

3

Métodos de Perturbação

O objetivo deste capítulo é apresentar os métodos de perturbação mais utilizados na análise de sistemas dinâmicos não-lineares, bem como modificações destes métodos apresentadas na literatura recente com o objetivo de melhorar o desempenho dos métodos clássicos. São também apresentados os algoritmos que, programados em álgebra simbólica, permitem a automação dos métodos.

Os métodos de perturbação podem ser utilizados na resolução de problemas com pequenas não-linearidades. A solução é escrita através de uma série de potências de um determinado parâmetro de perturbação. Geralmente, quanto mais termos tiver a série, mais precisa será a solução. Entretanto, em alguns casos, de acordo com Andrianov e Awrejcewicz (2000) e Amore et. al. (2004)[54, 55], o acréscimo no número de termos da aproximação pode conduzir a uma série divergente.

A medida que a não-linearidade cresce, a solução aproximada deve conter mais termos para que se tenha uma boa aproximação. Em alguns casos, pode não ser possível aplicar o método devido à complexidade da solução.

Seja a equação com não linearidade cúbica

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-1)$$

onde o parâmetro β , associado ao grau de não-linearidade, pode ser tomado como um parâmetro de perturbação, desde que β seja suficientemente pequeno.

O método consiste em expandir a solução $x(t)$ da equação (3-1) por uma série em torno de $\beta=0$. Seja a solução aproximada:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i(t) \quad (3-2)$$

Substituindo (3-2) em (3-1), e agrupando os termos de acordo com as potências de β , tem-se para $n = 1$, por exemplo:

$$\beta^4 x_1^3 + 3x_0 \beta^3 x_1^2 + 3x_0^2 \beta^2 x_1 + (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) \beta + \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-3)$$

Considerando que os termos de mais alta ordem são muito pequenos, já que β é pequeno, para que a igualdade (3-3) seja atendida, os termos que multiplicam β^0 e β^1 devem ser nulos, ou seja

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-4)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 \quad (3-5)$$

A solução para x_0 em (3-4) é, já considerando as condições iniciais $x_0(0) = x(0)$ e $\dot{x}_0(0) = 0$,

$$x_0 = x(0) \cos \omega_0 t \quad (3-6)$$

A substituição de (3-6) em (3-5), leva a uma equação diferencial não-homogênea em x_1 cuja solução é,

$$x_1 = -\frac{1}{32} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{8} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} t \sin \omega_0 t + \frac{1}{32} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t \quad (3-7)$$

A solução para x_1 é composta de uma parcela homogênea mais uma particular. Uma forma de fazer com que a solução aproximada (3-2) atenda as condições iniciais do problema (3-1) é fazendo com que todas as condições iniciais nas equações seguintes sejam nulas ($x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0; i \geq 1$). Dessa forma, as novas constantes que surgem em cada solução homogênea, tornam-se função de $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, que são as condições iniciais de (3-1).

Os termos lineares em t , presentes em (3-7), são chamados de termos seculares e limitam a aplicabilidade da solução aproximada para apenas pequenos intervalos de tempos. Lindstedt, em 1882, desenvolveu uma técnica que evita o surgimento destes termos.

3.1 Método Lindstedt-Poincaré

No LP expande-se a frequência da solução em uma série de potências da perturbação, ou seja

$$\omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-8)$$

Para que a frequência da resposta fique explícita na equação, aplica-se a seguinte transformação do tempo,

$$\tau = \omega t \quad (3-9)$$

Assim, x deixa de ser função de t e passa a ser função de τ e a eq. (3-1) torna-se

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-10)$$

Considerando uma aproximação com três termos para $x(\tau)$ e para a frequência ω , tem-se

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) + \beta^2 x_2(\tau) + \beta^3 x_3(\tau) \quad (3-11)$$

$$\omega = \omega_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-12)$$

onde e_i são as correções da frequência em função da amplitude.

Substituindo (3-11) e (3-12) em (3-10) e agrupando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-13)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = -2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^3 \quad (3-14)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \quad (3-15)$$

$$\omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 = -3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2'' \quad (3-16)$$

Inicialmente, encontra-se x_0 resolvendo a eq. (3-13)

$$x_0 = C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \quad (3-17)$$

Aplicando as condições iniciais de deslocamento $x_0(0) = x(0)$ e velocidade $x_0'(0) = v(0)$, x_0 torna-se

$$x_0 = v(0) \sin \tau + x(0) \cos \tau \quad (3-18)$$

Substituindo (3-18) na eq. (3-14), tem-se

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 + \left(\frac{3}{4} v(0)^3 + \frac{3}{4} v(0) x(0)^2 - 2\omega_0 e_1 v(0) \right) \sin \tau + \\ \left(\frac{3}{4} v(0)^2 x(0) + \frac{3}{4} x(0)^3 - 2\omega_0 e_1 x(0) \right) \cos \tau + \left(\frac{3}{4} v(0) x(0)^2 - \right. \\ \left. \frac{1}{4} v(0)^3 \right) \sin 3\tau + \left(-\frac{3}{4} v(0)^2 x(0) + \frac{1}{4} x(0)^3 \right) \cos 3\tau = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação, encontra-se x_1 , a saber

$$\begin{aligned} x_1 = \left(\left(-\frac{3x(0)^3}{8\omega_0^2} - \frac{3v(0)^2 x(0)}{8\omega_0^2} + \frac{e_1 x(0)}{\omega_0} \right) \tau - \frac{3v(0)^3}{8\omega_0^2} + C_4 - \right. \\ \left. \frac{3v(0)x(0)^2}{8\omega_0^2} + \frac{e_1 v(0)}{\omega_0} \right) \sin \tau + \left(\frac{3v(0)x(0)^2}{32\omega_0^2} - \frac{v(0)^3}{32\omega_0^2} \right) \sin 3\tau + \\ \left(\left(\frac{3v(0)^3}{8\omega_0^2} - \frac{e_1 v(0)}{\omega_0} + \frac{3v(0)x(0)^2}{8\omega_0^2} \right) \tau + C_3 \right) \cos \tau + \left(\frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{3}{32} \frac{v(0)^2 x(0)}{\omega_0^2} \right) \cos 3\tau \quad (3-19)$$

Novamente as constantes devem ser determinados de acordo com as condições iniciais. Como foi imposto que $x_0(0)$ e $x_0'(0)$ são idênticos às condições iniciais, tem-se, com base na eq. (3-11), que $x_1(0)$, $x_1'(0)$, $x_2(0)$, $x_2'(0)$, $x_3(0)$ e $x_3'(0)$ devem ser nulos. Dessa forma tem-se

$$C_3 = \frac{x(0)}{32\omega_0^2} (3v(0)^2 - x(0)^2) \quad (3-20)$$

$$C_4 = \frac{3v(0)}{32\omega_0^2} (v(0)^2 - 3x(0)^2)$$

A solução de x_1 apresenta termos que crescem indefinidamente com o tempo. Eles devem ser eliminados para que a solução passe a ser periódica. Igualando a zero os termos que multiplicam $\tau \sin \tau$ e $\tau \cos \tau$ em (3-19), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{e_1 x(0)}{\omega_0} - \frac{3}{8\omega_0^2} x(0)^3 - \frac{3}{8\omega_0^2} v(0)^2 x(0) &= 0 \\ -\frac{e_1 v(0)}{\omega_0} + \frac{3}{8\omega_0^2} v(0)^3 + \frac{3}{8\omega_0^2} v(0) x(0)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

E qualquer uma das eqs. (3-21) conduzem a:

$$e_1 = \frac{3}{8\omega_0} (v(0)^2 + x(0)^2) \quad (3-22)$$

e

$$x_1 = \left((3v(0)^3 - 9v(0)x(0)^2) \sin \tau + (3v(0)x(0)^2 - v(0)^3) \sin 3\tau + \right. \\ \left. (3v(0)^2 x(0) - x(0)^3) \cos \tau + (x(0)^3 - 3v(0)^2 x(0)) \cos 3\tau \right) \frac{1}{32\omega_0^2}$$

As soluções x_0 e x_1 são agora inseridas em (3-15) e x_2 é determinado,

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(\left(\frac{33v(0)^2 x(0)^3}{128\omega_0^4} + \frac{e_2 x(0)}{\omega_0} + \frac{21x(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{3v(0)^4 x(0)}{256\omega_0^4} \right) \tau + \right. \\ & \left. \frac{33v(0)^3 x(0)^2}{128\omega_0^4} + C_6 + \frac{21x(0)^4 v(0)}{256\omega_0^4} - \frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} + \frac{e_2 v(0)}{\omega_0} \right) \sin \tau + \\ & \left(\frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{3x(0)^4 v(0)}{32\omega_0^4} + \frac{3v(0)^3 x(0)^2}{256\omega_0^4} \right) \sin 3\tau + \left(\frac{v(0)^5}{1024\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{5x(0)^4 v(0)}{1024\omega_0^4} - \frac{5v(0)^3 x(0)^2}{512\omega_0^4} \right) \sin 5\tau + \left(\left(\frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{33v(0)^3 x(0)^2}{128\omega_0^4} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{e_2 v(0)}{\omega_0} - \frac{21x(0)^4 v(0)}{256\omega_0^4} \right) \tau + C_5 \Big) \cos \tau + \left(\frac{9v(0)^4 x(0)}{256\omega_0^4} - \frac{3x(0)^5}{128\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{27v(0)^2 x(0)^3}{256\omega_0^4} \right) \cos 3\tau + \left(\frac{x(0)^5}{1024\omega_0^4} - \frac{5v(0)^2 x(0)^3}{512\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{5v(0)^4 x(0)}{1024\omega_0^4} \right) \cos 5\tau \end{aligned} \quad (3-23)$$

As constantes de integração C_5 e C_6 são obtidas fazendo-se $x_2(0) = 0$ e $x_2'(0) = 0$, e os termos seculares são retirados de x_2 , determinando-se e_2 . Tem-se então

$$C_5 = -\frac{x(0)}{1024\omega_0^4} (-23x(0)^4 + 41v(0)^4 + 98v(0)^2 x(0)^2) \quad (3-24)$$

$$C_6 = -\frac{v(0)}{1024\omega_0^4} (41v(0)^4 - 263x(0)^4 - 14v(0)^2 x(0)^2)$$

$$e_2 = \frac{3}{256\omega_0^3} (v(0)^4 - 22v(0)^2 x(0)^2 - 7x(0)^4) \quad (3-25)$$

Em seguida x_0 , x_1 e x_2 são substituídos na eq. (3-16) e x_3 é obtido. As constantes de integração são determinadas fazendo-se $x_3(0) = 0$ e $x_3' = 0$ e, novamente, os termos seculares são retirados de x_3 e obtém-se e_3 .

$$e_3 = -\frac{3}{2048\omega_0^5} (-21v(0)^4 x(0)^2 + 23v(0)^6 - 167v(0)^2 x(0)^4 - 27x(0)^6) \quad (3-26)$$

Uma vez determinados e_1 , e_2 e e_3 , tem-se a solução periódica em τ e pode-se escrever a relação frequência-amplitude. Considerando que $v(0) = 0$, da eq. (3-11) vem

$$\begin{aligned} x(\tau) = & \frac{x(0)^7}{32768\omega_0^6} \beta^3 \cos 7\tau + \left(\frac{x(0)^5}{1024\omega_0^4} \beta^2 - \frac{3x(0)^7}{2048\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos 5\tau + \\ & \left(\frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} \beta - \frac{3x(0)^5}{128\omega_0^4} \beta^2 + \frac{297x(0)^7}{16384\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos 3\tau + \\ & \left(x(0) - \frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} \beta + \frac{23x(0)^5}{1024\omega_0^4} \beta^2 - \frac{547x(0)^7}{32768\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos \tau \end{aligned} \quad (3-27)$$

Para escrever a solução em termos da variável original t , basta substituir τ por ωt na eq. (3-27). ω é obtido substituindo os valores de e_1 , e_2 e e_3 na eq. (3-12). Assim, tem-se

$$\omega = \omega_0 + \frac{3x(0)^2}{8\omega_0} \beta - \frac{21x(0)^4}{256\omega_0^3} \beta^2 + \frac{81x(0)^6}{2048\omega_0^5} \beta^3 \quad (3-28)$$

Escrevendo as eqs. (3-2) e (3-8) para n valendo de 1 até 6, após a retirada

dos termos seculares, encontram-se, respectivamente, as seguintes relações frequência-amplitude.

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 \quad (3-29)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-30)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 \quad (3-31)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-32)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 + \frac{37737}{2097152\omega_0^9}\beta^5 x(0)^{10} \quad (3-33)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 + \frac{37737}{2097152\omega_0^9}\beta^5 x(0)^{10} - \frac{936183}{67108864\omega_0^{11}}\beta^6 x(0)^{12} \quad (3-34)$$

Como se pode observar, a complexidade da solução cresce com o número de termos, n , adotado em (3-2) e (3-8).

A figura 3.1 apresenta a frequência da resposta em função da condição inicial de deslocamento $x(0) = x_0$ para as diferentes relações ω - $x(0)$ dadas em (3-29) a (3-31) e também a solução obtida por integração numérica da equação de movimento. Na figura 3.1(a) utilizou-se $\omega_0 = 1$ e $\beta = 1$, e em 3.1(b) utilizou-se $\omega_0 = 0,1$ e $\beta = 0,1$. Em 3.1(b) é possível perceber que a solução não é convergente. Isto ocorre porque, a medida que mais termos são adicionados, os denominadores em (3-29) à (3-34), que contêm potências de ω_0 , decrescem, crescendo a contribuição dos termos mais altos da série.

3.1.1

Vibração Forçada

O problema agora é escrito como

$$\Omega^2 x''(\tau) + \omega_0^2 x(\tau) + \beta x(\tau)^3 = \beta F \sin \tau \quad (3-35)$$

onde $\tau = \Omega t$, sendo Ω a frequência da excitação. Ao impor que a força é proporcional a β , admite-se que a amplitude da força não é muito grande.

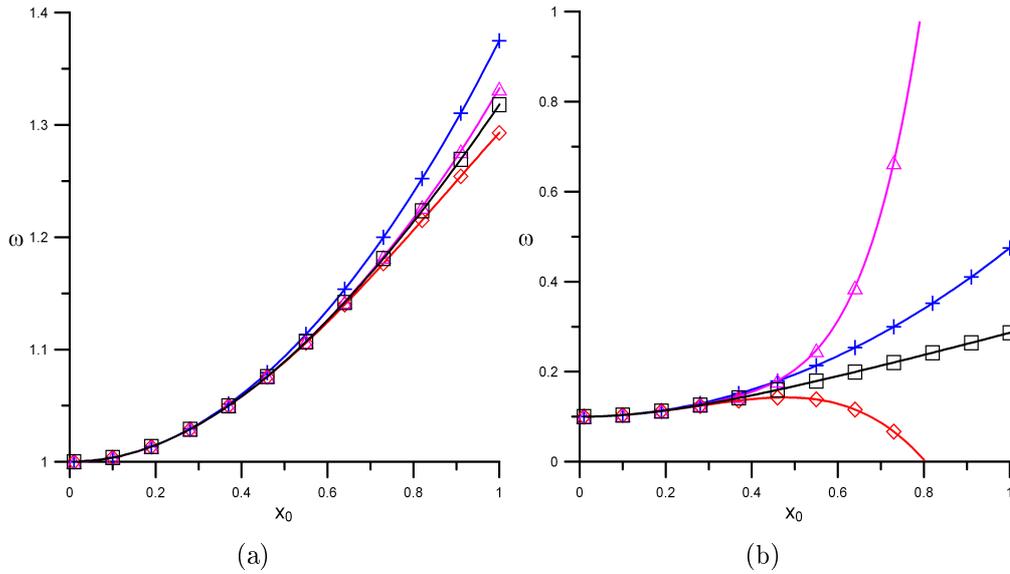


Figura 3.1: Relação $\omega-x_0$. \square , RK; $+$, eq. (3-29); \diamond , eq. (3-30); \triangle , eq. (3-31). (a) Série convergente, $\omega_0 = \beta = 1$; (b) Série não convergente, $\omega_0 = \beta = 0, 1$.

Considerando novamente uma aproximação com três termos, tem-se

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) + \beta^2 x_2(\tau) + \beta^3 x_3(\tau) \quad (3-36)$$

$$\Omega = \omega_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-37)$$

Substituindo (3-36) e (3-37) em (3-35) e coletando termos de mesma ordem em β , obtém-se

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-38)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = F \sin \tau - 2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^3 \quad (3-39)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \quad (3-40)$$

$$\omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 = -3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2'' \quad (3-41)$$

A única diferença do sistema de equações (3-38)-(3-41) em relação ao problema de vibração livre, eqs. (3-13)-(3-16), é a presença de $F \sin \tau$ em (3-39).

Somente interessa a resposta permanente da solução. Dessa forma, admite-se que a solução de x_0 está em fase com a força aplicada

$$x_0 = A \sin \tau \quad (3-42)$$

Substituindo (3-42) na eq. (3-39), obtém-se

$$\omega_0^2(x_1'' + x_1) - 2\omega_0 e_1 A \tau \sin \tau - \frac{A^3}{4} \sin 3\tau +$$

$$\left(\frac{3A^3}{4} - F\right) \sin \tau = 0 \quad (3-43)$$

Resolvendo (3-43), encontra-se para x_1

$$x_1 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau - \frac{e_1 A}{\omega_0} \tau \cos \tau - \frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \tau \cos \tau - \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \cos \tau \quad (3-44)$$

Agora as parcelas homogêneas das soluções são desprezadas fazendo $C_i = 0$. Neste caso

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3-45)$$

Retirando os termos seculares de x_1 , tem-se

$$e_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} - \frac{-F}{2\omega_0 A} \quad (3-46)$$

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau \quad (3-47)$$

Inserindo as soluções x_0 e x_1 em (3-40) e resolvendo-a, tem-se

$$\begin{aligned} C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ e_2 &= \frac{1}{256\omega_0^3} \left(-15A^4 + 48AF - 32\frac{F^2}{A^2} \right) \end{aligned} \quad (3-48)$$

$$x_2 = \frac{A^5}{1024\omega_0^4} (21 \sin 3\tau + \sin 5\tau) - \frac{9A^2 F}{256\omega_0^4} \sin 3\tau \quad (3-49)$$

Em seguida x_0 , x_1 e x_2 são inseridos na eq. (3-41) e x_3 é obtido, as constantes de integração C_5 e C_6 são anuladas e os termos seculares são retirados de x_3 , obtendo-se

$$e_3 = \frac{1}{8192\omega_0^5} \left(123A^6 - 512\frac{F^3}{A^3} - 708A^3 F + 1152F^2 \right) \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{A^7}{32768\omega_0^6} (\sin 7\tau + 417 \sin 3\tau + 43 \sin 5\tau) + \\ &\quad \frac{A^4 F}{12288\omega_0^6} (567 \sin 3\tau + 26 \sin 5\tau) - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6} \sin 3\tau \end{aligned} \quad (3-51)$$

A partir de (3-37), obtém-se para a curva de ressonância não-linear a seguinte relação frequência-amplitude

$$\Omega = \omega_0 + \frac{\beta}{8\omega_0 A}(3A^3 - 4F) + \frac{\beta^2}{256\omega_0^3 A^2}(-15A^6 + 48A^3 F - 32F^2) + \frac{\beta^3}{8192\omega_0^5 A^3}(1152A^3 F^2 - 512F^3 + 123A^9 - 708A^6 F) \quad (3-52)$$

Para um dado valor de F , a amplitude A pode ser retirada da eq. (3-52), uma vez que Ω é conhecido.

Da eq. (3-36), pode-se escrever a solução no tempo, substituindo τ por Ωt , ou seja

$$x(t) = -\frac{A^7 \beta^3}{32768\omega_0^6} \sin 7\Omega t + \left\{ \frac{A^5 \beta^2}{1024\omega_0^4} + \beta^3 \left(\frac{13A^4 F}{6144\omega_0^6} - \frac{43A^7}{32768\omega_0^6} \right) \right\} \sin 5\Omega t + \left\{ -\frac{A^3 \beta}{32\omega_0^2} + \beta^2 \left(\frac{21A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{9A^2 F}{256\omega_0^4} \right) + \beta^3 \left(\frac{189A^4 F}{4096\omega_0^6} - \frac{417A^7}{32768\omega_0^6} - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6} \right) \right\} \sin 3\Omega t + A \sin \Omega t \quad (3-53)$$

O deslocamento máximo é então obtido avaliando (3-53) ao longo do tempo.

3.1.2 Vibração Forçada Amortecida

O problema passa a ser escrito como

$$\Omega^2 x(\tau)'' + 2\Omega\beta\zeta\omega_0 x(\tau)' + \omega_0^2 x(\tau) + \beta x(\tau)^3 = \beta F \sin(\tau + \phi) \quad (3-54)$$

onde $\tau = \Omega t$. Agora o amortecimento também é considerado proporcional a β , isto é, não é muito grande. Considera-se uma aproximação com apenas um termo em β , pois para mais termos não é possível retirar os termos seculares das soluções. Também é admitido que há um ângulo de fase ϕ entre a resposta e a força aplicada. O ângulo de fase é uma das incógnitas do problema em sistemas amortecidos, e pode ser inserido tanto na resposta quanto na excitação. Por simplificação, em (3-54) ele é inserido na excitação.

Sejam as aproximações

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) \quad (3-55)$$

$$\Omega = \omega_0 + \beta e_1 \quad (3-56)$$

Inserindo as eqs. (3-55) e (3-56) em (3-54) e equacionando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-57)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= F \sin \tau \cos \phi + F \cos \tau \sin \phi - \\ & x_0^3 - 2\omega_0 e_1 x_0'' - 2\zeta \omega_0^2 x_0' \end{aligned} \quad (3-58)$$

A solução permanente da eq. (3-57) é tomada da forma:

$$x_0 = A \sin \tau \quad (3-59)$$

Substituindo (3-59) em (3-58), tem-se

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= F(\sin \tau \cos \phi + \cos \tau \sin \phi) + \frac{A^3}{4} \sin 3\tau - \\ & \frac{3A^3}{4} \sin \tau + 2\omega_0 e_1 A \sin \tau - 2\zeta \omega_0^2 A \cos \tau \end{aligned} \quad (3-60)$$

Resolvendo (3-60) e desprezando a parcela homogênea da solução, tem-se para x_1

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau - \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \sin \tau + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \tau \cos \tau + \frac{e_1 A}{\omega_0} \sin \tau - \\ & \frac{e_1 A}{\omega_0} \tau \cos \tau - \zeta A \tau \sin \tau + \frac{F}{4\omega_0^2} \sin \tau \cos \phi + \\ & \frac{F}{4\omega_0^2} \cos \tau \sin \phi - \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \cos \tau \cos \phi + \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \sin \tau \sin \phi \end{aligned} \quad (3-61)$$

Os termos seculares de (3-61) são eliminados fazendo-se

$$\begin{aligned} -\zeta A + \frac{F}{2\omega_0^2} \sin \phi &= 0 \\ -\frac{e_1 A}{\omega_0} + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} - \frac{F}{2\omega_0^2} \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

de onde se obtém o ângulo de fase ϕ e e_1 , a saber

$$\sin \phi = \frac{2\zeta A \omega_0^2}{F} \quad (3-63)$$

$$e_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} - \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 A^2} - \zeta^2 \omega_0^2} \quad (3-64)$$

Assim, a solução de x_1 torna-se

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau + \frac{\zeta A}{2} \cos \tau - \frac{1}{4\omega_0^2} \sin \tau \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^4} \quad (3-65)$$

Inserindo as soluções (3-59) e (3-65) em (3-55) e fazendo $\tau = \Omega t$, chega-se à solução no tempo:

$$x(t) = A \sin \Omega t - \frac{\beta A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\Omega t + \frac{\beta \zeta A}{2} \cos \Omega t - \frac{\beta}{4\omega_0^2} \sin \Omega t \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^4} \quad (3-66)$$

Inserindo (3-64) na eq. (3-56), obtém-se para a curva de ressonância do sistema amortecido

$$\Omega = \omega_0 + \frac{3\beta A^2}{8\omega_0} - \beta \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 A^2} - \zeta^2 \omega_0^2} \quad (3-67)$$

Com A obtido através de (3-67), a amplitude da resposta é então conhecida observando-se a evolução da resposta no tempo, eq. (3-66).

3.1.3

Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários para a automatização do problema de vibração livre não amortecida ou vibração forçada, amortecida ou não, para n termos na aproximação. A restrição de vibração livre não-amortecida é devida ao método, porque as amplitudes das soluções aproximadas são constantes no tempo.

O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, na linguagem MAPLE, executa os seguintes passos:

1. Aplica-se uma transformação de coordenadas à equação diferencial que se deseja estudar. $\left\{ \begin{array}{l} \tau = \Omega t \\ x(t) \Rightarrow x(\tau) \end{array} \right.$
2. A solução aproximada e a relação entre as frequências são substituídas na equação diferencial. $\left\{ \begin{array}{l} x(\tau) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i \\ \Omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \end{array} \right.$
3. Os termos que multiplicam β são agrupados de acordo com a potência de β . Dessa forma constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas. Uma solução de amplitude desconhecida, representando apenas a parcela permanente da resposta, é adotada no caso de vibração forçada. $\left\{ \begin{array}{l} eq_0 : \\ \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ x_0 = A \cos \tau \\ ou \\ x_0 = x(0) \cos \tau \\ + v(0) \sin \tau \end{array} \right.$
4. Se o problema for de vibração forçada, as parcelas homogêneas das soluções de x_{i+1} são desprezadas, anulando-se as constantes que surgem na integração. Na vibração livre, as constantes de integração são determinadas de forma a atender as $\left\{ \begin{array}{l} C_j = 0 \\ ou \\ x_{i+1}(0) = 0 \\ x_{i+1}'(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_j$

condições iniciais $x_{i+1}(0) = 0$ e $x_{i+1}'(0) = 0$.

5. Os termos seculares presentes na solução encontrada no passo 4 são eliminados, determinando-se o valor de e_{i+1} que anula estes termos. Com e_{i+1} determinado, uma nova solução x_{i+1} é escrita, onde a periodicidade está assegurada.

$$\begin{cases} x_{i+1} \Rightarrow e_{i+1} \\ \Downarrow \\ x_{i+1} \text{periódica} \end{cases}$$

6. Os passos 4, 5 e 6 são repetidos até que todos os x_i periódicos sejam determinados. Isto permite reescrever a solução $x(\tau)$ e a relação entre as frequências da excitação e a natural do passo 2. Agora basta atribuir valores aos parâmetros e encontrar a valor do parâmetro A .

$$\begin{cases} \Omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \\ \Downarrow \\ A \end{cases}$$

7. Substitui-se A em $x(\tau)$ e aplica-se mais um transformação de variáveis, obtendo-se a resposta no tempo.

$$\begin{cases} A \Rightarrow x(\tau) \\ \tau = \Omega t \\ x(\tau) \Rightarrow x(t) \end{cases}$$

8. O valor máximo da resposta no tempo é encontrado.

$$\begin{cases} x(t) \Rightarrow x_{max} \end{cases}$$

3.2

Método Lindstedt-Poincaré Modificado

Nos últimos anos, diversos métodos foram propostos com o objetivo de fornecer respostas quantitativamente consistentes para fortes não-linearidades. Burton e Hamdan (1983)[73] citam alguns desses métodos, entre os quais o LP modificado.

Alguns métodos derivados do LP original consistem em introduzir um novo parâmetro de perturbação que permanece pequeno mesmo quando o parâmetro original é muito grande [51]. Burton (1984)[74] usou a relação $\alpha = \beta a^2 / (4 + 3\beta a^2)$ e expandiu a solução em potências de α no lugar de β , fazendo com que as soluções no tempo e na frequência apresentem resultados convergentes.

He (2000) [75] propôs uma nova técnica de perturbação a partir do LP, que, segundo Hu (2004) [56, 76], apresenta resultados inferiores ao de uma técnica considerada clássica (método apresentado nesta seção). Segundo Hu, esta técnica é válida para grandes não-linearidades. Sanchez (2005) [77] mostra que o método proposto por He apresenta erros enormes na amplitude da resposta, enquanto que os erros no período ficam em faixas bem menores. Sanchez comenta que quando o erro exibido pelo método de He para o período

é menor que 5% para $\beta = 100$ em (3-1), o erro na amplitude da solução é 392%.

Utilizando a seguinte expansão para a frequência da resposta,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-68)$$

ao invés da expansão dada pela eq. (3-8), obtêm-se resultados superiores ao do LP clássico, tal como apontado por Andrianov (2000) [54]. De (3-68) tem-se que

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-69)$$

Para Burton (1984)[74], a eq. (3-68) apresenta resultados superiores por conter ω^2 , que aparece naturalmente na formulação, já que a equação diferencial é de segunda ordem.

Considerando uma aproximação com três termos para a solução no tempo e para a frequência ω_0 , tem-se

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t) + \beta^3 x_3(t) \quad (3-70)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \beta e_1 - \beta^2 e_2 - \beta^3 e_3 \quad (3-71)$$

Substituindo (3-70) e (3-71) em (3-1) e agrupando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3-72)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = e_1 x_0 - x_0^3 \quad (3-73)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = e_1 x_1 + e_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (3-74)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = e_3 x_0 + e_2 x_1 + e_1 x_2 - 3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 \quad (3-75)$$

Da mesma forma que no método clássico, encontra-se primeiramente a solução de x_0

$$x_0 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (3-76)$$

Aplicando as condições iniciais $x_0(0) = x(0)$ e $\dot{x}_0(0) = v(0)$ e determinando as constantes, tem-se

$$x_0 = \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t \quad (3-77)$$

Substituindo (3-77) na eq. (3-73), tem-se

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{e_1 v(0)}{\omega} \sin \omega t + e_1 x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)^3}{4\omega^3} \sin 3\omega t -$$

$$\begin{aligned} & \frac{3v(0)^3}{4\omega^3} \sin \omega t - \frac{3v(0)^2 x(0)}{4\omega^2} \cos \omega t + \frac{3v(0)^2 x(0)}{4\omega^2} \cos 3\omega t - \\ & \frac{3v(0)x(0)^2}{4\omega} \sin 3\omega t + \frac{3v(0)x(0)^2}{4\omega} \sin \omega t - \frac{x(0)^3}{4} \cos 3\omega t - \\ & \frac{3x(0)^3}{4} \cos \omega t \end{aligned} \quad (3-78)$$

Resolvendo (3-78), encontra-se x_1

$$\begin{aligned} x_1 = & \left(\frac{3v(0)x(0)^2}{32\omega^3} - \frac{v(0)^3}{32\omega^5} \right) \sin 3\omega t - \left(\frac{3v(0)^2 x(0)}{32\omega^4} - \right. \\ & \left. \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos 3\omega t + \left(C_3 - \frac{e_1 v(0)t}{2\omega^2} + \frac{3v(0)^3 t}{8\omega^4} + \right. \\ & \left. \frac{3tv(0)x(0)^2}{8\omega^2} \right) \cos \omega t + \left(C_4 - \frac{3v(0)^3}{8\omega^5} - \frac{3}{8\omega^3} v(0)x(0)^2 - \right. \\ & \left. \frac{3tx(0)^3}{8\omega} + \frac{e_1 \dot{x}(0)}{2\omega^3} + \frac{e_1 x(0)t}{2\omega} - \frac{3v(0)^2 x(0)t}{8\omega^3} \right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (3-79)$$

Novamente as constantes de integração são determinadas aplicando as condições iniciais. Como foi imposto que $x_0(0)$ e $\dot{x}_0(0)$ são idênticos às condições iniciais $x(0)$ e $v(0)$, da eq. (3-70) tem-se que $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_2(0)$, $x_3(0)$ e $\dot{x}_3(0)$ devem ser nulos, dessa forma tem-se

$$\begin{aligned} C_3 = & -\frac{e_1 x(0)}{2\omega^2} + \frac{15v(0)^2 x(0)}{32\omega^4} + \frac{11x(0)^3}{32\omega^2} \\ C_4 = & \frac{e_1 v(0)}{2\omega^3} - \frac{9v(0)^3}{32\omega^5} - \frac{21v(0)x(0)^2}{32\omega^3} \end{aligned} \quad (3-80)$$

Substituindo (3-80) em (3-79), a solução x_1 ainda contém termos que crescem indefinidamente com o tempo. Eles devem ser retirados para que a solução passe a ser periódica. Igualando a zero os termos que multiplicam $t \sin \omega t$ e $t \cos \omega t$ em (3-79), tem-se

$$\frac{e_1 x(0)}{2\omega} - \frac{3v(0)^2 x(0)}{8\omega^3} - \frac{3x(0)^3}{8\omega} = 0 \quad (3-81)$$

de onde determina-se e_1 ,

$$e_1 = \frac{3v(0)^2}{4\omega^2} + \frac{3x(0)^2}{4} \quad (3-82)$$

e x_1

$$x_1 = \left(\frac{3v(0)^3}{32\omega^5} - \frac{9v(0)x(0)^2}{32\omega^3} \right) \sin \omega t + \left(\frac{3v(0)x(0)^2}{32\omega^3} - \frac{v(0)^3}{32\omega^5} \right) \sin 3\omega t +$$

$$\left(\frac{3v(0)^2x(0)}{32\omega^4} - \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos \omega t + \left(\frac{x(0)^3}{32\omega^2} - \frac{3v(0)^2x(0)}{32\omega^4} \right) \cos 3\omega t$$

Inserindo x_0 e x_1 na eq. (3-74), tem-se para x_2

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(\frac{15v(0)^3x(0)^2}{256\omega^7} - \frac{3x(0)^4v(0)}{128\omega^5} - \frac{3v(0)^5}{256\omega^9} \right) \sin 3\omega t + \left(C_6 - \frac{21v(0)^5}{256\omega^9} + \right. \\ & \frac{3x(0)^5}{256\omega^3}t + \frac{15v(0)^3x(0)^2}{128\omega^7} + \frac{3x(0)^4v(0)}{256\omega^5} + \frac{15v(0)^2x(0)^3}{128\omega^5}t + \frac{e_2v(0)}{2\omega^3} + \frac{e_2x(0)}{2\omega}t - \\ & \left. \frac{21v(0)^4x(0)}{256\omega^7}t \right) \sin \omega t + \left(\frac{5x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} + \frac{v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} \right) \sin 5\omega t + \\ & \left(\frac{15x(0)^3v(0)^2}{256\omega^6} - \frac{9v(0)^4x(0)}{256\omega^8} \right) \cos 3\omega t + \left(\frac{x(0)^5}{1024\omega^4} - \frac{5x(0)^3v(0)^2}{512\omega^6} + \right. \\ & \left. \frac{5v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} \right) \cos 5\omega t + \left(\frac{21v(0)^5}{256\omega^8}t + C_5 - \frac{e_2v(0)}{2\omega^2}t - \frac{15v(0)^3x(0)^2}{128\omega^6}t - \right. \\ & \left. \frac{3x(0)^4v(0)}{256\omega^4}t \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

As constantes de integração C_5 e C_6 são obtidas fazendo-se $x_2(0) = 0$ e $\dot{x}_2(0) = 0$, e os termos seculares são retirados de x_2 , determinando-se e_2 , ou seja

$$\begin{aligned} C_5 = & -\frac{85x(0)^3v(0)^2}{512\omega^6} - \frac{e_2x(0)}{2\omega^2} + \frac{115v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} - \frac{13x(0)^5}{1024\omega^4} \\ C_6 = & -\frac{53v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} + \frac{v(0)e_2}{2\omega^3} + \frac{59v(0)x(0)^4}{1024\omega^5} \\ e_2 = & -\frac{3x(0)^4}{128\omega^2} + \frac{21v(0)^4}{128\omega^6} - \frac{15x(0)^2v(0)^2}{64\omega^4} \\ x_2 = & \left(\frac{47x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} + \frac{31v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{65v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} \right) \sin \omega t - \\ & \left(\frac{3x(0)^4v(0)}{128\omega^5} + \frac{3v(0)^5}{256\omega^9} - \frac{15v(0)^3x(0)^2}{256\omega^7} \right) \sin 3\omega t + \\ & \left(\frac{v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} + \frac{5x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} \right) \sin 5\omega t - \\ & \left(\frac{x(0)^5}{1024\omega^4} + \frac{25v(0)^2x(0)^3}{512\omega^6} - \frac{31v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} \right) \cos \omega t + \\ & \left(\frac{15v(0)^2x(0)^3}{256\omega^6} - \frac{9v(0)^4x(0)}{256\omega^8} \right) \cos 3\omega t + \\ & \left(\frac{x(0)^5}{1024\omega^4} + \frac{5v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} - \frac{5v(0)^2x(0)^3}{512\omega^6} \right) \cos 5\omega t \end{aligned}$$

Em seguida x_0 , x_1 e x_2 são inseridos na eq. (3-75), x_3 é obtido, as constantes de integração são determinadas fazendo-se $x_3(0) = 0$ e $\dot{x}_3(0) = 0$, e, novamente, os termos seculares são retirados de x_3 , e tem-se finalmente e_3 , a saber.

$$e_3 = \frac{33v(0)^6}{512\omega^{10}} + \frac{21v(0)^2x(0)^4}{512\omega^6} - \frac{45v(0)^4x(0)^2}{256\omega^8} \quad (3-83)$$

Uma vez determinados e_1 , e_2 e e_3 , tem-se a solução periódica no tempo e pode-se reescrever a relação frequência amplitude (eq. (3-68)) na forma

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta v(0)^2}{4\omega^2} + \frac{3\beta x(0)^2}{4} - \frac{3\beta^2 x(0)^4}{128\omega^2} + \frac{21\beta^2 v(0)^4}{128\omega^6} - \\ \frac{15\beta^2 v(0)^2 x(0)^2}{64\omega^4} + \frac{33\beta^3 v(0)^6}{512\omega^{10}} + \frac{21\beta^3 v(0)^2 x(0)^4}{512\omega^6} - \\ \frac{45\beta^3 v(0)^4 x(0)^2}{256\omega^8} \end{aligned} \quad (3-84)$$

Melhores resultados são obtidos a medida que mais termos são considerados nas aproximações (3-70) e (3-68).

Considerando que as condições sejam sempre

$$\begin{aligned} x(0) &\neq 0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3-85)$$

e escrevendo as eqs. (3-70) e (3-68) para n valendo 1, 2, 3, 4, 5 e 6, após tirar os termos seculares, encontram-se, respectivamente, as seguintes relações frequência-amplitude:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 \quad (3-86)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-87)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-88)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-89)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-90)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \\ \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 - \frac{33}{16777216\omega^{10}}\beta^6 x(0)^{12} \end{aligned} \quad (3-91)$$

Ao contrário do método tradicional, eqs. (3-29) à (3-34), onde se obtém uma expressão explícita para ω em função dos parâmetros do sistema, no método modificado deve-se resolver uma equação não-linear para se determinar ω .

Para resolver cada uma das eqs. (3-86) à (3-91), pode-se utilizar Newton-Raphson ou programas de álgebra simbólica. As eqs. (3-86) e (3-87) podem ser resolvidas analiticamente. As suas soluções são respectivamente

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{(4\omega_0^2 + 3\beta x(0)^2)} \tag{3-92}$$

$$\omega = \frac{1}{4} \sqrt{(8\omega_0^2 + 6\beta x(0)^2 + \sqrt{64\omega_0^4 + 96\omega_0^2\beta x(0)^2 + 30\beta^2 x(0)^4})} \tag{3-93}$$

As soluções no tempo correspondentes às frequências naturais obtidas através de (3-92) e (3-93) são respectivamente

$$x = \left(x(0) - \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos \omega t + \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \tag{3-94}$$

$$x = \left(x(0) - \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} - \frac{\beta^2 x(0)^5}{1024\omega^4} \right) \cos \omega t + \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \beta^2 \frac{x(0)^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \tag{3-95}$$

A figura 3.2 apresenta a frequência da resposta em função da condição inicial de deslocamento $x(0) = x_0$ para diferentes relações $\omega-x_0$ e também a solução obtida por integração numérica da equação de movimento. Diferentemente do método tradicional (figura 3.1), o método pode apresentar

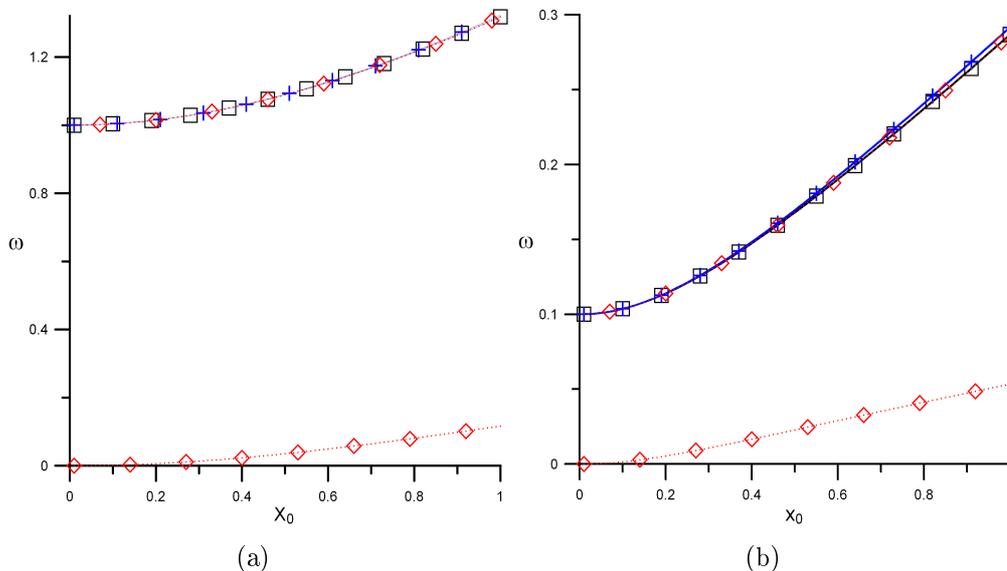


Figura 3.2: Relação $\omega-x_0$. \square , RK; +, eq. (3-86); \diamond , eq. (3-87). (a) $\omega_0 = \beta = 1$; (b) $\omega_0 = \beta = 0, 1$.

mais de uma solução para a frequência, sendo que a solução correta sempre será a maior. Entretanto o método não apresenta problemas de convergência

para pequenos valores de ω_0 , pois potências de ω estão nos denominadores nas relações (3-86) à (3-91).

3.2.1 Vibração Forçada

Considera-se agora que a aproximação

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3 \quad (3-96)$$

seja a solução de

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \beta F \sin \Omega t \quad (3-97)$$

Substituindo (3-96) em (3-97) e levando em consideração que a frequência da excitação é aproximadamente

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-98)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 + \beta^3 \ddot{x}_3 + (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \Omega^2 - \\ & (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta e_1 - (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta^2 e_2 - \\ & (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta^3 e_3 + \beta (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3)^3 \\ & = \beta F \sin \Omega t \end{aligned}$$

Igualando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem,

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3-99)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = F \sin \Omega t + e_1 x_0 - x_0^3 \quad (3-100)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = e_1 x_1 + e_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (3-101)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = e_3 x_0 + e_2 x_1 + e_1 x_2 - 3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 \quad (3-102)$$

A solução da eq. (3-99) é escrita como

$$x_0 = A \sin \Omega t \quad (3-103)$$

já que é de interesse apenas a resposta permanente do sistema (3-97).

A solução x_0 é inserida na segunda equação em (3-100) e encontra-se x_1 . A parcela transiente da nova solução é novamente desprezada anulando-se as constantes de integração. Dessa forma a solução x_1 é dado por

$$x_1 = \left(\frac{3A^3}{8\Omega} - \frac{F}{2\Omega} - \frac{e_1 A}{2\Omega} \right) t \cos \Omega t - \left(\frac{3A^3}{8\Omega^2} - \frac{F}{2\Omega^2} + \right.$$

$$\left. \frac{e_1 A}{2\Omega^2} \right) \sin \Omega t - \frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t \quad (3-104)$$

Retirando os termos seculares, encontra-se e_1

$$e_1 = \frac{3}{4}A^2 - \frac{F}{A} \quad (3-105)$$

e x_1 passa a ser periódico

$$x_1 = -\frac{1}{32\Omega^2}A^3 \sin 3\Omega t \quad (3-106)$$

Substituindo (3-103) e (3-106) na eq. (3-101), encontra-se x_2 . Desprezando a parcela homogênea da solução, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 = & \left(\frac{3A^5}{256\Omega^3} - \frac{e_2 A}{2\Omega} \right) t \cos \Omega t + \left(\frac{e_2 A}{2\Omega^2} - \frac{3A^5}{256\Omega^4} \right) \sin \Omega t - \\ & \left(\frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{A^2 F}{256\Omega^4} \right) \sin 3\Omega t + \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t \end{aligned} \quad (3-107)$$

Para anular os termos seculares, é necessário que:

$$e_2 = \frac{3A^4}{128\Omega^2} \quad (3-108)$$

Assim a solução(3-107) toma a forma

$$x_2 = \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t - \left(\frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{FA^2}{256\Omega^4} \right) \sin 3\Omega t \quad (3-109)$$

Substituindo (3-103), (3-106) e (3-109) em (3-102) e repetindo o procedimento de desprezar a parte homogênea da solução e retirar os termos seculares, encontra-se

$$e_3 = \frac{3FA^3}{1024\Omega^4} + \frac{15A^6}{4096\Omega^4} \quad (3-110)$$

e chega-se a

$$\begin{aligned} x_3 = & -\frac{A^7}{32768\Omega^6} \sin 7\Omega t + \left(\frac{5A^7}{32768\Omega^6} + \frac{FA^4}{6144\Omega^6} \right) \sin 5\Omega t - \\ & \left(\frac{9A^7}{32768\Omega^6} + \frac{3FA^4}{4096\Omega^6} + \frac{F^2 A}{2048\Omega^6} \right) \sin 3\Omega t \end{aligned} \quad (3-111)$$

Reescrevendo (3-96) e (3-98), tem-se respectivamente

$$x(t) = A \sin \Omega t + \frac{\beta^2 A^4}{1024\Omega^4} \left(A + \beta \left(\frac{F}{6\Omega^2} + \frac{5A^3}{32\Omega^2} \right) \right) \sin 5\Omega t -$$

$$\frac{\beta^3 A^7}{32768\Omega^6} \sin 7\Omega t - \left(\frac{\beta A^3}{32\Omega^2} + \beta^2 \left(\frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{A^2 F}{256\Omega^4} \right) + \beta^3 \left(\frac{3A^4 F}{4096\Omega^6} + \frac{AF^2}{2048\Omega^6} + \frac{9A^7}{32768\Omega^6} \right) \right) \sin 3\Omega t \quad (3-112)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta \left(\frac{3}{4} A^2 - \frac{F}{A} \right) + \beta^2 \left(\frac{3A^4}{128\Omega^2} \right) + \beta^3 \left(\frac{3FA^3}{1024\Omega^4} + \frac{15A^6}{4096\Omega^4} \right) \quad (3-113)$$

Deve-se notar a semelhança entre as eqs. (3-52) e (3-113), e (3-53) e (3-112).

3.2.2

Vibração Forçada Amortecida

Agora o amortecimento é considerado. A equação diferencial assume a seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \beta F \sin(\Omega t + \phi) \quad (3-114)$$

onde ϕ é o ângulo de fase entre a excitação e a resposta.

Considerando que a aproximação

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 \quad (3-115)$$

é a solução da eq. (3-114), substituindo (3-115) em (3-114) e levando em consideração que a frequência da excitação é

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 \quad (3-116)$$

tem-se,

$$\ddot{x}_0 + \beta\ddot{x}_1 + 2\beta\zeta\omega_0\dot{x}_0 + 2\beta^2\zeta\omega_0\dot{x}_1 + (x_0 + \beta x_1)\Omega^2 - (x_0 + \beta x_1)\beta e_1 + \beta(x_0 + \beta x_1)^3 = \beta F \sin \Omega t \cos \phi + \beta F \cos \Omega t \sin \phi \quad (3-117)$$

Igualando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$\ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 = 0 \quad (3-118)$$

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = F \sin \Omega t \cos \phi + F \cos \Omega t \sin \phi + e_1 x_0 - x_0^3 - 2\zeta\omega_0\dot{x}_0 \quad (3-119)$$

Novamente a solução da eq. (3-118) é escrita como

$$x_0 = A \sin \Omega t \quad (3-120)$$

A solução x_0 é inserida na equação seguinte (3-119) e encontra-se x_1 :

$$x_1 = \left(C_1 + \frac{3A^3}{8\Omega} t - \frac{F}{2\Omega} t \cos \phi - \frac{\zeta\omega_0 A}{\Omega} + \frac{F}{4\Omega^2} \sin \phi - \frac{e_1 A}{2\Omega} t \right)$$

$$\cos \Omega t + \left(C_2 + \frac{F}{4\Omega^2} \cos \phi + \frac{F}{2\Omega} t \sin \phi - \zeta \omega_0 A t \right) \sin \Omega t - \frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t \quad (3-121)$$

Desprezando a solução homogênea de (3-121), os termos seculares são eliminados fazendo-se,

$$-\zeta \omega_0 A + \frac{F \sin \phi}{2\Omega} = 0 \quad (3-122)$$

$$\frac{3A^3}{8\Omega} - \frac{e_1 A}{2\Omega} - \frac{F}{2\Omega} \cos \phi = 0 \quad (3-123)$$

de onde o ângulo de fase ϕ e e_1 são determinados

$$\sin \phi = \frac{2\zeta A \omega_0 \Omega}{F} \quad (3-124)$$

$$e_1 = \frac{3A^2}{4} - \sqrt{\frac{F^2}{A^2} - 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-125)$$

Assim, a solução x_1 torna-se

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t + \frac{\zeta \omega_0 A}{2\Omega} \cos \Omega t - \frac{1}{4\Omega^2} \sin \Omega t \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-126)$$

Inserindo as soluções (3-120) e (3-126) em (3-115), tem-se a solução no tempo:

$$x(t) = A \sin \Omega t - \frac{\beta A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t - \frac{\beta \zeta \omega_0 A}{2\Omega} \cos \Omega t + \frac{\beta}{4\Omega^2} \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^2 \Omega^2} \sin \Omega t \quad (3-127)$$

Inserindo (3-125) na eq. (3-116), obtém-se

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4} - \beta \sqrt{\frac{F^2}{A^2} - 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-128)$$

de onde pode-se determinar o valor de A a partir dos demais parâmetros.

Com A conhecido, a amplitude da resposta é então retirada da solução no tempo, eq. (3-127).

O LP modificado permite encontrar uma aproximação para a solução forçada amortecida até a ordem dois, enquanto que na versão tradicional (com a expansão (3-56) no lugar de (3-116)) a partir de x_2 não é mais possível retirar os termos seculares da solução.

Considerando as seguintes aproximações de segunda ordem,

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 \tag{3-129}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 \tag{3-130}$$

chega-se às seguintes expressões para $x_2(t)$ e e_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(-\frac{3A^5}{1024\Omega^4} - \frac{7A^2}{256\Omega^4} \sqrt{F^2 - 4\omega_0^2\zeta^2 A^2\Omega^2} \right) \sin 3\Omega t + \\ &\quad \frac{3A^3\omega_0\zeta}{128\Omega^3} \cos 3\Omega t + \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t \\ e_2 &= \frac{3A}{8\Omega^2} \sqrt{F^2 - 4\omega_0^2\zeta^2 A^2\Omega^2} + \frac{3A^4}{128\Omega^2} + \frac{F^2}{4A^2\Omega^2} \end{aligned} \tag{3-131}$$

Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários à automatização do problema de vibração forçada não amortecida para n termos na aproximação. O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, executa os seguintes passos:

1. A solução aproximada e a relação entre as frequências são substituídas na equação diferencial. $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i \\ \omega_0^2 = \Omega^2 - \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \end{array} \right.$

2. Os termos que multiplicam β são agrupados de acordo com a potência de β . Dessa forma constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas. Uma solução de amplitude desconhecida representando apenas a parcela permanente da resposta é adotada no caso de vibração forçada. $\left\{ \begin{array}{l} eq_0 \Rightarrow \Omega^2 x_0 + x_0 = 0 \\ x_0 = A \sin \Omega t \\ ou \\ eq_0 \Rightarrow \omega^2 \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ x_0 = x(0) \cos \omega t + \\ \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \Omega t \end{array} \right.$

3. As soluções conhecidas são inseridas na próxima equação diferencial a ser resolvida e encontra-se a solução desta equação. $\left\{ \begin{array}{l} x_0, \dots, x_i \\ \Downarrow \\ eq_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} \end{array} \right.$

4. No caso de vibração forçada, a parcela homogênea das soluções de x_{i+1} são desprezadas, anulando as constantes que surgem na integração. Na vibração livre, as constantes de integração são determinadas de forma a atender às condições iniciais $x_{i+1}(0) = 0$ e $\dot{x}_{i+1}(0) = 0$. $\left\{ \begin{array}{l} C_j = 0 \\ ou \\ x_{i+1}(0) = 0 \\ \dot{x}_{i+1}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_j$

5. Os termos seculares presentes na solução encontrada no passo 4 são eliminados, determinando-se o valor de e_{i+1} que anula estes termos.

Com e_{i+1} determinado, uma nova solução x_{i+1} é escrita, onde a periodicidade está assegurada. Havendo amortecimento, na determinação de e_1 deve-se também determinar o ângulo de fase ϕ da força ($F \sin(\Omega t + \phi)$), sendo depois possível retirar os termos seculares de x_2 .

$$\begin{cases} x_{i+1} \Rightarrow e_{i+1} \\ \Downarrow \\ x_{i+1} \text{periódica} \end{cases}$$

6. Os passos 4, 5 e 6 são repetidos até que todos os x_i periódicos sejam determinados. Isto permite reescrever a solução $x(t)$ e a relação entre as frequências da excitação e a natural do passo 2. Agora basta atribuir valores aos parâmetros e encontrar o parâmetro A .

$$\begin{cases} \Omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \\ \Downarrow \\ A \end{cases}$$

7. Substituir A em $x(t)$.

8. O valor máximo da resposta no tempo é encontrado. $\begin{cases} x(t) \Rightarrow x_{max} \end{cases}$

3.3 Método Múltiplas Escalas

Segundo Sanchez (1996)[29], contribuíram para o surgimento do MMS, Sturrock(1957), Frieman(1963), Kevorkian(1963) e Nayfeh(1965). No MMS, as parcelas x_i da solução da equação(3-11) ,que são funções do tempo, agora passam a ser funções de múltiplas escalas de tempo, T_0, T_1 , etc. Tomando

$$T_i = \beta^i t \tag{3-132}$$

a solução de uma equação de movimento pode ser escrita como,

$$x = \sum_{i=0}^n x_i(T_0, \dots, T_n) \beta^i \tag{3-133}$$

Substituindo (3-133) na equação diferencial, um sistema de equações é obtido coletando os termos de mesma potência em β . A solução da primeira das equações deste sistema é

$$x_0 = A(T_1, \dots, T_n) e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, \dots, T_n) e^{-\omega_0 T_0 i} \tag{3-134}$$

Esta solução é substituída na segunda equação do sistema e os termos que irão produzir termos seculares na nova solução são retirados. Resolvendo esta equação, encontra-se x_1 , onde apenas a parcela permanente é considerada. As

soluções para x_0 e x_1 são agora inseridas na próxima equação do sistema e assim por diante.

Para anular os termos que provocam o surgimento de termos seculares, novas equações são escritas, ao invés de resolvê-las como equações diferenciais parciais, pode-se combina-las numa única equação.

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial A(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \quad (3-135)$$

onde as derivadas de A em relação a T_i são obtidas a partir das equações geradas para eliminar os termos seculares. Segundo Nayfeh (2005)[78], esta técnica é chamada de método de reconstituição.

Assume-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B &= \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \end{aligned} \quad (3-136)$$

e insere-se estas expressões na equação(3-135). Separando as partes reais e imaginárias, a equação(3-135) produz duas novas equações que permitem determinar $a(t)$ e $\phi(t)$ e, conseqüentemente, (3-133) é determinada.

Tomando como exemplo a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-137)$$

uma aproximação para x que contém termos até a potência três é construída:

$$\begin{aligned} x &= x_0(T_0, T_1, T_2, T_3) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2, T_3) + \\ &\beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2, T_3) + \beta^3 x_3(T_0, T_1, T_2, T_3) \end{aligned} \quad (3-138)$$

A seguir, (3-138) é inserida em (3-137) e as derivadas parciais são obtidas de acordo com a regra da cadeia:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=0}^3 \beta^i \frac{\partial x_j(T_0, T_1, T_2, T_3)}{\partial T_i} \quad (3-139)$$

Agrupando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de quatro equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-140)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^3 \quad (3-141)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3-142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_3 = & -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_3} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 3x_0 x_1^2 - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_2} - \\ & 2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_2} - 3x_0^2 x_2 \end{aligned} \quad (3-143)$$

Segundo Nayfeh(2005)[78], a solução da eq. (3-140) pode ser escrita como

$$x_0 = A(T_1, T_2, T_3)e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2, T_3)e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-144)$$

onde o termo que contém B é o complexo conjugado de A .

Substituindo (3-144) na eq. (3-141) e expandindo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} \omega_0 e^{\omega_0 T_0 i} - 2i \frac{\partial B}{\partial T_1} \omega_0 e^{-i\omega_0 T_0} + A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \\ 3A^2 e^{\omega_0 T_0 i} B + 3A e^{-i\omega_0 T_0} B^2 + B^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \omega_0^2 x_1 = 0 \end{aligned} \quad (3-145)$$

Resolvendo a eq. (3-145), a solução x_1 conterà termos seculares devidos aos termos $e^{\omega_0 T_0 i}$ e $e^{-\omega_0 T_0 i}$ presentes em (3-145) e, por isso, são retirados da eq. (3-145) para que a solução x_1 não apresente termos seculares. Retirando estes termos, tem-se para (3-145)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + B^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (3-146)$$

Para que os termos que produzem o surgimento de termos seculares sejam anulados, as seguintes equações devem ser atendidas:

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} \omega_0 + 3A^2 B = 0 \\ -2i \frac{\partial B}{\partial T_1} \omega_0 + 3AB^2 = 0 \end{aligned} \quad (3-147)$$

Isolando as derivadas de A e B em relação a T_1 , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} = \frac{3}{2\omega_0} i A^2 B \\ \frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{-3}{2\omega_0} i A B^2 \end{aligned} \quad (3-148)$$

A solução permanente da eq. (3-146) é

$$x_1 = \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{B^3}{8\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 T_0} \quad (3-149)$$

Agora as derivadas (3-148) e as soluções (3-144) e (3-149) são substituídas na próxima equação diferencial, eq. (3-142). Evitando o surgimento de termos seculares, a eq. (3-142) torna-se

$$\begin{aligned} 8 \frac{\partial^2 x_2}{T_0^2} \omega_0^2 - 21A^4 e^{3i\omega_0 T_0} B - 21B_0^4 e^{-3i\omega_0 T_0} A + \\ 8\omega_0^4 x_2 + 3A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + 3B^5 e^{-5i\omega_0 T_0} = 0 \end{aligned} \quad (3-150)$$

cuja solução permanente é:

$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{21}{64\omega_0^4} (A^4 e^{3i\omega_0 T_0} B + B^4 e^{-3i\omega_0 T_0} A) + \\ \frac{1}{64\omega_0^4} (A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + B^5 e^{-5i\omega_0 T_0}) \end{aligned} \quad (3-151)$$

Ao evitar o aparecimento dos termos seculares, as derivadas de A e B em relação a T_2 são encontradas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_2} = -\frac{15}{16\omega_0^3} iA^3 B^2 \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} = \frac{15}{16\omega_0^3} iA^2 B^3 \end{aligned} \quad (3-152)$$

Finalmente, substituindo as derivadas (3-148), (3-152) e as soluções (3-144), (3-149) e (3-151) na eq. (3-143) e retirando os termos que provocam o surgimento de termos seculares, tem-se a solução permanente de x_3

$$\begin{aligned} x_3 = -\frac{43}{512\omega_0^6} (A^6 e^{5i\omega_0 T_0} B + B^6 e^{-5i\omega_0 T_0} A) + \\ \frac{417}{512\omega_0^6} (A^5 e^{3i\omega_0 T_0} B^2 + B^5 e^{-3i\omega_0 T_0} A^2) + \\ \frac{1}{512\omega_0^6} (A^7 e^{7i\omega_0 T_0} + B^7 e^{-7i\omega_0 T_0}) \end{aligned} \quad (3-153)$$

As derivadas de A e B em relação a T_3 são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_3} = \frac{123}{128\omega_0^5} iA^4 B^3 \\ \frac{\partial B}{\partial T_3} = -\frac{123}{128\omega_0^5} iA^3 B^4 \end{aligned} \quad (3-154)$$

Falta determinar A e B . Substituindo (3-148), (3-152) e (3-154) na equação de reconstituição (3-135), tem-se

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3\beta}{2\omega_0} iA^2 B - \frac{15\beta^2}{16\omega_0^3} iA^3 B^2 + \frac{123\beta^3}{128\omega_0^5} iA^4 B^3 \quad (3-155)$$

A única forma de resolver (3-155) é substituindo A e B pelas expressões (3-136). Assim, (3-155) fica,

$$\frac{1}{2} \frac{da(t)}{dt} + \frac{1}{2} ia(t) \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{3}{16384\omega_0^5} i\beta a(t)^3 (1024\omega_0^4 - 160\beta a(t)^2 \omega_0^2 + 41\beta^2 a(t)^4) \quad (3-156)$$

Simplificando as soluções x_i , têm-se

$$x_0 = a(t) \cos(\phi(t) + \omega_0 t) \quad (3-157)$$

$$x_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a(t)^3 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) \quad (3-158)$$

$$x_2 = \frac{a(t)^5}{1024\omega_0^4} (-21 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) + \cos(5\phi(t) + 5\omega_0 t)) \quad (3-159)$$

$$x_3 = \frac{a(t)^7}{32768\omega_0^6} \{417 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) - 43 \cos(5\phi(t) + 5\omega_0 t) + \cos(7\phi(t) + 7\omega_0 t)\} \quad (3-160)$$

Separando as partes real e imaginária na eq. (3-156), obtêm-se as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{2} a(t) \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{3}{16\omega_0} \beta a(t)^3 - \frac{15}{512\omega_0^3} \beta^2 a(t)^5 + \frac{123}{16384\omega_0^5} \beta^3 a(t)^7 \end{aligned} \quad (3-161)$$

Da primeira das eqs. (3-161) determina-se que $a(t)$ é uma constante e apenas ϕ é variável no tempo.

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ \phi(t) &= \left(\frac{123}{8192\omega_0^5} a^6 \beta^3 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 \beta^2 + \frac{3}{8\omega_0} a^2 \beta \right) t + \phi_0 \end{aligned} \quad (3-162)$$

Novamente, reescrevendo as soluções dos x_i , e com base nestas soluções, tem-se

$$x_0 = a \cos(\omega t + \phi_0) \quad (3-163)$$

$$x_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3\omega t + 3\phi_0) \quad (3-164)$$

$$x_2 = \frac{a^5}{1024\omega_0^4} (-21 \cos(3\omega t + 3\phi_0) + \cos(5\omega t + 5\phi_0)) \quad (3-165)$$

$$x_3 = \frac{a^7}{32768\omega_0^6} \{417 \cos(3\omega t + 3\phi_0) - 43 \cos(5\omega t + 5\phi_0) + \cos(7\omega t + 7\phi_0)\} \quad (3-166)$$

sendo que

$$\omega = \left| \left(\frac{123}{8192\omega_0^5} a^6 \beta^3 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 \beta^2 + \frac{3}{8\omega_0} a^2 \beta \right) + \omega_0 \right| \quad (3-167)$$

A solução para o deslocamento é

$$x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3 \quad (3-168)$$

Inserindo as respostas (3-163), (3-164), (3-165) e (3-166) na solução (3-168), determina-se a e ϕ_0 em função das condições iniciais.

Para se obter a e ϕ_0 a partir das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, pode-se utilizar Newton-Raphson:

$$\begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta \phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \phi_0} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \phi_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x(0) - x \\ -\dot{x} \end{Bmatrix} \quad (3-169)$$

Partindo de $\phi_0 = 0$ e um a qualquer como valores iniciais para se resolver o sistema (3-169), a correção $\Delta \phi_0$ é nula já que $\phi_0 = 0$. Conseqüentemente, menos soluções serão encontradas, pois possivelmente existem soluções para $\phi_0 \neq 0$. As soluções que deixam de ser encontradas geralmente apresentam um maior valor para a , e, conseqüentemente, maior amplitude e freqüência da resposta. Fazendo-se $\phi_0 = 0$, geralmente encontram-se soluções em que a amplitude máxima coincide com a condição inicial de deslocamento.

3.3.1 Vibração Forçada

Seja a equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x(t)^3 = \frac{1}{2} \beta F e^{\Omega T_0 i} + \frac{1}{2} \beta F e^{-\Omega T_0 i} \quad (3-170)$$

onde a freqüência da excitação é escrita como

$$\Omega = \omega_0 + \beta \sigma \quad (3-171)$$

sendo σ definido como um parâmetro de sintonia.

Escrevendo a solução como em (3-133), adotada-se a solução

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2) + \beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (3-172)$$

Substituindo (3-171) e (3-172) em (3-170) e separando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-173)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = & -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^3 + \frac{1}{2} F e^{\omega_0 T_0 i} e^{\sigma T_1 i} + \\ & \frac{1}{2} F e^{-\omega_0 T_0 i} e^{-\sigma T_1 i} \end{aligned} \quad (3-174)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3-175)$$

A solução da eq. (3-173) é,

$$x_0 = A(T_1, T_2) e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2) e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-176)$$

Procedendo da mesma forma que no problema de vibração livre, da retirada dos termos que irão produzir termos seculares nas soluções x_i , determinam-se as derivadas de A em relação as escalas T_i . Tem-se assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} &= \frac{3}{2\omega_0} i A^2 B - \frac{iF}{4\omega_0} e^{\sigma T_1 i} \\ \frac{\partial A}{\partial T_2} &= \left(\frac{3F}{8\omega_0^3} i AB + \frac{F\sigma}{8\omega_0^2} i \right) e^{\sigma T_1 i} - \frac{3F}{16\omega_0^3} i A^2 e^{-\sigma T_1 i} - \frac{15}{16\omega_0^3} i A^3 B^2 \end{aligned} \quad (3-177)$$

As derivadas dos respectivos complexos conjugados são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T_1} &= \frac{iF}{4\omega_0} e^{-\sigma T_1 i} - \frac{3}{2\omega_0} i AB^2 \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} &= - \left(\frac{3F}{8\omega_0^3} i AB + \frac{F\sigma}{8\omega_0^2} i \right) e^{-\sigma T_1 i} + \frac{3F}{16\omega_0^3} i B^2 e^{\sigma T_1 i} + \frac{15}{16\omega_0^3} i A^2 B^3 \end{aligned}$$

As parcelas permanentes das soluções de cada equação diferencial são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{B^3}{8\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 T_0} \\ x_2 &= \frac{21AB^4}{64\omega_0^4} e^{-3\omega_0 T_0} + \frac{21A^4B}{64\omega_0^4} e^{3\omega_0 T_0} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} e^{\sigma T_1 - 3\omega_0 T_0} + \\ & \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} e^{-\sigma T_1 + 3\omega_0 T_0} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} e^{\sigma T_1 + 3\omega_0 T_0} + \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} e^{-\sigma T_1 - 3\omega_0 T_0} + \\ & \frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5\omega_0 T_0} + \frac{B^5}{64\omega_0^4} e^{-5\omega_0 T_0} - \left(\frac{9iB^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9}{256\omega_0^4} B^2 F - \right. \\ & \left. \frac{9iA^2F}{256\omega_0^4} \right) \cos(\sigma T_2 - 3\omega_0 T_0) + \left(\frac{9A^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} - \frac{9iA^2F}{256\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{9iB^2F}{256\omega_0^4} \right) \cos(\sigma T_2 + 3\omega_0 T_0) \end{aligned}$$

A equação de reconstituição é:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \beta \frac{\partial A}{\partial T_1} + \beta^2 \frac{\partial A}{\partial T_2} \quad (3-178)$$

As derivadas de A em relação a T_i são dadas pelas eqs. (3-177). A seguir, assume-se que

$$A = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \quad (3-179)$$

$$B = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \quad (3-180)$$

Considerando as eqs. (3-180) e substituindo as derivadas (3-177) em (3-178), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{a} + \frac{1}{2}ia\dot{\phi} &= \frac{1}{4\omega_0}\beta F \sin(-\phi + \sigma T_1) - \frac{1}{8\omega_0^2}\beta^2 F \sigma \sin(-\phi + \sigma T_1) - \\ &\frac{9}{64\omega_0^3}\beta^2 a^2 F \sin(-\phi + \sigma T_1) - \frac{1}{4\omega_0}i\beta F \cos(-\phi + \sigma T_1) + \\ &\frac{3}{16\omega_0}i\beta a^3 + \frac{1}{8\omega_0^2}i\beta^2 F \sigma \cos(-\phi + \sigma T_1) + \\ &\frac{3}{64\omega_0^3}i\beta^2 a^2 F \cos(-\phi + \sigma T_1) - \frac{15}{512\omega_0^3}i\beta^2 a^5 \end{aligned} \quad (3-181)$$

onde o ponto indica derivada em relação ao tempo.

Separando as partes real e imaginária de (3-181), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\left(-\frac{F\sigma}{4\omega_0^2} - \frac{9a^2F}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 + \frac{\beta F}{2\omega_0} \right) \sin(-\phi + \sigma T_1) \\ \dot{\phi} &= \left(\left(\frac{F\sigma}{4a\omega_0^2} + \frac{3aF}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 - \frac{F\beta}{2a\omega_0} \right) \cos(-\phi + \sigma T_1) - \\ &\frac{15a^4\beta^2}{256\omega_0^3} + \frac{3a^2\beta}{8\omega_0} \end{aligned} \quad (3-182)$$

Segundo Nayfeh(1979)[24], as eqs. (3-182) devem ser transformadas num sistema autônomo, onde a variável T_1 não apareça explicitamente.

Fazendo

$$\gamma = \sigma T_1 - \phi \quad (3-183)$$

tem-se então,

$$\dot{\gamma} = \sigma\beta - \dot{\phi}$$

Dessa forma, o sistema (3-182) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\beta F}{2\omega_0} - \left(\frac{F\sigma}{4\omega_0^2} + \frac{9a^2F}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 \right) \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \left(\frac{F\beta}{2a\omega_0} - \left(\frac{F\sigma}{4a\omega_0^2} + \frac{3aF}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 \right) \cos \gamma + \end{aligned}$$

$$\frac{15a^4\beta^2}{256\omega_0^3} - \frac{3a^2\beta}{8\omega_0} + \sigma\beta \quad (3-184)$$

Os pontos de equilíbrio no sistema (3-184) podem ser encontrados fazendo-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (3-185)$$

Segundo Nayfeh(1979)[24], nos pontos de equilíbrio a amplitude a e o ângulo de fase γ não variam com o tempo, e a resposta do sistema é um movimento permanente. Retirando $\sin \gamma$ e $\cos \gamma$ das eqs. (3-184), tem-se

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= 0 \\ \cos \gamma &= \frac{a(15a^4\beta - 96a^2\omega_0^2 + 256\sigma\omega_0^3)}{8F(8\beta\sigma\omega_0 + 3a^2\beta - 16\omega_0^2)} \end{aligned} \quad (3-186)$$

e escrevendo

$$(\sin \gamma)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1 \quad (3-187)$$

tem-se que, como $\sin \gamma = 0$,

$$\cos \gamma = 1 \quad (3-188)$$

ou seja,

$$\frac{a(15a^4\beta - 96a^2\omega_0^2 + 256\sigma\omega_0^3)}{8F(8\beta\sigma\omega_0 + 3a^2\beta - 16\omega_0^2)} = 1 \quad (3-189)$$

Através das considerações (3-180) e (3-185), as soluções x_i podem ser reescritas na forma

$$x_0 = a \cos(\sigma\beta t - \gamma + \omega_0 t) \quad (3-190)$$

$$x_1 = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\sigma\beta t - 3\gamma + 3\omega_0 t) \quad (3-191)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \sin(2\sigma\beta t - 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) - \sin(-2\sigma\beta t + 2\gamma + \\ &\sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} + \frac{9a^2F}{512\omega_0^4} \{ \cos(3\sigma\beta t - 2\gamma + 3\omega_0 t) + \cos(-3\sigma\beta t + \\ &2\gamma + 3\omega_0 t) \} + \frac{a^5}{1024\omega_0^4} \cos(5\sigma\beta t - 5\gamma + 5\omega_0 t) - \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \\ &\sin(2\sigma\beta t - 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) - \sin(-2\sigma\beta t + 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} - \\ &\frac{21a^5}{1024\omega_0^4} \cos(3\sigma\beta t - 3\gamma + 3\omega_0 t) - \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \cos(-2\sigma\beta t + 2\gamma - \\ &\sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) + \cos(2\sigma\beta t - 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} + \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \\ &\cos(-2\sigma\beta t + 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) + \cos(2\sigma\beta t - 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} \end{aligned} \quad (3-192)$$

O valor de a é retirado numericamente da eq. (3-189). Uma vez determinado a , obtém-se γ da eq. (3-184). O valor máximo do deslocamento x e de seu período é dado pela análise da resposta no tempo. A resposta no tempo é obtida inserindo as eqs. (3-190), (3-191) e (3-192) em (3-172).

A eq. (3-171) exhibe a relação entre a frequência da excitação Ω e a frequência da natural da estrutura ω_0 . Se, ao invés de (3-171), utiliza-se a relação

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta\sigma \quad (3-193)$$

as respostas x_i terão Ω no denominador, ao invés de ω_0 , como nas soluções (3-190) à (3-192). Além disso, as respostas são bem mais simples e não há necessidade da transformação de coordenadas (3-183) para tornar o sistema homogêneo. Ambas as soluções apresentam o mesmo resultado quando $\Omega = \omega_0$.

Utilizando (3-193) ao invés de (3-171), o problema é escrito da seguinte forma,

$$\ddot{x}(t) + (\Omega^2 - \beta\sigma)x(t) + \beta x(t)^3 = \frac{1}{2}\beta F e^{\Omega T_0 i} + \frac{1}{2}\beta F e^{-\Omega T_0 i} \quad (3-194)$$

e chega-se às seguintes expressões.

$$x_0 = a \cos(\phi + \Omega t)$$

$$x_1 = \frac{a^3}{32\Omega^2} \cos(3\phi + 3\Omega t)$$

$$x_2 = \frac{a^5}{1024\Omega^4} \cos(5\phi + 5\Omega t) + \left(-\frac{21a^5}{1024\Omega^4} + \frac{a^3\sigma}{32\Omega^4} \right) \cos(3\phi + 3\Omega t) + \frac{9a^2 F}{256\Omega^4} \cos(2\phi + 3\Omega t)$$

A figura 3.3 apresenta a curva de ressonância a partir da relação (3-171), que será doravante chamada de versão 1 do MMS, e a partir da relação (3-193), versão 2. Foram consideradas aproximações em (3-172) com potências 1 e 2 do parâmetro não-linear. Pode-se ver que a relação (3-193) apresenta melhores resultados que (3-171), principalmente quando se aumenta a ordem da solução, uma vez que a aproximação de segunda ordem da versão 1 passa a divergir a partir de $\Omega > 1,5$. Já as aproximações da versão 2 exibem grandes deslocamentos para pequenos valores de Ω , isto ocorre porque potências de Ω estão presentes nos denominadores da solução aproximada. A aproximação de segunda ordem da versão 2 apresenta ainda um ramo de soluções bem diferentes dos dados pela integração numérica.

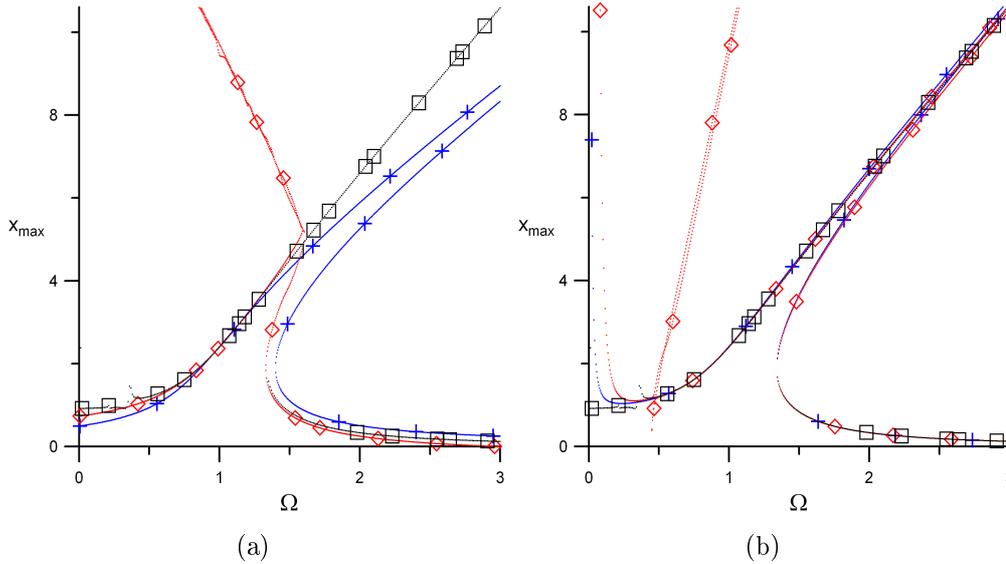


Figura 3.3: \square , RK; $+$, aproximação com 2 termos; \diamond , aproximação com três termos. (a) versão 1 do método; (b) versão 2.

3.3.2

Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários à solução do problema de vibração forçada não amortecida.

O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, executa os seguintes passos na sua resolução:

1. A solução aproximada, função de múltiplas escalas de tempo, é inserida na equação $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i(T_i, \dots, T_n) \end{array} \right.$ diferencial.
2. Os termos que multiplicam β são agrupados de acordo com a potência de β . Dessa forma, constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas. $\left\{ \begin{array}{l} \beta^0 \Rightarrow eq_0 \\ \beta^i \Rightarrow eq_i \end{array} \right.$
3. Assume-se que a solução da primeira equação possui amplitudes variáveis no tempo. As soluções conhecidas são inseridas na próxima equação diferencial a ser resolvida.
4. Antes de encontrar a nova solução, as parcelas que produzem termos seculares ao se resolver a equação diferencial, são retiradas, o que leva à construção de um sistema de duas equações, que permite determinar as derivadas de A e B em relação às escalas T_i . $\left\{ \begin{array}{l} \sin \omega_0 T_0(\dots) = 0 \\ \cos \omega_0 T_0(\dots) = 0 \\ \downarrow \\ \frac{\partial A(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \\ \frac{\partial B(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \end{array} \right.$

5. A equação é resolvida e encontra-se x_i sem termos seculares e a parcela homogênea da solução é desprezada.

6. Repetem-se os passos 3, 4 e 5 até que todas soluções x_n sejam encontradas. Porém, entre os passos 3 e 4, deve-se substituir na equação também as derivadas de A e B em relação às escalas T_i já conhecidas.

7. A e B são escritos na forma polar. Através do método da reconstituição, separando as componentes reais e imaginárias, escreve-se um sistema de duas equações.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \\ \dot{A} = \beta \frac{\partial A}{\partial T_1} + \dots + \beta^n \frac{\partial A}{\partial T_n} \\ \downarrow \\ \dot{a} = f(a(t), \phi(t)) \\ \dot{\phi} = g(a(t), \phi(t)) \end{cases}$$

8. Vibração livre: $a(t)$ e $\phi(t)$ são determinados integrando no tempo cada uma das equações.

Para vibração livre não-amortecida tem-se $\dot{a} = 0$. Uma vez que $a(t)$ e $\phi(t)$ estejam determinados, seus valores são inseridos em $x(t)$.

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 \Rightarrow a(t) = a \\ \dot{\phi} = g(a)t + \phi_0 \end{cases}$$

Vibração forçada: $a(t)$ e $\phi(t)$ são determinados procurando soluções estacionárias. Então a e ϕ são inseridos em $x(t)$.

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 = f(a, \phi) \Rightarrow \sin \phi = f(a) \\ \dot{\phi} = 0 = g(a, \phi) \Rightarrow \cos \phi = g(a) \\ (\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1 \Rightarrow a \\ a \Rightarrow \phi \end{cases}$$

9. Vibração livre: A amplitude a e o ângulo de fase ϕ_0 de $x(t)$ são determinados aplicando as condições iniciais. Deve-se utilizar Newton-Raphson de forma a encontrar o par de soluções a e ϕ_0 que atendam às condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$.

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta \phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \phi_0} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \phi_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x(0) - x \\ \dot{x}(0) - \dot{x} \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Vibração forçada: Deve-se retirar a amplitude e o período da solução através da análise de $x(t)$, pois a é apenas a amplitude do primeiro harmônico.

10. Vibração livre: Deve-se retirar a amplitude e o período da solução através da análise de $x(t)$, pois a é apenas a amplitude do primeiro harmônico.

3.3.3

Vibração Forçada Amortecida

Toma-se como exemplo um dos problemas tratados por Sanchez (1996)[29]. O oscilador analisado por Sanchez é

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon(2\mu\dot{x} - \alpha x^3 + Fx \cos \Omega t) \quad (3-195)$$

Utilizando a seguinte relação entre as frequências,

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon\sigma \quad (3-196)$$

o problema é aqui escrito na forma exponencial para análise

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -\epsilon(2\mu\dot{x} - \alpha x^3 + \frac{1}{2}Fxe^{\Omega T_0} + \frac{1}{2}Fxe^{-\Omega T_0}) \quad (3-197)$$

A solução aproximada adotada é,

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2) + \beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (3-198)$$

Substituindo (3-198) em (3-197) e separando os termos de mesma potência em β , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \Omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-199)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \Omega_0^2 x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \alpha x_0^3 + \sigma x_0 - 2\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - \frac{1}{2}x_0 F(e^{\Omega T_0 i} + e^{-\Omega T_0 i}) \quad (3-200)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} + \sigma x_1 - 2\frac{\partial x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_1} - 2\mu\frac{\partial x_1}{\partial T_0} + 3\alpha x_0^2 x_1 - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{1}{2}x_0 F(e^{\Omega T_0 i} + e^{-\Omega T_0 i}) \quad (3-201)$$

A solução da eq. (3-199) é,

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{\Omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2)e^{-\Omega_0 T_0 i} \quad (3-202)$$

Procedendo como anteriormente, retirando os termos que produzem termos seculares nas soluções x_i , determinam-se as derivadas de A e B em relação a T_i ,

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -\frac{3}{2\Omega}i\alpha A^2 B - \frac{1}{2\Omega}i\sigma A - \mu A \quad (3-203)$$

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = -\frac{\Omega^3}{12}iF^2 A - \frac{1}{8\Omega^3}i\sigma^2 A - \frac{15}{16\Omega^3}i\alpha^2 A^3 B^2 - \frac{1}{2\Omega}i\mu^2 A -$$

$$\frac{1}{8\Omega^3}iF^2B - \frac{3}{4\Omega^3}i\sigma\alpha A^2B - \frac{3}{2\Omega^2}\mu\alpha A^2B \quad (3-204)$$

$$\frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{3}{2\Omega}i\alpha AB^2 + \frac{1}{2\Omega}i\sigma B - \mu B \quad (3-205)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T_2} = & \frac{3}{4\Omega^3}i\alpha B^2\sigma A + \frac{15}{16\Omega^3}i\alpha^2 B^3 A^2 + \frac{1}{8\Omega^3}iF^2 A + \frac{1}{12\Omega^3}iF^2 B + \\ & \frac{1}{2\Omega}i\mu^2 B + \frac{1}{8\Omega^3}i\sigma^2 B - \frac{3}{2\Omega^2}\mu\alpha AB^2 \end{aligned} \quad (3-206)$$

As parcelas permanentes das soluções de cada equação diferencial são:

$$\begin{aligned} x_1 = & \left(\frac{1}{6\Omega^2}FB + \frac{1}{6\Omega^2}FA \right) \cos 2\Omega T_0 - \left(\frac{1}{8\Omega^2}\alpha B^3 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^2}\alpha A^3 \right) \cos 3\Omega T_0 + \left(\frac{1}{8\Omega^2}i\alpha B^3 - \frac{1}{8\Omega^2}i\alpha A^3 \right) \sin 3\Omega T_0 + \end{aligned} \quad (3-207)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6\Omega^2}iFA - \frac{1}{6\Omega^2}iFB \right) \sin 2\Omega T_0 - \frac{1}{2\Omega^2}FA - \frac{1}{2\Omega^2}FB \\ x_2 = & \left(\frac{1}{2\Omega^4}F\alpha A^2B + \frac{23}{48\Omega^4}\alpha B^3F + \frac{1}{2\Omega^4}\alpha B^2FA + \frac{23}{48\Omega^4}\alpha A^3F + \right. \\ & \left. \frac{1}{18\Omega^4}\sigma FB + \frac{1}{18\Omega^4}\sigma FA \right) \cos 2\Omega T_0 - \left(\frac{1}{8\Omega^4}\sigma\alpha B^3 + \right. \\ & \left. \frac{3}{16\Omega^3}i\mu\alpha B^3 - \frac{1}{96\Omega^4}F^2B - \frac{1}{96\Omega^4}F^2A + 2\frac{1}{64\Omega^4}AB^4\alpha^2 - \right. \\ & \left. \frac{3}{16\Omega^3}i\alpha A^3\mu + 2\frac{1}{64\Omega^4}A^4B\alpha^2 + \frac{1}{8\Omega^4}\sigma\alpha A^3 \right) \cos 3\Omega T_0 + \\ & \left(\frac{1}{64\Omega^4}B^5\alpha^2 + \frac{1}{64\Omega^4}A^5\alpha^2 \right) \cos 5\Omega T_0 - \left(\frac{3}{80\Omega^4}\alpha B^3F + \right. \\ & \left. \frac{3}{80\Omega^4}\alpha A^3F \right) \cos 4\Omega T_0 - \left(\frac{1}{96\Omega^4}iF^2B + \frac{2}{64\Omega^4}iA^4B\alpha^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^4}i\sigma\alpha B^3 + \frac{1}{8\Omega^4}i\sigma\alpha A^3 + \frac{3}{16\Omega^3}\alpha A^3\mu - \frac{1}{96\Omega^4}iF^2A - \right. \\ & \left. \frac{2}{64\Omega^4}i\alpha^2 B^4A + \frac{3}{16\Omega^3}\mu\alpha B^3 \right) \sin 3\Omega T_0 + \left(-\frac{23}{48\Omega^4}i\alpha B^3F + \right. \\ & \left. \frac{1}{2\Omega^4}iF\alpha A^2B + \frac{23}{48\Omega^4}i\alpha A^3F + \frac{1}{18\Omega^4}i\sigma FA - \frac{1}{18\Omega^4}i\sigma FB - \right. \\ & \left. \frac{1}{2\Omega^4}iF\alpha AB^2 \right) \sin 2\Omega T_0 + \left(\frac{3}{80\Omega^4}i\alpha B^3F - \frac{3}{80\Omega^4}i\alpha A^3F \right) \\ & \sin 4\Omega T_0 + \left(-\frac{1}{64\Omega^4}iB^5\alpha^2 + \frac{1}{64\Omega^4}iA^5\alpha^2 \right) \sin 5\Omega T_0 - \\ & \frac{5}{2\Omega^4}\alpha B^2FA - \frac{1}{2\Omega^4}\sigma FA - \frac{5}{2\Omega^4}F\alpha A^2B - \frac{1}{2\Omega^4}\sigma FB \end{aligned} \quad (3-208)$$

Assumindo que

$$A_0 = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i}$$

$$B_0 = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i}$$

substituindo as eqs. (3-203) à (3-206) na equação de reconstituição e separando as partes reais e imaginárias, chega-se ao seguinte sistema homogêneo:

$$\dot{a}(t) = \left(-\frac{1}{8\Omega^3}a(t)F^2 \sin 2\phi(t) - \frac{3}{8\Omega^2}a(t)^3\mu\alpha \right) \beta^2 - \beta a(t)\mu \quad (3-209)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) = & -\left(\frac{1}{12\Omega^3}F^2 + \frac{1}{8\Omega^3}\sigma^2 + \frac{15}{256\Omega^3}a(t)^4\alpha^2 + \frac{1}{2\Omega}\mu^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^3}F^2 \cos 2\phi(t) + \frac{3}{16\Omega^3}a(t)^2\sigma\alpha \right) \beta^2 - \left(\frac{3}{8\Omega}a(t)^2\alpha + \frac{1}{2\Omega}\sigma \right) \beta \end{aligned} \quad (3-210)$$

que está de acordo com o obtido por Sanchez (1996)[29].

Assim, as soluções são permanentes quando o sistema de eqs. (3-209) e (3-210) for homogêneo. Dessa forma

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi \\ a(t) &= a \end{aligned} \quad (3-211)$$

Das eqs. (3-209) e (3-210) tem-se, respectivamente

$$\sin 2\phi = -\frac{8}{aF^2} \left(\frac{a\mu}{\beta} + \frac{3a^3\mu\alpha}{8\Omega^2} \right) \Omega^3 \quad (3-212)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\phi = & -\frac{8}{F^2} \left(\frac{3a^2\alpha}{8\Omega\beta} + \frac{\sigma}{2\Omega\beta} + \frac{\mu^2}{2\Omega} + \frac{15a^4\alpha^2}{256\Omega^3} + \right. \\ & \left. \frac{\sigma^2}{8\Omega^3} + \frac{3a^2\alpha\sigma}{16\Omega^3} + \frac{F^2}{12\Omega^3} \right) \Omega^3 \end{aligned} \quad (3-213)$$

Substituindo (3-213) em

$$(\sin 2\phi)^2 + (\cos 2\phi)^2 = 1$$

e simplificando, chega-se a

$$\begin{aligned} & \frac{225\alpha^4}{1024F^4}a^8 + \left(\frac{45\Omega^2\alpha^3}{16F^4\beta} + \frac{45\sigma\alpha^3}{32F^4} \right) a^6 + \left\{ \frac{9\Omega^4\alpha^2}{F^4\beta^2} + \frac{51\sigma^2\alpha^2}{16F^4} + \frac{5\alpha^2}{8F^2} + \right. \\ & \left. \left(\frac{51\alpha^2\sigma}{4F^4\beta} + \frac{51\mu^2\alpha^2}{4F^4} \right) \Omega^2 \right\} a^4 + \left(\left(\frac{72\mu^2\alpha}{F^4\beta} + \frac{2\alpha\sigma}{4F^4\beta^2} \right) \Omega^4 + \right. \\ & \left. \left(\frac{4\alpha}{F^2\beta} + \frac{18\alpha\sigma^2}{F^4\beta} + \frac{12\sigma\alpha\mu^2}{F^4} \right) \Omega^2 + \frac{2\sigma\alpha}{F^2} + \frac{3\sigma^3\alpha}{F^4} \right) a^2 + \frac{64\Omega^6\mu^2}{F^4\beta^2} + \\ & \left(\frac{16\mu^4}{F^4} + \frac{32\sigma\mu^2}{F^4\beta} + \frac{16\sigma^2}{F^4\beta^2} \right) \Omega^4 + \left(\frac{8\sigma^2\mu^2}{F^4} + \frac{16\sigma}{3F^2\beta} + \frac{8\sigma^3}{F^4\beta} + \right. \\ & \left. \frac{16\mu^2}{3F^2} \right) \Omega^2 + \frac{\sigma^4}{F^4} + \frac{4}{9} + \frac{4\sigma^2}{3F^2} = 1 \end{aligned} \quad (3-214)$$

Da eq. (3-214), retira-se a . Conhecido o a , ϕ é obtido de (3-213). As soluções x_i são finalmente reescritas em função de a e ϕ ,

$$x_0 = a \cos(\phi + \Omega t) \quad (3-215)$$

$$x_1 = -\frac{\alpha}{32\Omega^2} a^3 \cos(3\phi + 3\Omega t) + \frac{F}{6\Omega^2} a \cos(\phi + 2\Omega t) - \frac{F}{2\Omega^2} a \cos \phi \quad (3-216)$$

$$x_2 = -\left(\frac{\sigma\alpha}{32\Omega^4} a^3 + \frac{21\alpha^2}{1024\Omega^4} a^5\right) \cos(3\phi + 3\Omega t) - \left(\frac{5\alpha F}{8\Omega^4} a^3 + \frac{\sigma F}{2\Omega^4} a\right) \cos \phi + \frac{\alpha^2}{1024\Omega^4} a^5 \cos(5\phi + 5\Omega t) + \left(\frac{\sigma F}{18\Omega^4} a + \frac{\alpha F}{8\Omega^4} a^3\right) \cos(\phi + 2\Omega t) + \frac{F^2}{961\Omega^4} a \cos(\phi + 3\Omega t) - \frac{3\alpha\mu}{641\Omega^3} a^3 \sin 3\phi + 3\Omega t + \frac{23\alpha F}{192\Omega^4} a^3 \cos(3\phi + 2\Omega t) - \frac{3\alpha F}{320\Omega^4} a^3 \cos(3\phi + 4\Omega t) \quad (3-217)$$

3.4

Não-Linearidade Quadrática

Apresenta-se agora um resumo dos métodos apresentados anteriormente para sistemas com não-linearidade quadrática. Neste caso a equação de Duffing assume a forma.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (3-218)$$

3.4.1

Método Lindstedt-Poincaré

Fazendo a transformação de coordenadas $\tau = \omega t$, a eq. (3-218) torna-se,

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (3-219)$$

Seja uma aproximação de terceira ordem para a resposta e sua frequência ω ,

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha x_2(\tau) + \alpha x_3(\tau) \quad (3-220)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \quad (3-221)$$

Substituindo (3-220) e (3-221) na eq. (3-219) e agrupando os termos de mesma potência em α , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= -2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^2 \\
 \omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 &= -2x_0 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \\
 \omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 &= -x_1^2 - 2x_0 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - \\
 &\quad 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2''
 \end{aligned} \tag{3-222}$$

As condições iniciais do problema (3-218) são,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a \\
 \dot{x}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

As soluções de (3-222) atendem às condições iniciais da seguinte forma,

$$\left. \begin{aligned}
 x_0(0) &= a; & x_i(0) &= 0 \\
 x_0'(0) &= 0; & x_i'(0) &= 0
 \end{aligned} \right\} i > 0 \tag{3-223}$$

Resolvendo cada uma das eqs. (3-222), encontra-se

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a \cos \tau \\
 x_1 &= \frac{1}{3\omega_0^2} a^2 \cos \tau + \frac{1}{6\omega_0^2} a^2 \cos 2\tau - \frac{1}{2\omega_0^2} a^2 \\
 e_1 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{1}{9\omega_0^4} a^3 \cos 2\tau + \frac{1}{48\omega_0^4} a^3 \cos 3\tau + \frac{29}{144\omega_0^4} a^3 \cos \tau - \frac{1}{3\omega_0^4} a^3 \\
 e_2 &= -\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 \\
 x_3 &= \frac{119}{432\omega_0^6} a^4 \cos \tau + \frac{1}{48\omega_0^6} a^4 \cos 3\tau - \frac{25}{48\omega_0^6} a^4 + \\
 &\quad \frac{1}{432\omega_0^6} a^4 \cos 4\tau + \frac{2}{9\omega_0^6} a^4 \cos 2\tau \\
 e_3 &= -\frac{5}{18\omega_0^5} a^3
 \end{aligned}$$

e a frequência da resposta, dada pela aproximação (3-221), torna-se

$$\omega = \omega_0 - \frac{5}{12\omega_0^3} \alpha^2 a^2 - \frac{5}{18\omega_0^5} \alpha^3 a^3 \tag{3-224}$$

Vibração forçada

Seja a equação

$$\Omega^2 x''(\tau) + \omega_0^2 x(\tau) + \alpha x(\tau)^2 = F \cos \tau \tag{3-225}$$

Considera-se a seguinte aproximação para a resposta no tempo

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha^2 x_2(\tau) \quad (3-226)$$

e para a frequência ω ,

$$\Omega = \omega_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 \quad (3-227)$$

Inserindo (3-226) e (3-227) em (3-225) e agrupando os termos de mesma potência em α , chega-se ao seguinte sistema:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-228)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = F \cos \tau - x_0^2 - 2\omega_0 e_1 x_0'' \quad (3-229)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -2\omega_0 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' - 2x_0 x_1 - e_1^2 x_0'' \quad (3-230)$$

A solução da equação (3-228) é

$$x_0 = a \cos \tau \quad (3-231)$$

Resolvendo (3-229) e desprezando as constantes de integração, encontra-se

$$x_1 = \frac{1}{6\omega_0^2} a^2 \cos 2\tau - \frac{1}{2\omega_0^2} a^2 \quad (3-232)$$

$$e_1 = -\frac{1}{2a\omega_0} F \quad (3-233)$$

Substituindo (3-231) a (3-233) em (3-230), encontra-se

$$x_2 = \frac{1}{48\omega_0^4} a^3 \cos 3\tau + \frac{2}{9\omega_0^4} F a \cos 2\tau \quad (3-234)$$

$$e_2 = -\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 - \frac{1}{8a^2\omega_0^3} F^2 \quad (3-235)$$

Da eq. (3-227), tem-se para a relação frequência-amplitude

$$\Omega = \omega_0 - \frac{F}{2a\omega_0} \alpha + \left(-\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 - \frac{1}{8\omega_0^3 a^2} F^2 \right) \alpha^2 \quad (3-236)$$

sendo a solução no tempo

$$x = -\frac{1}{2\omega_0^2} \alpha a^2 + a \cos \Omega t + \left(\frac{1}{6\omega_0^2} \alpha a^2 + \frac{2}{9\omega_0^4} \alpha^2 F a \right) \cos 2\Omega t + \frac{1}{48\omega_0^4} \alpha^2 a^3 \cos 3\Omega t \quad (3-237)$$

A figura 3.4 compara a solução obtida com integração numérica e diferentes aproximações do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$. Na solução obtida através da integração numérica utilizou-se um pequeno nível de amortecimento, de

forma que os valores das amplitudes praticamente não foram alteradas. Na faixa inicial de Ω , as amplitudes obtidas com a integração numérica são bem maiores que as obtidas pelas aproximações.

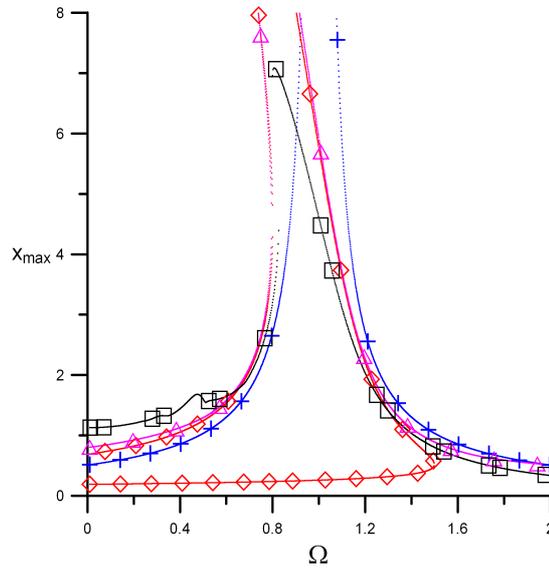


Figura 3.4: Curva de ressonância do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$. \square , RK; $+$, LP com 1 termo; \diamond , dois termos; \triangle , três termos.

3.4.2 Método de Lindstedt-Poincaré Modificado

Utilizando o LP modificado, deseja-se resolver a seguinte equação,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{3-238}$$

Considera-se uma aproximação de terceira ordem para a resposta no tempo,

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \alpha^3 x_3(t) \tag{3-239}$$

Considera-se também que a relação entre as frequências da resposta e a frequência natural seja,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \tag{3-240}$$

de onde se escreve,

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \alpha e_1 - \alpha^2 e_2 - \alpha^3 e_3 \tag{3-241}$$

Substituindo (3-239) e (3-241) em (3-238) e agrupando os termos de mesma potência em α , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\
 \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= e_1 x_0 - x_0^2 \\
 \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -2x_0 x_1 + e_1 x_1 + e_2 x_0 \\
 \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 &= -2x_0 x_2 - x_1^2 + e_1 x_2 + e_2 x_1 + e_3 x_0
 \end{aligned}
 \tag{3-242}$$

As condições iniciais do problema (3-238) são,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a \\
 \dot{x}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

As soluções de (3-242) atendem às condições iniciais ao se impor que,

$$\left. \begin{aligned}
 x_0(0) &= a; & x_i(0) &= 0 \\
 \dot{x}_0(0) &= 0; & \dot{x}_i(0) &= 0
 \end{aligned} \right\} i > 0
 \tag{3-243}$$

Resolvendo cada uma das eqs. (3-242), encontram-se

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a \cos \omega t \\
 x_1 &= \frac{1}{3\omega^2} a^2 \cos \omega t + \frac{1}{6\omega^2} a^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{2\omega^2} a^2 \\
 e_1 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{1}{9\omega^4} a^3 \cos 2\omega t + \frac{1}{48\omega^4} a^3 \cos 3\omega t + \frac{29}{144\omega^4} a^3 \cos \omega t - \frac{1}{3\omega^4} a^3 \\
 e_2 &= -\frac{5}{6\omega^2} a^2 \\
 x_3 &= -\frac{1}{432\omega^6} a^4 \cos \omega t + \frac{1}{12\omega^6} a^4 \cos 2\omega t + \frac{1}{48\omega^6} a^4 \cos 3\omega t + \\
 &\quad \frac{1}{432\omega^6} a^4 \cos 4\omega t - \frac{5}{48\omega^6} a^4 \\
 e_3 &= -\frac{5}{9\omega^4} a^3
 \end{aligned}$$

e a frequência da resposta, eq. (3-240), torna-se

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{5}{6\omega^2} \alpha^2 a^2 - \frac{5}{9\omega^4} \alpha^3 a^3
 \tag{3-244}$$

A figura 3.5 exhibe alguns resultados obtidos com o método para $\omega_0 = \alpha = 1$.

Vibração forçada

Agora o LP modificado é utilizado para resolver o problema de vibração forçada com não-linearidade quadrática,

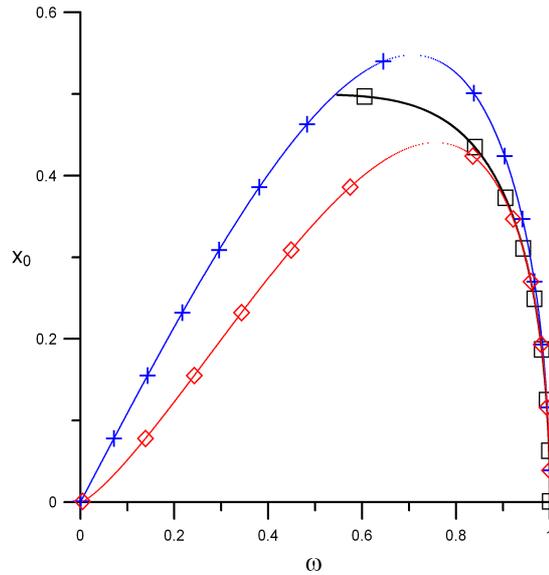


Figura 3.5: Deslocamento inicial vs frequência da resposta. □, RK; +, LP Modificado com dois termos; ◇, três termos.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = F \cos \Omega t \quad (3-245)$$

Considerando uma aproximação de segunda ordem para a resposta no tempo e para a frequência,

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t) \quad (3-246)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 \quad (3-247)$$

e isolando ω_0^2 em (3-247), tem-se

$$\omega_0^2 = \Omega^2 - \alpha e_1 - \alpha^2 e_2 \quad (3-248)$$

Substituindo (3-246) e (3-248) em (3-245) e agrupando os termos de mesma potência em α , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 = 0 \quad (3-249)$$

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = e_1 x_0 F \cos \Omega t - x_0^2 \quad (3-250)$$

$$\ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 = -2x_0 x_1 + e_1 x_1 + e_2 x_0 \quad (3-251)$$

A solução da eq. (3-249) é

$$x_0 = a \cos \Omega t$$

e as soluções das eqs. (3-250) e (3-251), desprezando a parte homogênea de cada solução, são:

$$x_1 = \frac{a^2}{6\Omega^2} \cos 2\Omega t - \frac{a^2}{2\Omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{-F}{a} \\
 x_2 &= \frac{1}{18\Omega^4} Fa \cos 2\Omega t + \frac{1}{48\Omega^4} a^3 \cos 3\Omega t + \frac{Fa}{2\Omega^4} \\
 e_2 &= -\frac{5a^2}{6\Omega^2}
 \end{aligned}$$

A frequência da resposta é dada pela aproximação (3-247):

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{F}{a}\alpha - \frac{5}{6\Omega^2}a^2\alpha^2 \tag{3-252}$$

e a solução no tempo é dada por

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos \Omega t + \left(\frac{a^2}{6\Omega^2} \cos 2\Omega t - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right) \alpha + \\
 &\left(\frac{Fa}{18\Omega^4} \cos 2\Omega t + \frac{a^3}{48\Omega^4} \cos 3\Omega t + \frac{Fa}{2\Omega^4} \right) \alpha^2
 \end{aligned} \tag{3-253}$$

A figura 3.6 compara algumas soluções aproximadas com a solução numérica com um pequeno amortecimento. Os resultados obtidos são piores que os obtidos com o LP na forma tradicional.

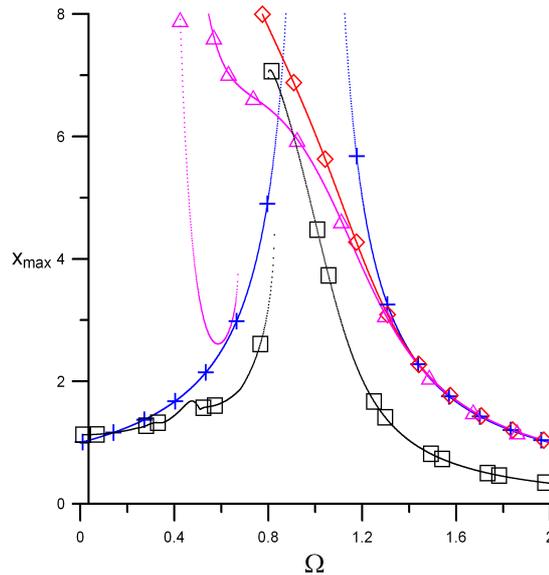


Figura 3.6: LP modificado vs solução numérica do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$. \square , RK; $+$, 1 termo; \diamond , dois termos; \triangle , três termos.

3.4.3 Método das Múltiplas escalas

Seja a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{3-254}$$

Novamente adota-se uma aproximação para x que contém termos até a potência três

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha x_1(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha^2 x_2(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha^3 x_3(T_0, T_1, T_2, T_3) \quad (3-255)$$

A seguir, substituindo (3-255) em (3-254), obtêm-se as derivadas parciais

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=0}^3 \alpha^i \frac{\partial x_j(T_0, T_1, T_2, T_3)}{\partial T_i} \quad (3-256)$$

Agrupando os termos de mesma potência em α , chega-se ao seguinte sistema:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-257)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^2 \quad (3-258)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2x_0 x_1 \quad (3-259)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_3 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_3} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2x_0 x_2 - \quad (3-260)$$

$$x_1^2 - 2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_2}$$

A solução da equação (3-257) é escrita como

$$x_0 = A_0(T_1, T_2, T_3)e^{\omega_0 T_0 i} + B_0(T_1, T_2, T_3)e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-261)$$

onde o termo que contém B é o complexo conjugado de A . Resolvendo as equações e eliminando os termos seculares, encontram-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial T_1} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial T_2} &= -\frac{5}{3\omega_0^3} i A^2 B \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} &= \frac{5}{3\omega_0^3} i A B^2 \\ \frac{\partial A}{\partial T_3} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial T_3} &= 0 \end{aligned}$$

Escrevendo a equação de reconstituição,

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3}iA^2B \quad (3-262)$$

assumindo que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B &= \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \end{aligned} \quad (3-263)$$

e substituindo (3-263) em (3-262) e separando as partes reais e imaginárias, encontra-se

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ \phi(t) &= -\frac{5}{12\omega_0^3}\alpha^2a^2t + \phi_0 \end{aligned}$$

Assim, as soluções podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6\omega_0^2}a^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{2\omega_0^2}a^2 \\ x_2 &= \frac{1}{48\omega_0^4}a^3 \cos 3\omega t \\ x_3 &= \frac{59}{432}\frac{1}{\omega_0^6}a^4 \cos 2\omega t + \frac{1}{432\omega_0^6}a^4 \cos 4\omega t - \frac{19}{72\omega_0^6}a^4 \end{aligned}$$

sendo que

$$\omega = -\frac{5}{12\omega_0^3}\alpha^2A^2 + \omega_0 \quad (3-264)$$

A solução para o deslocamento é então dada pela aproximação

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 \quad (3-265)$$

Inserindo as respostas x_i na solução (3-265), determinam-se a e ϕ_0 de acordo com as condições iniciais.

A figura 3.7 exhibe as soluções obtidas com o MMS e com a integração numérica.

Os resultados mostram que problemas com não-linearidade quadrática apresentam maiores problemas de convergência, exigindo um maior número de termos nas expansões para a frequência que no caso de não-linearidade cúbica.

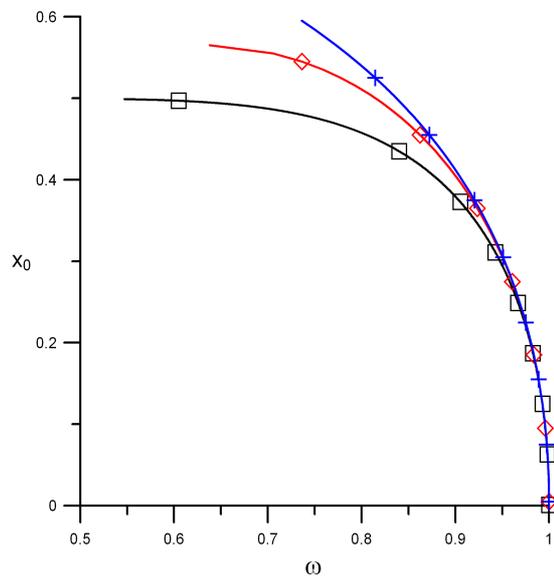


Figura 3.7: Deslocamento inicial vs frequência: \square , RK; +, MMS com 2 termos; \diamond , três termos.