

Com a finalidade de ilustrar a aplicabilidade dos métodos estudados neste trabalho à análise de elementos estruturais esbeltos onde a não-linearidade geométrica é predominante, apresenta-se a seguir a teoria de vigas esbeltas e o desenvolvimento de modelos não-lineares simplificados com um grau de liberdade para a análise da relação frequência-amplitude e da ressonância. Cabe ressaltar que o desenvolvimento de modelos consistentes com um pequeno número de graus de liberdade para a análise dinâmica não-linear de sistemas contínuos tem sido um tópico de grande interesse nos últimos anos.

Uma forma muito utilizada de se obter a equação de movimento de um sistema é através da aplicação do princípio de Hamilton. O princípio de Hamilton afirma que o caminho descrito pelo corpo entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , que satisfaz a lei de Newton, irá extremizar o seguinte funcional (Dym e Shames (1973)[67]),

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\bar{T} - \Pi) dt \quad (2-1)$$

onde  $\bar{T}$  é a energia cinética e  $\Pi$  é a energia potencial total.

Do cálculo variacional, sabe-se que a condição necessária de extremo de um funcional é que a primeira variação seja nula. Assim, para que uma solução extremize o funcional (2-1), é necessário que

$$\delta^1 I = 0 \quad (2-2)$$

## 2.1

### Relação deformação-deslocamentos

Considere inicialmente uma barra esbelta indeformada de eixo reto e material elástico e linear e seja um elemento infinitesimal  $\overline{AB}$  de comprimento  $dx$ , conforme figura 2.1. O segmento  $\overline{AB}$ , após sofrer deslocamentos e deformações passa a ser  $\overline{A'B'}$ , com comprimento  $ds$ . A deformação do elemento  $\overline{AB}$  é dada

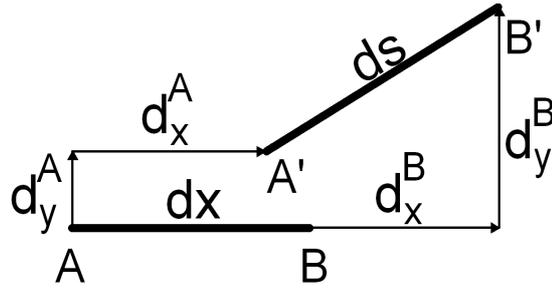


Figura 2.1: Deformação de um segmento infinitesimal

por,

$$\epsilon = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{ds - dx}{dx} \quad (2-3)$$

As componentes em  $x$  e  $y$  do segmento deformado são:

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}_x &= \overline{AB}_x + d_x^B - d_x^A \\ \overline{A'B'}_y &= \overline{AB}_y + d_y^B - d_y^A \end{aligned} \quad (2-4)$$

sendo  $d_i^j$ , o deslocamento segundo a direção  $i$  do ponto  $j$ .

Escrevendo os deslocamentos em  $B$  como aproximações em série de Taylor em torno do ponto  $A$ , tem-se

$$\begin{aligned} d_x^B &= d_x^A + \frac{\partial d_x}{\partial x} \overline{AB}_x \\ d_y^B &= d_y^A + \frac{\partial d_y}{\partial x} \overline{AB}_x \end{aligned} \quad (2-5)$$

e substituindo (2-5) em (2-4) e lembrando que  $\overline{AB} = dx$ , tem-se

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}_x &= \left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right) dx \\ \overline{A'B'}_y &= \frac{\partial d_y}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2-6)$$

Assim, o comprimento do elemento após a deformação é,

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial d_y}{\partial x}^2} dx \quad (2-7)$$

Substituindo (2-7) em (2-3), tem-se para a deformação,

$$\epsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial d_y}{\partial x}^2} - 1 \quad (2-8)$$

Expandindo (2-8) em série de Taylor, obtém-se a seguinte aproximação

para as deformações,

$$\epsilon = \frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_x^2}{\partial x} + \frac{\partial d_y^2}{\partial x} \right) \quad (2-9)$$

## 2.2

### Viga contínua - solução linear

Considerando pequenos deslocamentos, a deformação (2-9) pode ser considerada como sendo linear, isto é

$$\epsilon = \frac{\partial d_x}{\partial x} \quad (2-10)$$

O campo de deslocamentos no plano de um viga quando se considera que as seções permanecem planas e perpendiculares à linha neutra, é dado por

$$\begin{aligned} d_x &= u(x) + y \sin \theta(x) \\ d_y &= w(x) + y \cos \theta(x) \end{aligned} \quad (2-11)$$

sendo  $w$  o deslocamento na direção transversal ao eixo da viga e  $u$  o deslocamento na direção longitudinal (figura 2.2).

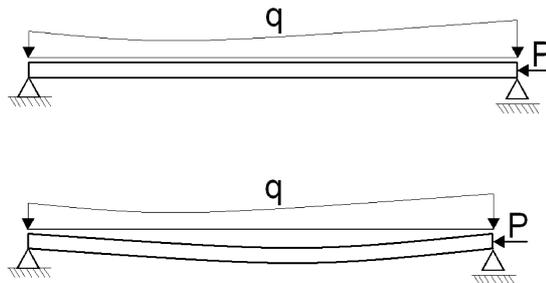


Figura 2.2: Viga plana sujeita a um carregamento transversal  $q(x)$  e axial  $P$

Substituindo (2-11) em (2-10), obtém-se

$$\epsilon = u' + y\theta' \cos \theta \quad (2-12)$$

onde  $()'$  representa a derivada em relação a  $x$ .

Chamando a deformação da linha neutra de  $\epsilon_0$ , tem-se para  $y = 0$  em (2-12)

$$\epsilon_0 = u' \quad (2-13)$$

Substituindo  $u'$  por  $\epsilon_0$  em (2-12), tem-se

$$\epsilon = \epsilon_0 + y\theta' \cos \theta \quad (2-14)$$

Considerando que a linha neutra é inextensível, o elemento infinitesimal sobre a linha neutra sofre apenas uma rotação de corpo rígido. Conseqüentemente, se pode escrever que

$$\sin \theta = -w'$$

Assim, derivando  $\sin \theta$  em relação a  $x$ , obtém-se

$$\theta' = -\frac{w''}{\cos \theta} \quad (2-15)$$

e substituindo (2-15) em (2-14) encontra-se a seguinte expressão para a deformação

$$\epsilon = \epsilon_0 - yw'' \quad (2-16)$$

Considerando que a linha neutra da viga é inextensível, hipótese usualmente empregada na análise de vigas esbeltas ([67]), tem-se que  $\epsilon_0 = 0$  e, assim, a energia interna de deformação de um elemento infinitesimal

$$dU = \frac{1}{2}E\epsilon^2 \quad (2-17)$$

torna-se

$$dU = \frac{1}{2}Ey^2w''^2$$

Integrando  $dU$  ao longo do volume, obtém-se a energia interna de deformação da viga,

$$U = \frac{1}{2}EI \int_0^l w''^2 dx$$

A energia potencial total,  $\Pi$ , da viga é dada pela soma da energia interna de deformação,  $U$ , mais o potencial das cargas externas. Considerando-se que as cargas externas atuando sobre a viga são uma carga distribuída  $q(x)$  e uma carga pontual aplicada na extremidade,  $P$ , conforme mostra a figura 2.2. O potencial destas cargas é dado por

$$V = - \int_0^l q(x)w dx - P\Delta \quad (2-18)$$

onde  $\Delta$  é o deslocamento do apoio que é dado pela integral ao longo do comprimento do deslocamento na direção  $x$ , ou seja,

$$\Delta = \int_0^l (1 - \cos \theta) dx = \int_0^l (1 - \sqrt{1 - w'^2}) dx \approx \int_0^l \frac{1}{2} w'^2 dx \quad (2-19)$$

Assim tem-se para a energia potencial total da viga,

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EI w''^2 - q(x)w - \frac{1}{2} P w'^2 dx \quad (2-20)$$

Considerando apenas os deslocamentos transversais, tem-se para a energia cinética,

$$\bar{T} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dx \quad (2-21)$$

Substituindo (2-21) e (2-20) em (2-1), tem-se o funcional a ser extremizado,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dx - \int_0^l \frac{1}{2} EI w''^2 - q(x)w - \frac{1}{2} P w'^2 dx \right\} dt \quad (2-22)$$

Aplicando o cálculo variacional para extremizar o funcional (2-22), tem-se

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 - \frac{1}{2} EI w''^2 + q(x)w + \frac{1}{2} P w'^2 \\ \delta^1 I &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' + \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \right\} dx dt \\ &= \int_0^l \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) \delta w \right\} dt dx + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial F}{\partial w} \delta w \right\} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' \Big|_0^l - \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) \delta w \right\} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \Big|_0^l - \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \delta w' \right\} dx dt \end{aligned}$$

Considerando que  $\delta w = 0$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta^1 I &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right) \delta w dx dt + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' \Big|_0^l dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \Big|_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \delta w' \Big|_0^l dt \end{aligned}$$

Assim, a função que extremiza o funcional (2-22) deve atender à seguinte equação de movimento

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0 \quad (2-23)$$

ou seja,

$$\rho A \ddot{w} + Pw'' + EIw'''' = q \quad (2-24)$$

Considerando  $q = 0$ , a solução de (2-24) pode ser obtida utilizando separação de variáveis. Escrevendo

$$w(x, t) = f(t)g(x)$$

e substituindo em (2-24) e separando as funções de  $x$  e  $t$  e igualando-as a uma constante, tem-se duas novas equações,

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0 \quad (2-25)$$

$$-Pg'' - EIg'''' + \rho A \omega_0^2 g = 0 \quad (2-26)$$

A solução não-trivial da eq. (2-26) é,

$$g = c_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI}(p+\lambda)}x} + c_2 e^{\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p+\lambda)}x} + c_3 e^{-\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p-\lambda)}x} + c_4 e^{\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p-\lambda)}x}$$

$$\lambda = \sqrt{p^2 + 4EI\omega_0^2 \rho A}$$

A partir das condições de contorno nas duas extremidades da viga, obtêm-se os modos de vibração e as frequências naturais. Os modos de vibração formam uma família de funções ortogonais no intervalo  $[0, l]$ .

A solução da viga para  $q \neq 0$  pode ser escrita como

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\phi_i(x) \quad (2-27)$$

onde  $a_i$  são as amplitudes, também chamadas de coordenadas generalizadas, e  $\phi_i$  são os modos de vibração. Substituindo a solução (2-27) em (2-24) e usando as propriedades de ortogonalidade dos modos, se obtém  $n$  equações diferenciais desacopladas no tempo, que regem as amplitudes  $a_i$ .

A expressão (2-27), considerando um número finito de modos, tem sido largamente empregada, juntamente com os métodos de Ritz ou Galerkin, para se obter soluções aproximadas para o problema não-linear.

## 2.3

**Viga contínua - formulação não-linear**

Considera-se agora a expressão não-linear da deformação dada pela eq. (2-9). Substituindo o campo de deslocamentos (2-11) em (2-9), obtém-se,

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2}(\cos \theta)^2 + \frac{1}{2}(\sin \theta)^2 \right) \theta' y^2 + (u' \cos \theta + \cos \theta - w' \sin \theta) \theta' y + u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 \quad (2-28)$$

Considerando que  $u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 = \epsilon_0$ , tem-se

$$\epsilon = \frac{1}{2} \theta' y^2 + (\cos \theta (1 + u') - w' \sin \theta) \theta' y + \epsilon_0 \quad (2-29)$$

Aplicando uma rotação de corpo rígido a um elemento infinitesimal, tem-se

$$\begin{aligned} -w' &= \sin \theta \\ 1 + u' &= \cos \theta \end{aligned} \quad (2-30)$$

Substituindo (2-30) em (2-29) e considerando  $\epsilon_0 = 0$ , obtém-se

$$\epsilon = \frac{1}{2} \theta' y^2 + \theta' y$$

Desprezando os termos de mais alta ordem em  $y$ , e substituindo  $\theta'$  pelo valor dado em (2-15), obtém-se para a deformação

$$\epsilon = \theta' y = -\frac{w''}{\cos \theta} y = -\frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} y$$

Assim, a energia interna de deformação é dada por

$$dU = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} E y^2 \frac{w''^2}{1 - w'^2}$$

Aproximando o denominador em série de Taylor, tem-se

$$dU = \frac{1}{2} E y^2 w''^2 (1 + w'^2)$$

Integrando  $dU$  ao longo do volume, obtém-se

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l w''^2 (1 + w'^2) dx$$

Considerando mais termos na expansão de  $\Delta$  em série de Taylor, eq. (2-19), tem-se

$$\Delta = \int_0^l \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{8}w'^4 dx \quad (2-31)$$

A energia potencial total da viga é, neste caso, dada por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EIw''^2(1 + w'^2) - 2qw - P \left( w'^2 + \frac{1}{4}w'^4 \right) \right\} dx \quad (2-32)$$

Sendo a energia cinética dada por (2-21), obtém-se o seguinte funcional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho A \dot{w}^2 - EIw''^2(1 + w'^2) + 2qw + P \left( w'^2 + \frac{1}{4}w'^4 \right) \right\} dx dt$$

Aplicando o cálculo variacional, obtém-se a seguinte equação de movimento

$$\rho A \ddot{w} + EI(4w''w'w''' + w'''' + w''''w'^2 + w''^3) + P(w'' + \frac{3}{2}w'^2w'') = q \quad (2-33)$$

O método de Galerkin é então utilizado para discretizar a geometria contínua presente em (2-33).

Utilizando a solução aproximada igual a utilizada na solução linear, eq. (2-27), com apenas um modo, tem-se

$$w(x, t) = a_1(t)\phi_1(x)$$

que, no caso de uma viga simplesmente apoiada, torna-se

$$w(x, t) = a_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (2-34)$$

Considerando a função peso como a derivada de (2-34) em relação à coordenada generalizada  $a_1(t)$ , e aplicando o método de Galerkin, chega-se à seguinte equação diferencial não-linear

$$\ddot{a}_1 + \left( \frac{\pi^4}{ml^3} EI - \frac{\pi^2}{ml} P \right) a_1 + \left( \frac{\pi^6}{2ml^5} EI - \frac{3\pi^4}{8ml^3} P \right) a_1^3 = \frac{4ql}{m\pi} \quad (2-35)$$

onde  $m = \rho Al$ .

A eq. (2-35) é do tipo Duffing. A solução que descreve o comportamento ao longo do tempo da amplitude  $a_1$  da função  $\phi_1$  é obtida através de integração numérica ou a partir dos métodos aproximados que fornecem soluções analíticas. Adicionando mais termos à solução aproximada (2-34), chega-se a um sistema de  $n$  equações não-lineares acopladas.

A eq. (2-35) tem sido largamente empregada para se estudar a relação

frequência-amplitude e o comportamento de vigas sob cargas harmônicas ([68]). Equação semelhante, com termo não-linear cúbico, é obtida para placas e pórticos simétricos ([69]).

Introduzindo os parâmetros

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$x(t) = \frac{\pi}{l} a_1(t)$$

$$\lambda = \frac{P}{P_{cri}}$$

em (2-35), e em seguida aplicando a transformação  $\tau = \omega_0 t$ , onde

$$\omega_0 = \frac{\pi^2 P_{cri}}{ml} (1 - \lambda)$$

obtém-se

$$x_{,\tau\tau} + x + bx^3 = \bar{q}$$

onde o parâmetro não-linear  $b$  é dado por

$$b = \frac{3\lambda - 4}{8(\lambda - 1)} \quad (2-36)$$

e é exibido na figura 2.3, onde se pode ver que  $b < 1$  para valores de carregamento inferiores a 80% da carga crítica.

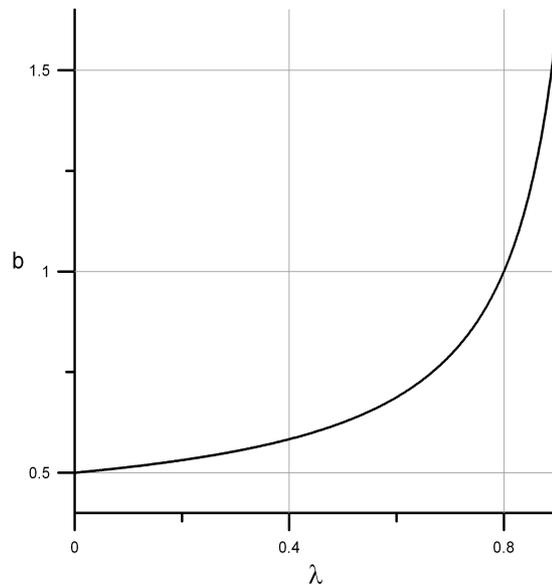


Figura 2.3: Não-linearidade da viga-coluna versus nível de carregamento.

## 2.4

**Viga contínua com imperfeição inicial**

Considerando agora uma viga com imperfeição inicial, o campo de deslocamentos passa a ser dado por,

$$\begin{aligned}d_x &= u_0(x) + u(x) + y \sin(\theta_0(x) + \theta(x)) \\d_y &= w_0(x) + w(x) + y \cos(\theta_0(x) + \theta(x))\end{aligned}\quad (2-37)$$

onde  $u_0(x)$ ,  $w_0(x)$  e  $\theta_0(x)$  descrevem a forma inicial da viga imperfeita.

Substituindo o campo de deslocamentos (2-37) em (2-9), obtém-se,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{y^2}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 + y\{(u'_0\theta' + u'_0\theta'_0 + u'\theta' + u'\theta'_0 + \theta' + \theta'_0) \cos(\theta + \theta_0) - \\&(w'_0 + w')(\theta' + \theta'_0) \sin(\theta + \theta_0)\} + u'_0 + u' + \frac{1}{2}(w'_0 + w')^2 + \\&\frac{1}{2}(u'_0 + u')^2\end{aligned}\quad (2-38)$$

Considerando que a linha neutra não sofre deformação, (2-38) toma a forma

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{y^2}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 + y\{(u'_0\theta' + u'_0\theta'_0 + u'\theta' + u'\theta'_0 + \\&\theta' + \theta'_0) \cos(\theta + \theta_0) - (w'_0 + w')(\theta' + \theta'_0) \sin(\theta + \theta_0)\}\end{aligned}\quad (2-39)$$

A rotação de corpo rígido sofrida por um elemento infinitesimal localizado na linha neutra da viga passa a ser

$$\begin{aligned}-w' - w'_0 &= \sin(\theta + \theta_0) \\1 + u' + u'_0 &= \cos(\theta + \theta_0)\end{aligned}\quad (2-40)$$

Substituindo (2-40) em (2-39), obtém-se

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 y^2 + (\theta' + \theta'_0)y$$

Desprezando os termos de mais alta ordem em  $y$ , e considerando que

$$\theta' + \theta'_0 = -\frac{w''_0 + w''}{\cos(\theta + \theta_0)}$$

obtém-se para a deformação

$$\epsilon = \theta' y = -\frac{w'' + w''_0}{\cos(\theta + \theta_0)} y = -\frac{w'' + w''_0}{\sqrt{1 - (w' + w'_0)^2}} y\quad (2-41)$$

Considerando como referência a posição inicial deformada, deve-se diminuir da deformação (2-41) a imperfeição inicial. Desta forma, tem-se

$$\epsilon = -\frac{w'' + w_0''}{\sqrt{1 - (w' + w_0')^2}}y + \frac{w_0''}{\sqrt{1 - w_0'^2}}y \quad (2-42)$$

Substituindo (2-42) em (2-17), integrando ao longo do volume e aproximando os denominadores por séries de Taylor, se obtém a seguinte expressão para a energia interna de deformação:

$$U = EI \int_0^l \left\{ \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + w_0'' w'' w'^2 + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right\} dx \quad (2-43)$$

Da mesma forma, o deslocamento  $\Delta$ , dado em (2-19), sofre modificações. A variação de  $\Delta$  entre as posições inicial e final é dada por:

$$\Delta = \int_0^l (-\sqrt{1 - (w' + w_0')^2} + \sqrt{1 - w_0'^2}) dx$$

que, aproximado por série de Taylor, torna-se

$$\Delta = \int_0^l (w_0' w' + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{2}w_0'^3 w' + \frac{3}{4}w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2}w_0' w'^3 + \frac{1}{8}w'^4) dx \quad (2-44)$$

Substituindo (2-44) em (2-18) se obtém para a energia potencial total da viga com imperfeição inicial

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^l \left\{ EI \left( \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right) - \right. \\ \left. qw - P \left( w_0' w' + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{2}w_0'^3 w' + \frac{3}{4}w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2}w_0' w'^3 + \frac{1}{8}w'^4 \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (2-45)$$

Com a energia cinética sendo dada por (2-21), obtém-se o seguinte funcional,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 - EI \left( \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right) \right\} dx$$

$$qw + P \left( w_0' w' + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} w_0'^3 w' + \frac{3}{4} w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2} w_0' w'^3 + \frac{1}{8} w'^4 \right) \} dx dt \quad (2-46)$$

Extremizando o funcional (2-46), a seguinte equação diferencial é obtida

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + (w_0'' w' w_0''' - 3w_0''' w_0' w_0'' + 4w_0'' w''' w_0' + w_0'''' w'^2 + w_0'''' w_0'^2 + w''^3 + \\ w'''' + w_0'''' w'^2 + 2w_0''^2 w'' + 3w_0'' w''^2 - \frac{1}{2} w_0'''' w_0'^2 + w_0'''' w_0' w' + \\ 2w_0'''' w_0' w' - w_0''^3 + 3w_0'' w'' w_0' + 4w_0'' w'' w' + 4w_0'' w''' w' + 4w'' w_0' w''' + \\ 4w'' w' w''') EI + P(w_0'' + w'' + \frac{3}{2} w_0'^2 w_0'' + 3w_0' w' w_0'' + \frac{3}{2} w_0'^2 w'' + \\ \frac{3}{2} w_0'' w'^2 + 3w_0' w' w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'') = q \end{aligned} \quad (2-47)$$

Considerando uma pequena imperfeição inicial pela função

$$w_0 = 0,05l \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$

e (2-34) como solução aproximada, e utilizando o método de Galerkin, chega-se à seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \left( \frac{99,813}{ml^4} EI - \frac{10,144}{ml^2} P \right) a_1 + \left( \frac{72,104}{ml^5} EI - \frac{5,479}{ml^3} P \right) a_1^2 + \\ \left( \frac{\pi^6}{2ml^6} EI - \frac{3\pi^4}{8ml^4} P \right) a_1^3 = 0,015 \frac{EI}{ml^3} + \frac{1,273}{m} q + \frac{0,498}{ml} P \end{aligned}$$

que possui não-linearidade cúbica e quadrática. É interessante observar que o coeficiente não-linear cúbico obtido é o mesmo do caso da viga perfeita. Uma equação semelhante, com não-linearidade quadrática e cúbica, é obtida para arcos abatidos ([70],[71]) e cascas ([72]).

## 2.5

### Viga contínua - solução com não-linearidades mais completas

Considerando que o deslocamento  $\Delta$  seja dado de forma exata em vez da aproximação (2-31), tem-se que

$$\Delta = \int_0^l 1 - \sqrt{1 - w'^2} \quad (2-48)$$

Seguindo os mesmos passos da seção 2.3, mas desta vez sem aproximar

o denominador da energia interna de deformação por uma série de Taylor, chega-se ao seguinte funcional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho A \dot{w}^2 - \frac{EI w'^2}{1 - w'^2} + 2qw + P(1 - \sqrt{1 - w'^2}) \right\} dx dt$$

que, ao ser extremizado, leva à seguinte equação de movimento

$$m\ddot{w} + \left( \frac{4w''^3 w'^2}{(1 - w'^2)^3} + \frac{4w'' w' w'''}{(1 - w'^2)^2} + \frac{w''''}{1 - w'^2} + \frac{w''^3}{(1 - w'^2)^2} \right) EI + P \left( \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} + \frac{w'^2 w''}{(1 - w'^2)^{3/2}} \right) = q \quad (2-49)$$

Aplicando o método de Galerkin usando a função aproximada (2-34), e atribuindo, por exemplo,  $l = 20$ , chega-se à seguinte equação diferencial no tempo

$$10m\ddot{a}_1 + \left( \frac{\pi^8}{800} a_1^5 - \pi^6 a_1^3 + 200\pi^4 a_1 \right) \frac{i}{(a_1^2 \pi^2 - 400)^{5/2}} EI + \frac{40P}{\pi a_1} \left( \text{EllipticE} \left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(a_1) a_1 \right\} - \text{EllipticK} \left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(a_1) a_1 \right\} \right) = \frac{40}{\pi} q \quad (2-50)$$

que, devido às não-linearidades não-polinomiais, não pode ser resolvida utilizando os métodos aproximados convencionais. A eq. (2-50) será resolvida no capítulo 7, com os métodos propostos no capítulo 6.