7
Medição e controle do risco de equilíbrio

7.1.
Risco de equilíbrio e programação estocástica

O risco de equilíbrio é definido como a probabilidade de insolvência, ou seja, a probabilidade do não cumprimento das obrigações de um fundo de pensão até a sua extinção. No entanto, nos artigos da literatura a medida de risco de equilíbrio só pode ser aproximada pela probabilidade de “underfunding”, definida como a probabilidade do não cumprimento dessas obrigações até o final do horizonte da programação estocástica. Sabendo que o horizonte da PE é menor que o de existência do fundo, é possível concluir que a probabilidade de “underfunding” é menor que a probabilidade de insolvência subestimando o risco de equilíbrio.

O cálculo da probabilidade de insolvência em um determinado instante depende da reserva matemática, isto é, do valor acumulado das obrigações futuras do fundo de pensão. A reserva matemática no instante zero, ou seja, o capital inicial mínimo necessário para o pagamento de todos os desembolsos depende da evolução dos fluxos atuariais (benefícios e contribuições) e da taxa de desconto utilizada.

Os fluxos atuariais são calculados usando processos estocásticos e premissas bem conhecidas na literatura. Já a escolha do fator de desconto ainda é bastante discutida. Segundo a legislação brasileira a taxa de desconto real deve ser de 6% fixa (usando o índice de inflação IGP-M como referência). No entanto, segundo Veiga (2003) a taxa de desconto dos benefícios e contribuições deve ser a rentabilidade da carteira do fundo, pois só assim reflete o verdadeiro custo de oportunidade da instituição.

Considerando um capital inicial c(0) é possível definir um modelo simplificado (sem custos de transação, administrativos, ...) para a evolução do patrimônio do fundo ao longo do tempo. Sejam c(k), r(k), contr(k) e bene(k), respectivamente, o capital do fundo, a rentabilidade da carteira, as contribuições e os benefícios no ano k, tem-se:

$$c(k) = \left[1 + r(k)\right].c(k-1) + \left[contr(k) - bene(k)\right]$$

O processo recursivo permite calcular o patrimônio (capital) do fundo no momento de sua extinção (k = K_{ext}) em função do capital inicial, dos fluxos atuariais e retornos da carteira ao longo do tempo.

$$c(K_{ext}) = \left[\prod_{i=1}^{K_{ext}}(1+r(i))\right]c(0) + \left[\prod_{i=2}^{K_{ext}}(1+r(i))\right]\left(contr(1) - bene(1)\right) + ..$$
$$+ \left[(1+r(K_{ext}))\right]\left(contr(K_{ext}-1) - bene(K_{ext}-1)\right) + \left(contr(K_{ext}) - bene(K_{ext})\right) \geq 0$$

O valor mínimo de c(0) para o cumprimento de todas as obrigações do fundo é encontrado fazendo c(K_{ext}) = 0. Este valor mínimo define a reserva matemática no instante 0 em função dos fluxos atuariais e retornos da carteira ao longo do tempo. O capital inicial deve ser maior ou igual que a reserva matemática para garantir o estado de solvência do fundo.

$$c(0) \geq \frac{bene(1) - contr(1)}{(1+r(1))} + \frac{bene(2) - contr(2)}{(1+r(1))(1+r(2))} + ... + \frac{bene(K_{ext}) - contr(K_{ext})}{\prod_{i=1}^{K_{ext}}(1+r(i))} = RM(0)$$

A equação anterior prova que a taxa de desconto usada no cálculo da reserva matemática deve ser a rentabilidade da carteira. Sendo assim, a taxa de desconto regulatória (~IGP-M + 6%) pode ser interpretada como uma aproximação do portfólio por um único título de renda fixa indexado ao IGP-M com um spread fixo de 6%. Esta aproximação, na grande maioria das vezes, não é adequada já que na prática os valores para rentabilidade do fundo são bem diferentes.

O modelo de programação estocástica faz indiretamente o cálculo correto do desconto do passivo. Em cada cenário, os pagamentos no estágio t são feitos após o capital de t-1 ter sido rentabilizado. O patrimônio em t será o total de ativos rentabilizado em t-1 subtraído dos pagamentos do passivo e outros custos em t. Isto equivale ao cálculo analítico descrito acima.

O problema do modelo de PE é a restrição computacional na escolha do número de estágios e a estrutura de nós da árvore. Não é desejável para o modelo que se escolham estágios de grande duração devido à imprecisão dos fatores de risco envolvidos. Conseqüentemente, isto restringe o horizonte da PE a algumas poucas décadas enquanto que as obrigações dos fundos de pensão podem passar dos cem anos. Para resolver este problema, este trabalho propõe um método de medição e controle de risco de equilíbrio via bootstrap visando tratar o período seguinte ao horizonte de planejamento do modelo de PE.

7.2.
Medição do risco de equilíbrio via bootstrap

Bootstrap é uma forma de sortear valores utilizando uma distribuição amostral aproximada para estudar as propriedades de um estimador ou mesmo para utilizar as observações para algum cálculo estocástico. Nesse trabalho o bootstrap é usado para calcular a reserva matemática sorteando as rentabilidades do portfólio e a inflação através da distribuição de probabilidade intrínseca à árvore de possibilidades.

Para cada ano posterior ao horizonte da PE (20 anos) existe um fluxo real PR(k) determinístico do passivo que deve ser descontado até o final do último estágio da árvore de decisão.

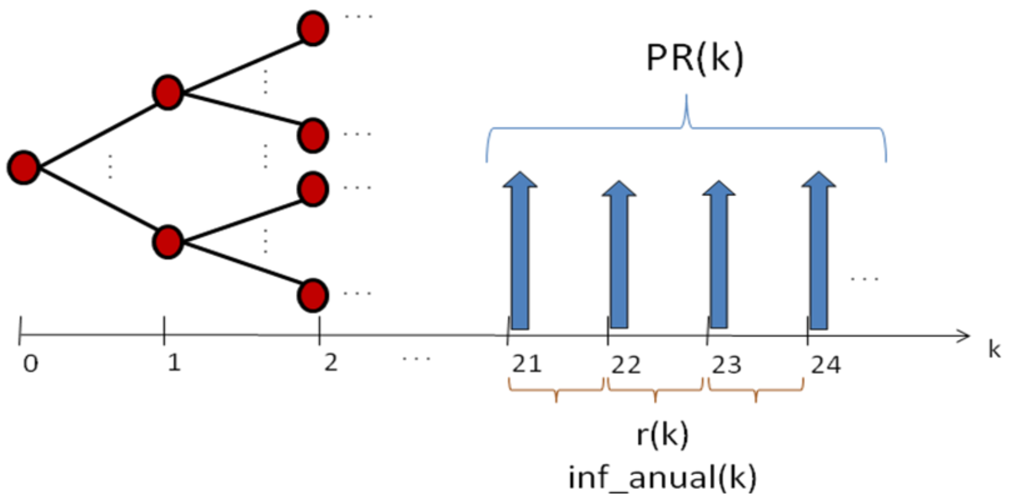

Figura 21. Fluxos do passivo além do horizonte da PE

Estes fluxos devem ser descontados pela rentabilidade real da carteira de forma a representar corretamente o custo de oportunidade da instituição. Então, os fluxos descontados são dados por:

$$PR_{desc}(k) = \left[\prod_{i=21}^{k} \left(\frac{1}{\left(\frac{1+r(i)}{1+inf\_anual(i)} \right)} \right) \right] .PR(k) = \left[\prod_{i=21}^{k} \left(\frac{1+inf\_anual(i)}{1+r(i)} \right) \right] .PR(k)$$

O valor acumulado dos fluxos descontados é definido como reserva matemática (RM(20)), ou reserva técnica, em valores reais referente ao final último período da PE (k =20).

$$RM(20) = \sum_{k=21}^{K_{ext}} PR_{desc}(k)$$

No entanto, o cálculo da reserva matemática para o ano k = 20 não pode ser calculada diretamente devido ao desconhecimento dos valores de inflação e dos retornos da carteira para os anos subseqüentes. Sendo assim, uma aproximação para as distribuições desses valores será obtida usando a técnica de bootstrap. Dado o conjunto de decisões ótimas obtidas pela PE, a rentabilidade da carteira e a inflação, para k = 21, 22,..., será obtida utilizando os respectivos valores de um nó da árvore sorteado aleatoriamente (bootstrap). Para a realização do bootstrap são necessárias as definições de duas variáveis aleatórias: S e N, que são respectivamente o estágio e o nó escolhidos para sortear os fatores de risco de interesse. O sorteio é feito baseado na distribuição de probabilidade conjunta dessas duas variáveis aleatórias. A probabilidade de sortear o cenário de inflação e rentabilidade do estágio S = s do nó N = n é dada por:

$$P(S = s \ e \ N = n) = P(N = n \mid S).P(S = s)$$

Sabe-se que para cada estágio os nós são equiprováveis e que cada estágio possui um tamanho diferente. Logo, assume-se P(N = n | S) é caracterizada por uma distribuição uniforme e P(S = s) é ponderada pelo tamanho do estágio em relação ao horizonte de planejamento.

$$P(N = n \mid S) = \frac{1}{\#\ de\ nós\ do\ estágio\ S}$$

$$P(S = s) = \frac{dur(s)}{\sum_{i=1}^{T} dur(i)}$$

Sorteando 5000 diferentes cenários de rentabilidade e inflação, é calculada uma distribuição de probabilidade aproximada da reserva matemática real no ano k = 20.

A medição do risco de equilíbrio é feita comparando a riqueza final de cada nó em valores reais com a distribuição da reserva. Desta forma é possível calcular uma probabilidade de insolvência para cada nó terminal da PE.

A probabilidade de insolvência de nó terminal n_T é calculada a partir da distribuição da reserva matemática RM(20).

$$prob\_insol(n_T) = P\left(\frac{1}{1 + \inf\_\,acum(n_T, 20)}\left(y(n_T) - w(n_T) + L^*\right) < RM(20)\right)$$

Seja a variável indicadora:

$$I_{insolvente}(n_T) = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{1 + \inf\_\,acum(n_T, 20)}\left(y(n_T) - w(n_T) + L^*\right) < RM(20) \\ 0, & \dfrac{1}{1 + \inf\_\,acum(n_T, 20)}\left(y(n_T) - w(n_T) + L^*\right) \geq RM(20) \end{cases}$$

Logo a probabilidade de insolvência pode ser expressa como:

$$prob\_insol(n_T) = \frac{\sum_{n_T=1}^{N_T} I_{insolvente}(n_T)}{N_T}$$

Assim é possível obter a distribuição da probabilidade de insolvência como a principal medida do risco. Sua média é o principal parâmetro que define o estado de equilíbrio de um fundo de pensão.

7.3. Controle do risco de equilíbrio

O método de controle do risco e equilíbrio é um processo iterativo com o objetivo de reduzir o risco de insolvência. A primeira etapa é feita com o modelo de PE com o requisito de capital nulo, ou seja, $L^* = 0$. Neste caso, a penalização sob a função objetivo começa atuar em todos os cenários com a riqueza final (no fim do último período da PE: k = 20) seja menor que zero.

Se a medida do risco de equilíbrio, ou seja, a probabilidade de insolvência média, estiver fora da tolerância ao risco da instituição, o modelo de otimização deve ser usado novamente com um valor diferente para o requisito de capital L^*. Os valores possíveis são a média ou algum quantil da distribuição de reserva calculada na iteração zero. Nestes casos, a função objetivo começa a ser penalizado em todos os cenários onde o a riqueza final é menor que o L^* escolhido.