkin (FTG), tendo (6-159) como função peso, integração numérica (utilizando um pequeno amortecimento) e HBM. Pode-se ver que com o FTG também é possível se obter boa precisão com poucos termos.

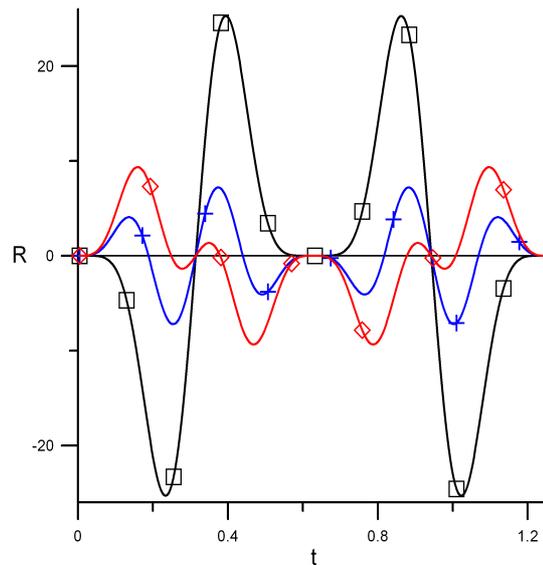


Figura 6.11: Resíduo da solução (6-152) para o problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos 5t$: \square , x_0 dado por (6-158); $+$, x_0 obtido ao se considerar (6-159); \diamond , x_0 obtido ao se considerar (6-160).

6.3.5

Resolução de problemas de vibração forçada com amortecimento

Agora tem-se o dobro de incógnitas dos casos anteriores, pois o amortecimento exige a presença de harmônicos em seno na solução aproximada e, além de x_0 , agora se deve encontrar a coordenada v_0 do ponto fixo da solução permanente. Além disso, as equações com derivadas ímpares em (6-128) deixam de ser nulas e passam a ser utilizadas na determinação das amplitudes dos harmônicos em seno.

Da mesma forma, um sistema linear é montado com as primeiras $n - 2$ equações em (6-128), o que permite determinar as amplitudes dos harmônicos. As duas equações restantes são utilizadas para determinar as coordenadas do ponto fixo. Como são não-lineares, agora tem-se mais dificuldade que na vibração forçada sem amortecimento pois tem-se um sistema não-linear que necessita de resolução numérica.

Equação de Duffing

A solução aproximada do problema

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \tag{6-161}$$

é escrita segundo um somatório de senos e cossenos,

$$x(t) = c_1 \cos \Omega t + d_1 \sin \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t + d_3 \sin 3\Omega t \quad (6-162)$$

Avaliando a função $x(t)$ e suas derivadas no instante inicial, e igualando respectivamente à função aproximada (6-162) e suas derivadas, tem-se as seguintes equações,

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_3 \\ v_0 &= d_1\Omega + 3d_3\Omega \\ F - 2\omega_0\zeta v_0 - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 &= -c_1\Omega^2 - 9c_3\Omega^2 \\ 2\zeta\omega_0\beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 v_0 + 2\zeta\omega_0^3 x_0 + \\ (4\zeta^2\omega_0^2 - \omega_0^2)v_0 - 2\zeta\omega_0 F &= -d_1\Omega^3 - 27d_3\Omega^3 - \\ F\Omega^2 + 4\omega_0^2\zeta^2 F - 8\omega_0^3\zeta^3 v_0 - 4\omega_0^4\zeta^2 x_0 - 4\omega_0^2\zeta^2\beta x_0^3 + 4\omega_0^3\zeta v_0 + \\ 12\omega_0\zeta\beta x_0^2 v_0 - \omega_0^2 F + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2\beta x_0^3 - 6\beta x_0 v_0^2 - 3\beta x_0^2 F + \\ 3\beta^2 x_0^5 &= c_1\Omega^4 + 81c_3\Omega^4 - \\ 4\omega_0^5\zeta x_0 - 12\omega_0^4\zeta^2 v_0 - 8\omega_0^3\zeta^3 F + 8\omega_0^3\zeta^3\beta x_0^3 + 4\omega_0^3\zeta F - \\ 16\omega_0^3\zeta\beta x_0^3 - 12\omega_0\zeta\beta^2 x_0^5 + 12\omega_0\zeta\beta x_0^2 F + 8\omega_0^5\zeta^3 x_0 + 2\omega_0\zeta F\Omega^2 + \\ 27\beta^2 x_0^4 v_0 - 36\omega_0^2\zeta^2\beta x_0^2 v_0 + 16\omega_0^4\zeta^4 v_0 + 48\omega_0\zeta\beta x_0 v_0^2 + \\ 24\omega_0^2\beta x_0^2 v_0 - 18\beta x_0 F v_0 - 6\beta v_0^3 + \omega_0^4 v_0 &= d_1\Omega^5 + 243d_3\Omega^5 \end{aligned} \quad (6-163)$$

sendo que as duas últimas em (6-163) são para a determinação de x_0 e v_0 .

Resolvendo as quatro primeiras equações em (6-163), obtêm-se as seguintes

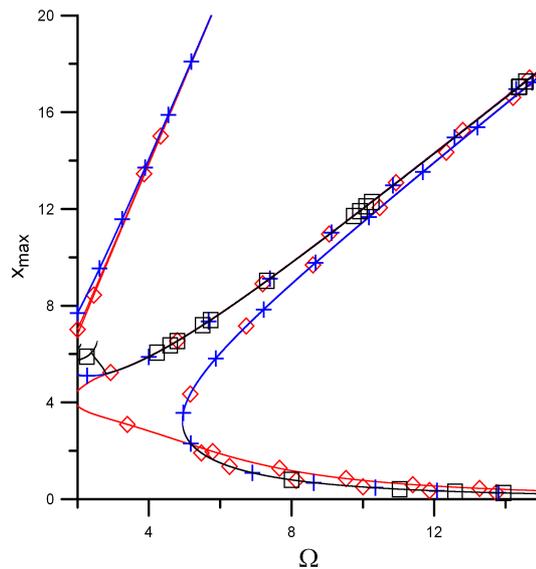


Figura 6.12: Curvas de ressonância do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$: \square , RK; $+$, HBM com três harmônicos; \diamond , FTG com três harmônicos.

soluções para as amplitudes

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{9}{8}x_0 + \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) \\
 c_3 &= -\frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) \\
 d_1 &= \frac{9}{8\Omega}v_0 + \frac{1}{8\Omega^3}(-2\zeta\omega_0(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) - \\
 &\quad \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0) \\
 d_3 &= -\frac{1}{24\Omega}v_0 - \frac{1}{24\Omega^3}(-2\zeta\omega_0(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) - \\
 &\quad \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0)
 \end{aligned} \tag{6-164}$$

e as equações adicionais necessárias para determinar x_0 e v_0 tornam-se

$$\begin{aligned}
 &3\beta^2x_0^5 + (-4\omega_0^2\zeta^2\beta + 4\omega_0^2\beta)x_0^3 + (12\omega_0\zeta\beta v_0 - 3\beta F)x_0^2 + \\
 &(\omega_0^4 - 6\beta v_0^2 - 4\omega_0^4\zeta^2)x_0 + (-8\omega_0^3\zeta^3 + 4\omega_0^3\zeta)v_0 - F\Omega^2 + \\
 &4\omega_0^2\zeta^2F - \omega_0^2F = 10\Omega^2\beta x_0^3 + (10\Omega^2\omega_0^2 - 9\Omega^4)x_0 -
 \end{aligned} \tag{6-165}$$

$$\begin{aligned}
 &10F\Omega^2 + 20\Omega^2\omega_0\zeta v_0 \\
 &- 12\omega_0\zeta\beta^2x_0^5 + 27\beta^2x_0^4v_0 + (8\omega_0^3\zeta^3\beta - 16\omega_0^3\zeta\beta)x_0^3 + ((24\omega_0^2\beta - \\
 &36\omega_0^2\zeta^2\beta)v_0 + 12\omega_0\zeta\beta F)x_0^2 + (-4\omega_0^5\zeta + 48\omega_0\zeta\beta v_0^2 - 18\beta Fv_0 + \\
 &8\omega_0^5\zeta^3)x_0 - 6\beta v_0^3 + (16\omega_0^4\zeta^4 - 12\omega_0^4\zeta^2 + \omega_0^4)v_0 - 8\omega_0^3\zeta^3F + \\
 &4\omega_0^3\zeta F + 2\omega_0\zeta F\Omega^2 = -20\Omega^2\omega_0\zeta\beta x_0^3 + 30\Omega^2\beta x_0^2v_0 - \\
 &20\Omega^2\omega_0^3\zeta x_0 + (10\Omega^2\omega_0^2 - 40\Omega^2\omega_0^2\zeta^2 - 9\Omega^4)v_0 + 20\omega_0\zeta F\Omega^2
 \end{aligned} \tag{6-166}$$

No lugar de se utilizar as eqs. (6-165) e (6-166), pode-se aplicar o método de Galerkin para minimizar o resíduo.

Substituindo (6-164) em (6-162) tem-se a solução aproximada de (6-161). Utilizando como funções peso

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{\partial x}{\partial \Omega} \\
 W_2 &= \frac{\partial x}{\partial v_0}
 \end{aligned} \tag{6-167}$$

e aplicando o método de Galerkin obtém-se duas novas equações.

A figura 6.13 apresenta as coordenadas do ponto fixo versus Ω , obtidas com integração numérica, HBM e FTG, do problema $\ddot{x} + 0,4\dot{x} + x + 3x^3 = 50 \cos \Omega t$. Pode-se ver que em alguns trechos já há uma boa precisão, porém há um grande número de ramos que não existem nas soluções obtidas com integração numérica e HBM.

Já com soluções contendo mais harmônicos, fica difícil aplicar Galerkin,

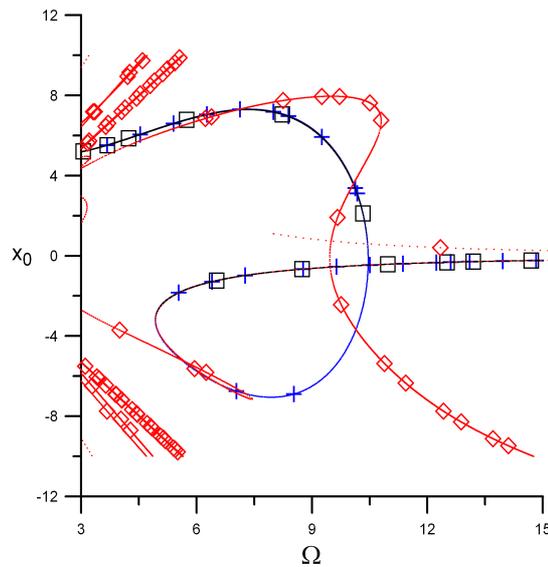


Figura 6.13: Variação da coordenada do ponto fixo do problema $\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x + 3x^3 = \cos\Omega t$: \square , RK; +, HBM com três pares de harmônicos; \diamond , FTG com dois pares de harmônicos.

mas o maior número de termos acaba reduzindo o resíduo, como mostram as figuras 6.14(a) e 6.14(b).

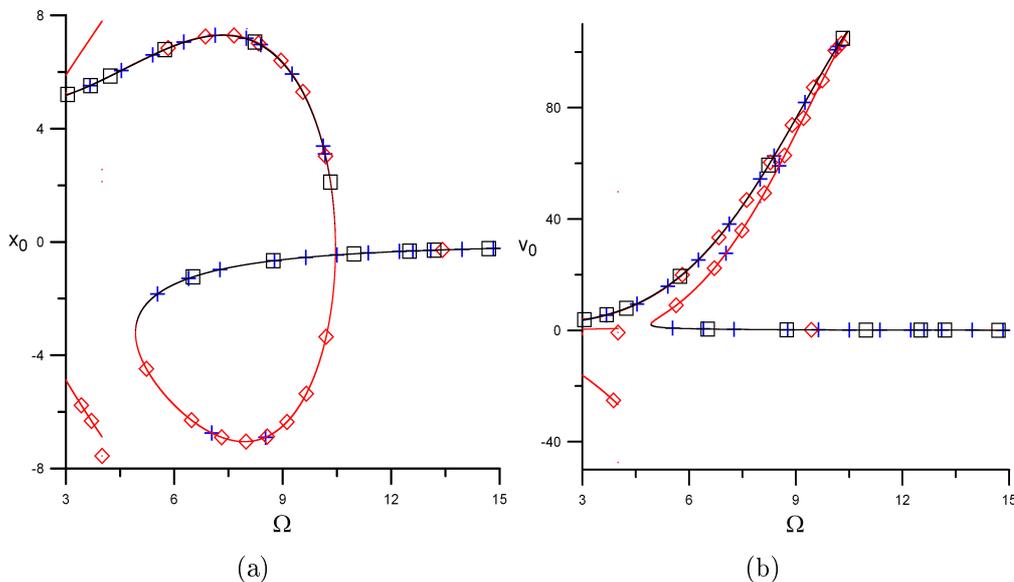


Figura 6.14: Problema $\ddot{x} + 0,4\dot{x} + x + x^3 = 50 \cos\Omega t$. \square , RK; +, HBM com três pares de harmônicos; \diamond , FT com 10 pares de harmônicos; (a) Curva $x_0 - \Omega$; (b) curva $v_0 - \Omega$.

Cabe ressaltar que em todos os exemplos deste capítulo considerou-se uma grande não-linearidade ou um valor bastante elevado da magnitude da força com o intuito de verificar as potencialidades dos métodos aqui propostos.

No anexo C tem-se a solução da equação de Duffing (6-14) do problema de vibração forçada amortecida. Primeiramente a solução do problema é escrita

em série de Taylor e em seguida ela é transformada em série de Fourier. Diferentemente do anexo B, agora as derivadas de ordem superior da solução não são determinadas previamente. Em vez disto, elas são determinadas recursivamente sempre que necessário. No item C.1.2 tem-se um exemplo de como uma solução é obtida. No item C.2 as rotinas e as derivadas da solução são exportadas para um arquivo cpp, assim as soluções serão obtidas de forma semelhante ao do exemplo C.1.2, mas de uma forma muito mais rápida, por um programa escrito na linguagem C++. No item C.2.2 tem-se o arquivo gerado pelo programa em Maple que é utilizado pelo programa em C++ para encontrar os pontos fixos de uma aproximação com dois pares de harmônicos.