3
Otimização Sob Incerteza

Os problemas de otimização tentam resolver de forma eficiente situações do mundo real através de modelos matemáticos e comumente estão associados a parâmetros incertos, como produção, demanda, custos e preços. Na literatura encontramos diversas abordagens para incorporar e tratar estas incertezas, podendo destacar a programação estocástica, a programação robusta e a programação *fuzzy*.

A programação *fuzzy* esta baseada nos conceitos de lógica *fuzzy*, assumindo que a incerteza dos parâmetros presentes nos modelos matemáticos são números *fuzzy* e as restrições são conjuntos *fuzzy*. Algumas violações de restrições são permitidas e o grau de satisfação associado a cada restrição é definido por uma função de pertinência (Sahinidis, 2004). A programação *fuzzy* não fará parte do escopo desta dissertação, o foco do trabalho será na aplicação de programação estocástica e robusta para o tratamento de incertezas.

As seções seguintes apresentam as técnicas de otimização estocástica e otimização robusta, finalizando o capítulo 3 com problemas de otimização sob incerteza ligados a área de refino.

3.1
Programação Estocástica (SP)

Muitos modelos de programação estocástica são inicialmente formulados como modelos determinísticos. Se alguns dos parâmetros do modelo determinístico são incertos e este modelo apresenta-se sensível a alterações destes parâmetros, então é apropriado considerar programação estocástica para solução desse problema (Sen e Higle, 1999). O modelo determinístico permite calcular a solução ótima para cada um dos cenários separadamente, enquanto que o modelo estocástico considera o conjunto de todos os cenários simultaneamente, cada um com uma probabilidade de ocorrência associada. Dado que o cenário futuro não é conhecido, o modelo estocástico pode apresentar uma solução muito mais adequada do que o modelo determinístico. O valor esperado da informação perfeita e o valor da solução estocástica são medidas de comparação entre modelos determinísticos e estocásticos, com as quais é possível avaliar vantagens e desvantagens do uso da programação estocástica. Estas medidas serão apresentadas com mais detalhe na seção 3.1.2.

A programação estocástica trata de problemas de otimização com parâmetros que assumem uma distribuição de probabilidade discreta ou contínua e pode ser dividida em:

- Modelos de recurso (*recourse models*): esta abordagem foi originalmente proposta por Dantzig (1955) e Beale (1955) para problemas de programação estocástica de dois estágios, podendo ser estendida para múltiplos estágios. Modelos de recurso usam ações corretivas para compensar a violação de restrições que surgiram após a realização de incertezas. Detalhes desta abordagem serão apresentados na seção 3.1.1.

- Modelos probabilísticos (*chance-constrained programming*): apresentados por Charnes e Cooper (1959), permitem que algumas restrições de segundo estágio sejam expressas em termos de declarações probabilísticas sobre as decisões de primeiro estágio. As ações corretivas presentes nos modelos de recurso são evitadas nesta abordagem, já que algumas restrições de segundo estágio podem ser violadas ao incorporarem uma medida de risco. Os modelos probabilísticos são particularmente úteis quando os custos e benefícios associados às decisões de segundo estágio são difíceis de serem avaliados.

  O procedimento básico através do qual *chance-constrained programming* lida com incerteza é ilustrado com o modelo linear abaixo:

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ \text{s.a.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $x \in \Re^n$, $c \in \Re^n$, $b \in \Re^m$ e $A \in \Re^{m \times n}$. Assume-se que c e A são parâmetros determinísticos e b é um vetor aleatório com função de distribuição acumulada marginal Φ conhecida. Nesta abordagem simplista, define-se o nível de confiança $\alpha \in \Re^n$ para reescrever a restrição $Ax \le b$ como:

$$\Pr\left\{\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_i \le b_i\right\} \ge \alpha_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.2)$$

onde Pr é a medida de probabilidade. Aplicando a função de distribuição acumulada de b_i à restrição (3.2), esta pode ser reformulada como:

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_i \le \Phi_i^{-1}(1 - \alpha_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (3.3)$$

Em (3.3) α_i e Φ_i^{-1} são conhecidos. Desta forma a restrição (3.2) é reduzida a uma restrição linear comum e o modelo probabilístico se transforma em um modelo de programação linear determinístico.

A proposta desta dissertação é tratar o problema através da programação estocástica utilizando o método de dois estágios, e por isso a próxima seção será dedicada a esta abordagem. Em seguida serão apresentadas formalmente as medidas de comparação entre modelos determinísticos e estocásticos.

3.1.1
Modelo de Programação Linear Estocástica com Dois Estágios (Two-Stage Stochastic Linear Program with Recourse)

O modelo de programação estocástica mais aplicado e estudado é o de programação linear de dois estágios (Shapiro e Philpott). O modelo de dois estágios, como o próprio nome sugere, divide as variáveis de decisão em dois estágios. As variáveis de primeiro estágio devem ser decididas antes da realização de incertezas. As variáveis de segundo estágio são utilizadas como medidas de correção contra qualquer inviabilidade que tenha surgido após a realização de incertezas. O modelo de programação estocástica de dois estágios pode ser formulado como:

$$\underset{x\in X}{Min}\left\{z(x)=c^T x+E\left[Q(x,\xi)\right]\right\} \quad \text{sujeito a} \quad Ax\le b \quad x\ge 0\,, \tag{3.4}$$

onde $Q(x,\xi)$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio:

$$\underset{y}{Min}\, q^T y \quad \text{sujeito a} \quad Wy\le h-Tx \quad y\ge 0\,. \tag{3.5}$$

Nesta formulação, $x\in R^n$ é o vetor das variáveis de decisão de primeiro estágio, c, A e b são os dados associados ao problema de primeiro estágio, $y\in R^m$ é o vetor das variáveis de decisão de segundo estágio e $\xi=(q,T,W,h)$ contém os dados para o problema de segundo estágio que podem ser representados por variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecidas. Aqui assume-se que o vetor aleatório ξ possui um número finito de realizações $\xi_1 ... \xi_s$ com as respectivas probabilidades $p_1 ... p_s$. Assim o valor esperado $E\left[Q(x,\xi)\right]$ pode ser escrito em função do somatório:

$$E\left[Q(x,\xi)\right]=\sum_{s=1}^{S} p_s Q_s(x,\xi_s)\,. \tag{3.6}$$

Assumindo o modelo discreto, pode-se reescrevê-lo na forma:

$$\underset{x\in X}{Min}\left\{z(x)=c^T x+\sum_{s=1}^{S} p_s Q_s(x,\xi_s)\right\} \quad \text{sujeito a} \quad Ax\le b \quad x\ge 0\,, \tag{3.7}$$

onde $Q_s(x,\xi_s)$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio para cada realização $s=1,...,S$:

$$\underset{y}{Min}\, q_s{}^T y_s \quad \text{sujeito a} \quad W_s y_s\le h_s-T_s x \quad y_s\ge 0\,. \tag{3.8}$$

No primeiro estágio deve ser tomada a decisão do tipo “aqui e agora” (*here-and-now*) do vetor x, antes da realização das incertezas representadas por ξ

conhecido. No segundo estágio, onde as informações ξ já estão disponíveis, é tomada a decisão sobre o valor do vetor y. No primeiro estágio é minimizado o custo de $c^T x$ mais o valor esperado do custo do problema de segundo estágio. A decisão tomada no problema de segundo estágio reflete o comportamento ótimo no momento em que a incerteza é revelada, compensado qualquer decisão inadequada tomada no primeiro estágio.

A decisão de primeiro estágio x, como explicado anteriormente, depende apenas da informação disponível até aquele momento, este princípio é chamado de *nonanticipativity constraint*. No problema de dois estágios isto implica que a decisão x independe das realizações do segundo estágio, sendo assim o vetor x é o mesmo para todos os possíveis eventos que venham a ocorrer no segundo estágio do problema (Birge e Louveaux, 1997).

3.1.2
Medidas de Comparação entre Modelos Determinísticos e Estocásticos

Segundo Birge e Louveaux (1997), o modelo estocástico geralmente é computacionalmente difícil de resolver. É comum optar pela solução de um modelo determinístico, usando a média das variáveis aleatórias ou resolvendo um problema determinístico para cada cenário. No intuito de comparar soluções determinísticas com estocásticas, Birge e Louveaux (1997) apresentam duas medidas: o valor esperado da informação perfeita e o valor da solução estocástica.

3.1.2.1
Valor Esperado da Informação Perfeita

O valor esperado da informação perfeita (*Expected Value of Perfect Information* - EVPI) mede o máximo montante que um tomador de decisão estaria disposto a pagar pela informação perfeita, isto é, o preço a pagar para conhecer as realizações futuras. Supondo que a incerteza seja representada por um número finito de cenários, sendo ξ a variável aleatória cujas realizações correspondem aos vários cenários, define-se:

$$\begin{aligned} &\underset{x \in X}{Min}\, z(x,\xi) = c^T x + \min\left\{ q^T y \mid Wy \le h - Tx, y \ge 0 \right\} \\ &s.a. \quad Ax \le b, x \ge 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

como o problema associada a cada cenário ξ. Assume-se que para todo ξ existe pelo menos uma solução viável $x \in R^n$. Seja $x^*(\xi)$ a solução ótima para o problema (3.9) e o valor da função objetivo $z(x^*(\xi),\xi)$ para cada cenário, é possível calcular a solução conhecida como espere-e-veja (*wait-and-see* - WS). A solução chamada de espere-e-veja corresponde ao valor ótimo do problema quando as realizações futuras de ξ são conhecidas, isto é, o tomador de decisão pode esperar e ver o futuro antes de decidir. O valor esperado da solução espere-e-veja é dado por:

$$WS = E_\xi\left[\min_x z(x,\xi)\right] = E_\xi\left[z\left(x^*(\xi),\xi\right)\right] \tag{3.10}$$

Agora é possível comparar a solução WS com a solução aqui-e-agora (*here-and-now*) correspondente ao problema de recurso (RP) de dois estágios definido na seção anterior como (3.4), onde RP pode ser escrito na forma:

$$RP = \min_x E_\xi\left[z(x,\xi)\right], \tag{3.11}$$

com solução ótima x^*. A solução RP é definida como aqui-e-agora, pois a solução de primeiro estágio é decidida sem que se conheça as realizações futuras de ξ, isto é, a decisão é tomada no momento presente sem nenhum conhecimento sobre o futuro.

O valor esperado da informação perfeita é, por definição, a diferença entre as soluções espere-e-veja e aqui-e-agora:

$$EVPI = \left| WS - RP \right|. \tag{3.12}$$

O valor esperado da informação perfeita (EVPI) representa a diferença entre a solução obtida pelo agente com poder de predição perfeita (conhece os eventos futuros) e o agente que resolve o problema sob a hipótese de conhecer apenas a distribuição de probabilidade de ξ.

3.1.2.2
Valor da Solução Estocástica

Em alguns casos precificar o valor da informação perfeita não é a medida de comparação mais adequada, já que a solução espere-e-veja (WS) é impossível de ser realizada na prática. Nestes casos, outra opção consiste em utilizar a solução do problema determinístico associada à média das variáveis aleatórias para comparar com a solução estocástica. Assim, defini-se por EV (*expected value*) a solução do problema para o cenário esperado (valor esperado de ξ):

$$EV = \min_x z\left(x, \bar{\xi}\right), \tag{3.13}$$

onde $\bar{\xi} = E\left[\xi\right]$ e $x^*\left(\bar{\xi}\right)$ é a solução ótima de EV.

Em seguida será definido o valor esperado do resultado (EEV) usando a solução obtida com EV:

$$EEV = E_\xi\left[z\left(x^*\left(\bar{\xi}\right), \xi\right)\right]. \tag{3.14}$$

O EEV mede a performance da solução $x^*\left(\bar{\xi}\right)$ para cada realização de ξ, permitindo que a decisão de segundo estágio seja feita de forma ótima em função de $x^*\left(\bar{\xi}\right)$ e ξ. O valor da solução estocástica (*Value of the Stochastic Solution* - VSS) fica então:

$VSS = \left| EEV - RP \right|.$

O valor da solução estocástica (VSS) pode ser interpretado como o benefício esperado do agente que considerou a incerteza dada por ξ, ou ainda, como a perda esperada do agente que optou pela modelagem determinística utilizando o valor esperado de ξ ($E\left[\xi\right] = \bar{\xi}$).

3.2
Programação Robusta

Segundo Kouvelis e Yu (1997), a programação robusta trata os parâmetros incertos através de cenários discretos, e tem com objetivo encontrar soluções próximas ao ótimo, independentemente de qual cenário se realizar. Além disso, esta abordagem lida com a questão de aversão ao risco por encontrar soluções que sejam menos afetadas pelas mudanças de cenários.

Para Butler, Ammons e Sokol (2003), os modelos de programação robusta podem ser divididos em duas categorias:

- Modelos de arrependimento (*regret models*): os modelos de arrependimento buscam minimizar ou limitar a diferença entre o custo da solução adotada e o custo da solução ótima para este cenário. Esta diferença é definida como a medida de arrependimento e pode ser expressa em termos absolutos ou percentuais.

- Modelos de variabilidade (*variability models*): os modelos de variabilidade controlam a distribuição dos custos através da inclusão do desvio padrão ou da variância na função objetivo, desta forma minimizam os custos esperados (ou maximizam o lucro esperado) e ao mesmo tempo reduzem a variabilidade no universo de possíveis cenários. Segundo Bai, Carpenter e Mulvey (1997), os modelos de variabilidade propõem uma abordagem alternativa para robustez encontrando uma solução próxima da ótima e que não seja muito sensível à realização de nenhum dos possíveis cenários.

Neste trabalho será apresentada uma formulação robusta para solução do problema proposto no intuito de compará-la com a solução obtida no modelo de programação estocástica. A comparação levará em consideração que a abordagem robusta considera o tomador de decisão como avesso ao risco. A seção seguinte apresentará a formulação geral do modelo de arrependimento usado neste trabalho.

3.2.1
Modelo de Programação Robusta – Modelo de Arrependimento

Na literatura encontramos diversas formulações para o modelo de arrependimento (Butler, Ammons e Sokol, 2003; Gutierrez, Kouvelis e Kurawarwala, 1996), a utilizada neste trabalho foi proposta por Kouvelis e Yu (1997) e tem como objetivo minimizar os custos máximos. A formulação proposta é bastante conservadora e busca reduzir os efeitos do cenário mais negativo (pior caso) minimizando o maior desvio observado do ótimo para todos os cenários.

Define-se, como segue, um problema de minimização de custos supondo que a incerteza é representada por um número finito de cenários, sendo ξ a variável aleatória cujas realizações correspondem aos vários cenários, dado por:

$$\begin{aligned} &\underset{x \in X}{Min}\, z(x,\xi) = c^T x + \min\left\{ q^T y \mid Wy \le h - Tx, y \ge 0 \right\} \\ &s.a. \quad Ax \le b, x \ge 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

Seja (3.15) o problema associado a cada cenário ξ e $z\left(x^*(\xi),\xi\right)$ o valor ótimo da função objetivo para cada cenário, a formulação apresentada por Kouvelis e Yu (1997) fica:

$$\begin{aligned} &\underset{\xi \in \Xi}{Min}\, \alpha \\ &s.a. \quad z(x,\xi) - z\left(x^*(\xi),\xi\right) \le \alpha \\ &\qquad\;\; \alpha \ge 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Onde α é a variável que corresponde ao desvio entre a solução robusta e a solução com informação perfeita obtida pelo modelo determinístico para cada cenário ξ. Observa-se que o cenário com maior desvio domina a solução, já que o α é o mesmo para todos os cenários. O modelo robusto apresentado pode ser interpretado também como o MinMax do arrependimento, onde o arrependimento é dado pela expressão $z(x,\xi)-z\left(x^{*}(\xi),\xi\right)$.

3.3
Problemas de Otimização sob Incerteza na Indústria do Petróleo

Uma característica importante dos problemas de planejamento, programação e *scheduling* de uma indústria de processos, como é caso da indústria de petróleo, é alto grau de incerteza associado ao negócio (Lababidi et al., 2004). Inúmeros são os fatores cujos valores são incertos, e ignorá-los pode levar a uma decisão ruim ou simplesmente errada (Rusczynski, 1997).

O modelo de suprimento, refino e transporte apresentado por Escudero et al. (1999) é formulado como um problema de recurso parcial com dois estágios via análise de cenários. Escudero et al. (1999) apresentam a formulação matemática detalhada do modelo determinístico e de sua versão estocástica, propondo ao final do artigo três métodos de decomposição para solução do problema. Nenhum resultado é apresentado, mas Escudero et al. (1999) enfatizam a necessidade de um método de decomposição para solução do problema estocástico, pois este atinge uma dimensão muito grande, mesmo com pouco cenários.

A formulação clássica do problema de recurso com dois estágios pode ser vista no modelo estocástico apresentados por Lababidi et al. (2004). Em Lababidi et al. (2004) um problema de planejamento da cadeia de suprimentos de uma companhia petroquímica é inicialmente modelado como determinístico, depois a programação estocástica é utilizada para incluir a incerteza de alguns parâmetros-chave. A principal conclusão do estudo é que a incerteza tem um significativo impacto sobre as decisões de planejamento, tal efeito pode ser medido pelo baixo valor esperado da informação perfeita.

Khor et al. (2007) tratam o problema de planejamento a médio prazo das operações em uma refinaria através de programação estocástica e programação robusta. Em Khor et al. (2007) quatro abordagens são consideradas para assegurar a solução e a robustez do modelo: (1) modelo de média-variância de Markowitz (MV) para lidar com a aleatoriedade nos coeficientes da função objetivo (risco econômico); (2) modelo de dois estágios com estrutura de recurso fixa para lidar com a aleatoriedade nos coeficientes das restrições; (3) incorporação da média-variância de Markowitz (MV) no modelo desenvolvido em (2) para minimizar o risco operacional e econômico; e (4) reformulação do modelo (3), adotando o desvio médio absoluto (MAD) como a medida de risco. O gerenciamento do risco econômico e operacional num problema de planejamento de refino também foi tratado no trabalho de Carneiro (2008), que optou pelo *Conditional Value-at-Risk* (CVaR).

Al-Othman et al. (2008) propõem um modelo estocástico multi-período para otimização da cadeia de suprimentos de uma companhia de petróleo instalada em um país produtor de óleo bruto. O impacto das incertezas na demanda e nos preços é avaliado comparando o modelo estocástico com sua versão determinística. A formulação estocástica baseia-se no problema de dois estágios com um número finito de realizações, onde a decisão de primeiro estágio está associada à produção de óleo e as demais decisões operacionais são tomadas no segundo estágio. A principal conclusão deste trabalho é que as incertezas podem ser absorvidas através de um balanço apropriado entre a exportação de petróleo e a capacidade de processamento disponível.

Uma aplicação de programação não-linear associada à incerteza pode ser vista no trabalho de Neiro e Pinto (2005). Neiro e Pinto (2005) formularam um modelo de programação não linear inteira (MINLP) multi-período para otimização sob incerteza do planejamento da produção de refinarias. Os trabalhos de Dempster et al. (2000) e Cheng e Duran (2003). Dempster et al. (2000) utilizam a técnica de programação dinâmica com análise de cenários para resolver o modelo estocástico de planejamento logístico da indústria de petróleo. Cheng e Duran (2003) apresentam um sistema de apoio à decisão baseado na integração de um conjunto de eventos discretos gerados por simulação com um modelo de programação dinâmica para o controle ótimo do inventário e do transporte de óleo bruto. A abordagem probabilística *chance-constrained programming* é utilizada por Li et al. (2004) para o planejamento de refinarias sob incerteza. Exemplos de programação fuzzy para solução de problemas relacionados ao planejamento na indústria de petróleo podem ser vistos em Liu e Sahinidis (1996) e Hsieh e Chiang (2001).

Esta seção destaca a importância de incluir incerteza nos modelos de planejamento relacionados ao setor de petróleo, onde a variabilidade de diversos parâmetros apresenta significativa influência sobre o processo de decisão. Conforme visto na literatura, a análise via cenários é muito utilizada para descrever a incerteza dos parâmetros estocásticos e tem apresentado resultados confiáveis comprovando sua eficiência para otimização de problemas sob incerteza. Todavia, o uso desta abordagem aumenta rapidamente o porte do problema conforme o número de cenários aumenta, e vários métodos são citados como sendo alternativas para solução destes problemas (Van Slyke & Wets, 1969; Birge, 1985; Gassmann, 1990; Mulvey & Vladimirou, 1991; Rockafellar & Wets, 1991; Mulvey & Ruszczynski, 1992; Dempster & Thompson, 1998; entre outros). No entanto, a maioria dos resultados práticos apresentados trata de poucos cenários, não sendo possível avaliar o real desempenho dos métodos citados na solução de problemas de planejamento da cadeia de petróleo.

No próximo capítulo os artigos apresentados nos Capítulos 2 e 3 serão classificados segundo sua aplicação, nível de decisão e técnica de solução. Com base nessa bibliografia será apontado o que já foi desenvolvido nesta área de otimização ligado a indústria de petróleo e as oportunidades para elaboração de novos trabalhos.