

Eduardo Pasquetti

**Métodos Aproximados de Solução de Sistemas
Dinâmicos Não-Lineares**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro, Abril de 2008



Eduardo Pasquetti

Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Orientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Djenane Cordeiro Pamplona

PUC-Rio

Prof. José Manoel Balthazar

UNESP

Prof. Marcelo Amorim Savi

COPPE-UFRJ

Prof. Raul Rosas e Silva

PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de Abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Eduardo Pasquetti

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Passo Fundo. Obteve o título de Mestre em Estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Eduardo Pasquetti

Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares/ Eduardo Pasquetti; orientador: Paulo Batista Gonçalves. - 2008.
255 f: il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia Civil - Teses. 2. Dinâmica não-linear. 3. Métodos aproximados. 4. Não-linearidades não polinomiais. 5. Métodos de perturbação. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais Luiz e Realda, ao meu irmão Luiz Ricardo e à minha filha
Maria Eduarda.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Paulo Batista Gonçalves, pelo conhecimento transmitido, incentivo, paciência e dedicação ao longo destes sete anos.

À PUC-Rio e aos professores do departamento, por terem me admitido no programa de pós-graduação.

À banca examinadora.

À CNPQ, pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas do Tecgraf: Lula, por sua compreensão e paciência ao longo destes últimos anos. À Antônio Sergio, Anderson e Júlio César, pelas dicas de LaTeX.

Pela amizade e agradável convivência, aos amigos de longa data Müller e Ramires, e aos que que ganhei aqui no Rio, em especial a Walter, Sidiclei, Gilmar, Harry, Del Savio, José Roberto, Diego, Frederico, Magnus e Hilton.

Aos professores Agenor, Ignacio, Zacarias e Moacir que lá no início da graduação me incentivaram para que eu chegasse até aqui.

Aos meus tios Darcia e Gerônimo, Adriana e Alceu, obrigado por tudo.

À minha Natália, obrigado por tudo.

À minha família pelo apoio e incentivo.

Resumo

Pasquetti, Eduardo; Gonçalves, Paulo Batista. **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares** Rio de Janeiro, 2008. 255p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Sistemas dinâmicos não-lineares são comuns em engenharia. Este tipo de problema é resolvido por integração numérica das equações de movimento ou por métodos analíticos aproximados (métodos de perturbação) ou semi-analíticos como o método do Balanço Harmônico. A integração numérica é um processo lento e oneroso em análises paramétricas. Já os outros métodos aproximados são extremamente rápidos, mas são menos precisos e em problemas com certos tipos de não-linearidade, tais como expoentes fracionários, são de difícil, ou impossível, aplicação. Neste trabalho, são apresentados dois métodos alternativos, baseados nas séries de Taylor, para a análise de sistemas não-lineares. No primeiro método, a resposta é escrita em série de Taylor e propriedades de simetria do sistema no espaço de fase são utilizadas para se determinar a relação frequência-amplitude ou pontos fixos da resposta. No segundo método a solução é escrita em série de Fourier e as amplitudes dos harmônicos são determinadas da mesma forma que os coeficientes da série de Taylor. A simetria do sistema agora fica implícita na solução em série de Fourier, e a relação frequência-amplitude ou os pontos fixos da resposta são obtidos utilizando equações suplementares. Através de comparações com outros métodos, mostra-se que os métodos desenvolvidos são de fácil implementação e precisos. Estes possuem as vantagens de serem aplicados a problemas com diversos tipos de não-linearidade e de fornecerem uma resposta em série de Fourier onde as amplitudes são determinadas analiticamente resolvendo-se um sistema de equações algébricas lineares.

Palavras-chave

dinâmica não-linear; métodos aproximados; não-linearidades não polinomiais; métodos de perturbação

Abstract

Pasquetti, Eduardo; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Approximate Solution Methods for Nonlinear Dynamical Systems** Rio de Janeiro, 2008. 255p. PhD. Thesis — Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nonlinear dynamical systems are rather common in engineering. This class of problems is usually solved by numerical integration or through the use of approximate analytical methods (perturbation methods) or semi-analytical methods such as the harmonic balance method. The numerical integration is a slow and cumbersome process in parametric analyses. The other methods are usually extremely fast but they are less precise and their application to problems involving certain types of non-linearity, such as fractional power non-linearities, are difficult or even impossible. In this work two alternative methodologies for the analysis of non-linear dynamical systems, based on Taylor series expansions, are proposed. In the first method, the solution of the initial value problem is obtained by expanding the response in Taylor series and the symmetries of the response in phase space are used to obtain the frequency-amplitude relation or the fixed points of the steady-state response. In the second method the response is written as a Fourier series and the modal amplitudes are obtained using the same methodology used in the previous method for the determination of the coefficients of the Taylor expansion. The symmetries of the response are implicit in the Fourier series, and supplementary equations are proposed for the determination of the frequency-amplitude relation and the fixed points of the response. Comparisons with other existing methods show that the two proposed methods are precise and can be easily applied to the analysis of several dynamical systems. The main advantages of the proposed methods are that they can be applied to several types of non-linearities and that analytic expression for the Fourier coefficients can be obtained by the solution of a system of linear algebraic equations.

Keywords

nonlinear dynamics; approximate methods; non-polynomial nonlinearities; perturbation methods

Sumário

1	Introdução	20
1.1	Conceitos Básicos em Oscilações Não-Lineares	25
1.2	Objetivos	29
1.3	Novos Métodos Propostos	30
1.4	Histórico	31
1.5	Descrição da tese	38
2	Vibração em Sistemas Contínuos	41
2.1	Relação deformação-deslocamentos	41
2.2	Viga contínua - solução linear	43
2.3	Viga contínua - formulação não-linear	47
2.4	Viga contínua com imperfeição inicial	50
2.5	Viga contínua - solução com não-linearidades mais completas . .	52
3	Métodos de Perturbação	54
3.1	Método Lindstedt-Poincaré	55
3.1.1	Vibração Forçada	59
3.1.2	Vibração Forçada Amortecida	62
3.1.3	Programa em Álgebra simbólica	64
3.2	Método Lindstedt-Poincaré Modificado	65
3.2.1	Vibração Forçada	71
3.2.2	Vibração Forçada Amortecida	73
3.3	Método Múltiplas Escalas	76
3.3.1	Vibração Forçada	81
3.3.2	Programa em Álgebra simbólica	86
3.3.3	Vibração Forçada Amortecida	87
3.4	Não-Linearidade Quadrática	91
3.4.1	Método Lindstedt-Poincaré	91
3.4.2	Método de Lindstedt-Poincaré Modificado	94
3.4.3	Método das Múltiplas escalas	97
4	Método do Balanço Harmônico	101
4.1	Newton-Raphson com Comprimento de Arco	102
4.2	Vibração livre	102
4.3	Vibração Forçada	105
4.3.1	Solução de sistemas algébricos não-lineares através do método de perturbação	107
4.4	Vibração Forçada Amortecida	110
4.5	Método de Galerkin-Urabe	111
4.6	Método do balanço harmônico incremental	112
4.7	Não Linearidade Quadrática	114
5	Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos	116
5.1	Multiplicadores de Floquet	117

5.2	Estabilidade de sistemas não-lineares	119
5.2.1	Determinante de Hill	120
6	Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares por Séries	122
6.1	Séries de Potências	122
6.2	Método baseado em séries de Taylor	123
6.2.1	Vibração livre	125
6.2.2	Equação de Duffing	126
6.2.3	Relação entre os métodos de Taylor e LP	134
6.2.4	Soluções em série de Fourier a partir da série de Taylor	141
6.2.5	Aproximações de Padé	146
6.2.6	Vibração Forçada	147
6.2.7	Equação de Duffing	150
6.2.8	Validação da Solução em série	161
6.3	Método de Fourier-Taylor (FT)	162
6.3.1	Resolução de problemas de vibração livre	163
6.3.2	Equação de Duffing	164
6.3.3	Método Fourier-Taylor-Galerkin (FTG)	167
6.3.4	Resolução de problemas de vibração forçada sem amor- tecimento	168
6.3.5	Resolução de problemas de vibração forçada com amor- tecimento	172
7	Não-linearidades não-polinomiais	177
7.1	Sistema dinâmico com não-linearidade fracionária	178
7.1.1	$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$	183
7.2	Pêndulo plano	186
7.3	Pêndulo Elíptico	188
7.4	Viga com não-linearidades não-polinomiais	193
7.5	Arco sujeito a uma carga constante aplicada de forma súbita	194
7.6	Equação de Mathieu não-linear	197
8	Conclusões	201
9	Referências Bibliográficas	204
A	Programa em Maple: Lindsted Poincaré modificado - vibração forçada	212
A.1	Rotinas do método da perturbação	212
A.2	Equação de Duffing	214
A.2.1	Resolve as equações	216
A.2.2	Relação frequência-deslocamento	219
A.2.3	Soluções	219
A.2.4	Curva de ressonância	220
B	Programa em Maple: Método de Taylor - vibração livre	223
B.1	Solução	223
B.2	Relação frequência-amplitude	224
B.3	Exemplo	224

B.3.1	Verificação da solução: integração numérica	225
B.3.2	Transformação da solução em série de Taylor em uma série de Fourier	226
B.4	Transformação da solução em série de Taylor em uma solução de Lindstedt-Poincaré	229
B.4.1	Determinação das constantes	232

C Programa em Maple: Fourier-Taylor - vibração forçada amortecida 234

C.1	Solução	234
C.1.1	Transforma a solução em série de Taylor em uma série de Fourier	235
C.1.2	Exemplo	243
C.2	Exportação de arquivo para programa em C++	246
C.2.1	Escreve o arquivo	247
C.2.2	Arquivo exportado	250

Lista de Figuras

1.1	Relação frequência-deslocamento inicial, eq. (1-1), sendo $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$. \square , $\beta = 0$; $+$, $\beta > 0$; \diamond , $\beta < 0$	26
1.2	Oscilação livre não-amortecida, eq. (1-1), $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$. \square , $x_0 = 1$ e $\beta = 0$; $+$, $x_0 = 1$ e $\beta = 1$; \diamond , $x_0 = 1,5$ e $\beta = 1$	26
1.3	Curvas de ressonância para diferentes valores de não-linearidade do problema (1-1).	27
1.4	Respostas caóticas. Condições iniciais: \square , (1; 0); $+$, (0,99999; 0). (a) Instantes iniciais; (b) Intervalo de tempo mais distante do instante inicial.	28
1.5	$\ddot{x} + x + x^3 = 3 + F_1 \cos t$: (a) Diagrama de Bifurcação; (b) Amplitude máxima.	29
1.6	Diagrama de Bifurcação em 3d.	29
2.1	Deformação de um segmento infinitesimal.	42
2.2	Viga plana sujeita a um carregamento transversal $q(x)$ e axial P	43
2.3	Não-linearidade da viga-coluna versus nível de carregamento.	49
3.1	Relação ω - x_0 . \square , RK; $+$, eq. (3-29); \diamond , eq. (3-30); \triangle , eq. (3-31). (a) Série convergente, $\omega_0 = \beta = 1$; (b) Série não convergente, $\omega_0 = \beta = 0,1$	60
3.2	Relação ω - x_0 . \square , RK; $+$, eq. (3-86); \diamond , eq. (3-87). (a) $\omega_0 = \beta = 1$; (b) $\omega_0 = \beta = 0,1$	70
3.3	\square , RK; $+$, aproximação com 2 termos; \diamond , aproximação com três termos. (a) versão 1 do método; (b) versão 2.	86
3.4	Curva de ressonância do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$. \square , RK; $+$, LP com 1 termo; \diamond , dois termos; \triangle , três termos.	94
3.5	Deslocamento inicial vs frequência da resposta. \square , RK; $+$, LP Modificado com dois termos; \diamond , três termos.	96
3.6	LP modificado vs solução numérica do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$. \square , RK; $+$, 1 termo; \diamond , dois termos; \triangle , três termos.	97
3.7	Deslocamento inicial vs frequência: \square , RK; $+$, MMS com 2 termos; \diamond , três termos.	100
4.1	ω vs deslocamento inicial, diversas soluções aproximadas. (a) Uma amplitude é escolhida para ser função das demais amplitudes, $c_i = f(x_0, c_j)$ para $i \neq j$: \square , $i = 1$; $+$, $i = 2$; \diamond , $i = 3$; \triangle , $i = 4$; \bigcirc , $i = 5$. (b) Uma amplitude é escolhida como parâmetro de controle, $c_i = cte$: \square , $i = 1$; $+$, $i = 2$; \diamond , $i = 3$; \triangle , $i = 4$; \bigcirc , $i = 5$	105
5.1	Espaço de fase	116
5.2	Relação entre um autovalor de Φ e um autovalor de A	118
5.3	Possibilidades de perda de estabilidade de uma solução periódica.	119
6.1	Plano de fase: (a) com dupla simetria; (b) com uma única simetria.	126
6.2	Convergência em τ das aproximações. \square , RK; $+$, Taylor com cinco termos (eq. (6-33)); \diamond , Taylor com seis termos; \bigcirc , Taylor com sete termos.	131
6.3	Curva correspondente a um erro inferior ou igual a 0,01%.	132

6.4	Soluções aproximadas, \square , RK. (a) $+$, Taylor com cinco termos, eq. (6-35); \diamond ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com cinco termos, eq. (6-60); (b) $+$, Taylor com seis termos; \diamond ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com seis termos.	141
6.5	Variação do erro em δ obtidos com a aproximação em série (dezesesseis termos) e com a solução harmônica contruída a partir desta série (quinze harmônicos).	145
6.6	Solução no tempo do problema $x'' + x + 7,5x^3 = 0$ para as condições iniciais (1,0): \square , RK; $+$, Taylor com cinco termos; \diamond , série de Fourier com quatro harmônicos.	145
6.7	Plano de fase de um problema forçado amortecido e com não-linearidade ímpar.	149
6.8	Importância dos termos não-nulos da série de Taylor que representa $\cos \Omega t$, avaliados em diferentes instantes de tempo: (a) \square , instante $t = 0,5T$; \bigcirc , $t = T$; (b) $t = 2T$	162
6.9	Soluções exata e aproximadas com diferentes números de harmônicos: \square , RK; $+$, FT com dois harmônicos; \diamond , FT com três harmônicos; \bigcirc , FT com quatro harmônicos;	166
6.10	Resíduo causado por (6-134) para $\omega_0 = 1,5$, $\beta = 3$ e $x_0 = 2$: \square , ω dado por (6-135); $+$, ω dado por (6-146).	169
6.11	Resíduo da solução (6-152) para o problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos 5t$: \square , x_0 dado por (6-158); $+$, x_0 obtido ao se considerar (6-159); \diamond , x_0 obtido ao se considerar (6-160).	172
6.12	Curvas de ressonância do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$: \square , RK; $+$, HBM com três harmônicos; \diamond , FTG com três harmônicos.	173
6.13	Variação da coordenada do ponto fixo do problema $\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x + 3x^3 = \cos \Omega t$: \square , RK; $+$, HBM com três pares de harmônicos; \diamond , FTG com dois pares de harmônicos.	175
6.14	Problema $\ddot{x} + 0,4\dot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$. \square , RK; $+$, HBM com três pares de harmônicos; \diamond , FT com 10 pares de harmônicos; (a) Curva $x_0 - \Omega$; (b) curva $v_0 - \Omega$	175
7.1	Simetria no campo de deslocamentos. \square , $q = 1$; $+$, $q < 1$; \diamond $q > 1$	179
7.2	Energia potencial. \square , $q = 0$; $+$, $q = 0,5$; \diamond , $q = 1$; \triangle , $q = 10$	179
7.3	Curva frequência-deslocamento inicial. \square , RK; $+$, dois termos, eq. (7-5); \diamond , quatro termos, eq. (7-7): (a) $\ddot{x} + \text{sgn}(x) x ^{4/3} = 0$; (b) $\ddot{x} + \text{sgn}(x) x ^{3/4} = 0$	182
7.4	Influência da não-linearidade para diferentes deslocamentos iniciais: \square , RK e $x_0 = 2$; \diamond , FT com sete harmônicos e $x_0 = 2$; $+$, RK e $x_0 = 0,5$; \triangle , FT com sete harmônicos e $x_0 = 0,5$	184
7.5	Solução no tempo do problema $\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$: \square , RK; $+$, eq. (7-11); \diamond , eq. (7-17); \triangle , eq. (7-18).	186
7.6	Curva frequência-deslocamento inicial do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$: \square , RK; $+$, eq. (7-22); \diamond , eq. (7-21); \triangle , eq. (7-23).	188
7.7	Curva frequência- g/l : \square , RK e $\theta_0 = 85,7^\circ$; $+$, Taylor com 5 termos; \diamond , RK $\theta_0 = 5^\circ$; \triangle , FT com cinco harmônicos.	189

7.8	Respostas no plano de fase do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$: (a) $\theta_0 = 86^\circ$, \square , RK; +, FT com cinco harmônicos; (b) $\theta_0 = 170^\circ$, \square , RK; +, FT com oito harmônicos; \diamond , FT com doze harmônicos.	189
7.9	Pêndulo elíptico.	190
7.10	Curva ω_2 - θ_0 : (a) $m_A = 100$ $m_B = 1$. \square , RK - pêndulo 1gl; +, RK - pêndulo 2gl; \diamond , FT com dois harmônicos. (b) $m_A = 1$ $m_B = 1$. \square , RK; +, FT com dois harmônicos, eq. (7-39); \diamond , Taylor com três termos, eq. (7-35).	193
7.11	Solução no tempo da eq. (7-40) com os seguintes parâmetros: $x_0 = 2$, $P = 69311,51$, $EI = 5672067$, $q = 0$ e $m = 1$. \square , RK; +, aproximação com 3 termos; \diamond , 5 termos; \triangle , 7 termos.	194
7.12	Curva frequência-deslocamento inicial do problema (7-40) com os seguintes parâmetros: $P = 69311,51$, $EI = 5672067$, $q = 0$ e $m = 1$. \square , RK; +, Taylor com três termos; \diamond , Taylor com quatro termos; \triangle , FT com três harmônicos.	195
7.13	Sistema idealizado com um grau de liberdade.	195
7.14	Respostas no plano fase: (a) \square , $q = 0,2$; +, $q = 0,42$; (b) $q = 0,6$	196
7.15	Curva frequência-carregamento. \square , RK; +, eq. (7-46); \diamond , Taylor com 5 termos; \triangle , eq. (7-48).	198
7.16	Espaço de fase do problema $\ddot{\epsilon} + 0,2\dot{\epsilon} + (1 + 9,78519(\cos 2t)^2)\epsilon - (5,41808 \cos 2t)\epsilon^2 + \epsilon^3 = 0$. \square , RK; +, FT com três pares de harmônicos; \diamond , FT com cinco pares de harmônicos.	200

Lista de Tabelas

6.1	Convergência da solução linear.	130
6.2	Convergência da solução não-linear para $b = 1$	130
6.3	Convergência da solução não-linear para $b = 1, 1$	131
6.4	Máximos valores do parâmetro de não-linearidade, b , para que as aproximações apresentem um erro de aproximadamente 0,01% em δ	132
6.5	Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida com o HBM.	144
6.6	Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida pelo HBM.	144
6.7	Convergência da série de Padé (solução linear)..	147
6.8	Convergência da série de Padé do problema não-linear, $b = 1$	147
6.9	Convergência da série de Padé, tendo um número variável de termos no numerador, do problema não-linear $b = 1$	148
6.10	Convergência da relação $f - \delta$ aproximada do problema linear não-amortecido.	153
6.11	Convergência da solução linear amortecida em $t = T/2$ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$	154
6.12	Convergência das coordenadas do ponto fixo da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$	155
6.13	Convergência da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$	155
6.14	Convergência do deslocamento máximo e ϕ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$	156
6.15	Convergência do instante t que limita o erro da aproximação a menos de 0,01% do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$	156
6.16	Convergência do cálculo do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$	157
6.17	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$	157
6.18	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$	157
6.19	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$	157
6.20	Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-83).	158
6.21	Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-86).	158
6.22	Comparação entre as amplitudes da solução obtida com o HBM e da solução em série de Fourier, obtida a partir da solução em série de Taylor.	160
7.1	Resultados obtidos com o método de Taylor para $x_0 = 1$ e diferentes não-linearidades e aproximações, comparados com os apresentados por Gottlieb [1].	181
7.2	Resultados obtidos com o FT para diferentes aproximações tendo $x_0 = 1$, comparados a solução exata.	183
7.3	Resultados obtidos com o método de Fourier Taylor e o erro em relação a solução exata, eq. (7-13).	186

Lista de Símbolos

Caracteres Romanos

A	→ Área, amplitude da resposta, matriz dos coeficientes
a	→ Amplitude da resposta, amplitude de harmônico
a_i	→ Coordenadas generalizadas, amplitude do harmônico i
\overline{AB}	→ Segmento que une os pontos A e B
\overline{AB}_x	→ Componente segundo x do segmento AB
\overline{AB}_y	→ Componente segundo y do segmento AB
$\overline{A'B'}$	→ Segmento que une os pontos A' e B'
B	→ Amplitude da resposta
b	→ Amplitude de harmônico, parâmetro adimensional de não-linearidade cúbica
C_i	→ Constantes de integração
c_i	→ Amplitude dos harmônico i , parcela que compõe a amplitude de um harmônico
d_i	→ Amplitude dos harmônico i , parcela que compõe a amplitude de um harmônico
dx	→ Elemento infinitesimal segundo a direção x
ds	→ Elemento infinitesimal dx após sofrer deformação e deslocamentos
d_x	→ Deslocamento segundo x
d_y	→ Deslocamento segundo y
d_x^A	→ Deslocamento segundo x do ponto A

d_y^A	→ Deslocamento segundo y do ponto A
d_x^B	→ Deslocamento segundo x do ponto B
d_y^B	→ Deslocamento segundo y do ponto B
dU	→ Energia interna de deformação de um elemento infinitesimal
E	→ Módulo de Young do material
e_i	→ Parcela que compõe a frequência da resposta
EI	→ Rigidez a flexão
F	→ Funcional, amplitude da excitação
f	→ Parâmetro adimensional de força
F_0	→ Parcela constante da excitação
F_1	→ Parcela variável da excitação
g	→ Constante gravitacional
I	→ Funcional
i	→ Componente imaginária
L	→ Lagrangiano
l	→ Comprimento da viga, comprimento do pêndulo
m	→ Massa
P	→ Carregamento axial, série de Padé
$P(t)$	→ Função periódica
q	→ Carregamento lateral, não-linearidade
R	→ Resíduo, matriz, raio de convergência
T	→ Período da resposta
\bar{T}	→ Energia cinética
t	→ Tempo
T_i	→ Escalas de tempo

t_0	→ Instante inicial
U	→ Energia interna de deformação da estrutura
u	→ Deslocamento
u_0	→ Imperfeição inicial
V	→ Potencial
v	→ Parâmetro adimensional de velocidade
v_0	→ Condição inicial de velocidade
$x, x(t)$	→ Deslocamento
$x_i(t)$	→ Função de deslocamento que compõe a resposta $x(t)$
\dot{x}	→ Velocidade
x_0	→ Condição inicial de deslocamento
W, W_i	→ Função peso
w	→ Deslocamento
w_i	→ Parcela que compõe a frequência da resposta
w_0	→ Imperfeição inicial
X	→ Matriz de soluções

Caracteres Gregos

α	→ Parâmetro de não-linearidade quadrática, numerador da não-linearidade fracionária
β	→ Parâmetro de não-linearidade cúbica, denominador da não-linearidade fracionária
Δ	→ Deslocamento da carga P
δ	→ Perturbação, relação entre as frequências (ω/ω_0)
δ^1	→ Primeira variação do funcional
δ_w	→ Variação de w

δ'_w	→ Variação de w'
ϵ	→ Deformação específica, perturbação
ϵ_0	→ Deformação específica da linha neutra, perturbação inicial
Φ	→ Matriz de transição
ϕ	→ Ângulo de fase
$\phi(t)$	→ Função periódica
ϕ_i	→ Modos naturais de vibração
ϕ_1	→ Ângulo de fase
γ	→ Ângulo de fase
λ	→ Autovalor
φ	→ Resíduo
μ	→ Expoente característico
Ω	→ Freqüência da excitação
ω	→ Freqüência da resposta
ω_0	→ Freqüência natural da equação linear
Π	→ Energia potencial total
θ	→ Ângulo de rotação
θ_0	→ Imperfeição inicial, ângulo inicial
ρ	→ Densidade
σ	→ Parâmetro de sintonia (do Inglês detuning parameter)
τ	→ Tempo adimensionalizado
ζ	→ Coeficiente de amortecimento

Sobrescritos e Subscritos

$\Delta_{()}$ \longrightarrow Variação

$()'$ \longrightarrow Derivada em relação a x , derivada em relação a τ

$()_{max}$ \longrightarrow Valor máximo

$()^*$ \longrightarrow Coordenada de ponto fixo

Siglas e Abreviaturas

FT \longrightarrow Método de Fourier-Taylor

HBM \longrightarrow Método do Balanço Harmônico (do inglês *harmonic balance method*)

KBM \longrightarrow Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski

LP \longrightarrow Método de Lindstedt-Poincaré

MMS \longrightarrow Método das Múltiplas Escalas (do inglês *method of multiple scales*)