4
Método de geração de cenários em árvore

4.1.
Conceitos básicos

Uma das atividades mais comuns no mercado financeiro é considerar os possíveis estados futuros da economia. O preço e a tendência de cada ativo refletem a avaliação do mercado quanto às realizações futuras possíveis. Especialistas defendem seus pontos de vista sobre o futuro do mercado e os investidores alocam seu dinheiro de acordo com o risco e o retorno de cada ativo.

Existem muitas maneiras de estimar cenários que representem o futuro da economia. Na árvore de decisão, os nós estão relacionados à probabilidade discreta de eventos específicos. Um conjunto de nós consecutivos e interligados representa um possível cenário. Para representar o futuro, a estrutura de árvore é dividida em cenários $S = (S_0, ..., S_T)$ de T estágios onde $s \in S$ são as possíveis realizações de todos os fatores de risco envolvidos que ocorrem com probabilidade p_s. Uma árvore genérica de decisão (Figura 10) com 5 estágios é dada por:

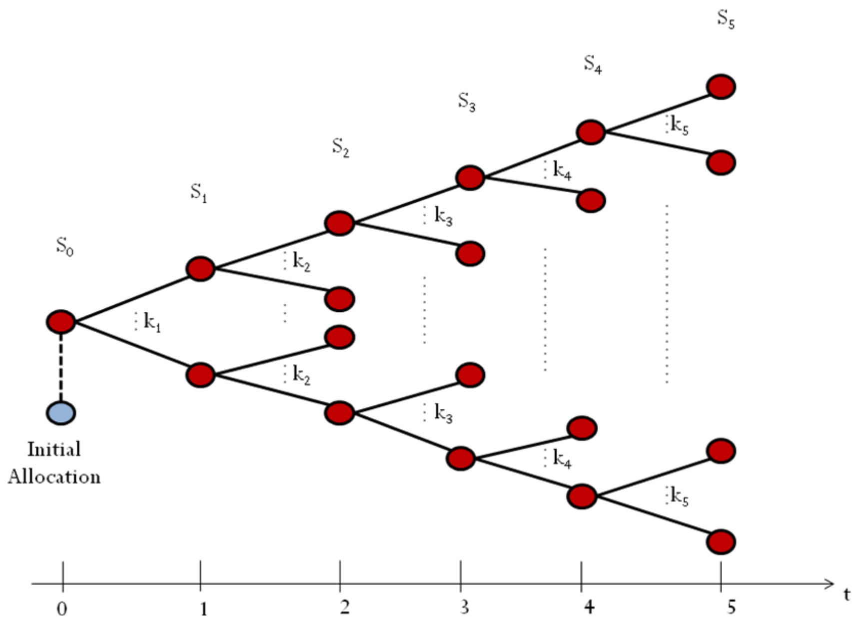

Figura 9. Árvore genérica de decisão

Onde S_1 possui k_1 realizações possíveis dado $S_0 = s_0$, S_2 possui k_2 dado $S_1 = s_1$, e assim por diante. Nessa formatação, existem $k_1 . k_2 . k_3 . k_4 . k_5$ possíveis cenários (caminhos) futuros que podem ou não ter probabilidades distintas.

Cada cenário é uma realização possível, porém somente o conjunto de todas elas é que representa o futuro. Na prática é inviável incluir todos os cenários possíveis, no entanto um conjunto finito e suficientemente pequeno pode representar bem os fatores de risco.

4.2.
Revisão da literatura

A geração de cenários em árvore é descrita por dois artigos principais: Gülpinar, Rustem e Settergren (2004) e Kouwenberg (2001). O primeiro propõe e compara métodos distintos para estruturar os cenários em árvore de forma a representar o futuro das variáveis econômicas e atuariais em estudo. Já o segundo, além de descrever um método eficiente de geração de cenários em árvore, além de abordar um modelo de PE, um modelo estocástico e um modelo para o passivo.

O primeiro artigo se divide em três abordagens de geração: por simulação, por otimização e híbrida (simulação/otimização). Na primeira abordagem, cenários dos preços dos ativos, gerados aleatoriamente através do modelo estocástico escolhido, formando grupos conhecidos pela denominação de "cluster". O centróide de cada cluster, selecionado como o cenário mais próximo de seu centro (o cenário médio, por exemplo), dá origem aos nós da árvore. Essa abordagem pode ser feita por simulação seqüencial ou paralela. Na segunda, a geração de cenários em árvore por otimização, os cenários de preços e suas probabilidades são escolhidos de forma a minimizar o quadrado da diferença entre propriedades estatísticas de cada estágio da árvore e com as mesmas propriedades relativas ao modelo estocástico estimado. Seqüencias de otimizações não-lineares ou uma única otimização não-linear para toda a estrutura são as duas categorias desta abordagem. Por fim, a geração da árvore de cenários híbrida (simulação / otimização), apresenta uma redução do esforço computacional com relação à segunda. A obtenção dos preços é feita por simulação e as probabilidades são obtidas pela otimização.

Os procedimentos são testados com dados históricos utilizando um modelo de otimização para escolha de portfólio. A segunda abordagem usando uma otimização única é, teoricamente, a melhor forma de representar os fatores de risco. Porém, segundo Gülpinar, Rustem e Settergren (2004), o esforço computacional não demonstra ganhos na comparação de resultados com as outras abordagens.

O segundo artigo, Kouwenberg (2001), além de apresentar um modelo VAR para os fatores de risco e uma modelagem de programação estocástica, também descreve uma metodologia muito eficaz na geração de cenários em árvore. O “Ajusted Random Sampling” é baseado numa geração aleatória dos cenários ajustando seus principais momentos com o modelo estatístico original. O uso de variáveis antitéticas permite o ajuste de todos os momentos centrais ímpares da árvore com o modelo econométrico para os fatores de risco. Com a média e a simetria ajustadas, os ramos condicionais da árvore de possibilidades sofrem uma transformação na variância para completar o ajuste com a distribuição original.

A facilidade de implementação e o menor esforço computacional do modelo de Kouwenberg fazem desse método uma forma eficiente de geração de cenários estruturados em árvore usando um modelo econométrico simples para os fatores de risco.

4.3. Método proposto

Um modelo de PE necessita de uma representação coerente de incerteza. Esta por sua vez é expressa pela função de distribuição de probabilidade conjunta contínua dos fatores de risco. O processo decisório, na realidade, utiliza uma aproximação discreta desta distribuição. A obtenção de uma amostra estruturada dos cenários futuros dos parâmetros estocásticos é conhecida como geração de cenários em árvore. Nos modelos muti-estágios, a cada período, novas ramificações interligam o estado atual a estados futuros, criando assim a estrutura de árvore de possibilidades.

A formulação discreta dos fatores de risco e um espaço de probabilidade adequado tornam um número grande, porém finito de cenários suficientes para representar o futuro. Em uma situação ideal seria incluído todo o universo de possibilidades dos cenários, com todas as realizações pessimistas e otimistas. No entanto, dado um histórico único dos parâmetros sob incerteza, o futuro pode ser caracterizado por um número tratável de realizações para o próximo estágio.

O nó raiz da estrutura representa a situação atual dos fatores de risco sendo diretamente observável nos dados problema. Os nós seguintes representam os estados futuros condicionados a seu estado passado único, o nó antecessor. As ligações entre os nós, além de caracterizarem as equações do modelo de PE, representam o período de ocorrência dos parâmetros sob incerteza.

A geração de cenários em árvore depende de algumas premissas escolhidas a priori: o horizonte de estudo, o número de estágios, as durações de cada estágio e a estrutura de nós da árvore. As simulações deste trabalho utilizam um horizonte de estudo de 20 anos com uma estrutura de árvore de 5 estágios de tamanhos distintos. Devido a limitações computacionais e a necessidade de manutenção do horizonte de longo prazo, os últimos estágios são mais longos que os primeiros de forma a completar o horizonte com o número de estágios definido. Esta escolha está relacionada à necessidade de uma precisão maior nos eventos mais recentes. A decisão de realocação do instante zero é a mais importante já que o modelo pode ser usado novamente no ano seguinte com o histórico atualizado. A duração dos estágios, em ordem cronológica, é de 1, 1, 3, 5 e 10 anos. A estrutura escolhida das realizações condicionadas ao nó antecessor é de 10 ramificações para o primeiro estágio, 6 para o segundo e o terceiro estágios, e 4 para o quarto e o quinto (1-10-6-6-4-4).

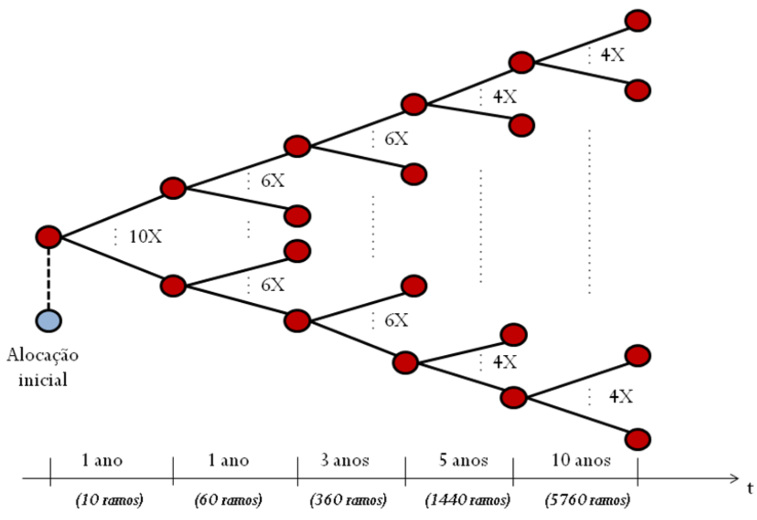

Figura 10. Estrutura de árvore escolhida

O método de geração de cenários em árvore adotado neste trabalho é baseado no "Adjusted Random Sampling" de Kouwenberg (2001), com algumas adaptações para o contexto brasileiro. A falta de dados ou mesmo um curto período recente de desenvolvimento de uma economia estável (plano real, inflação controlada,...) faz com que o modelo estocástico para os fatores de risco tenha uma freqüência trimestral ao invés de anual. A estrutura da árvore, por sua vez, é caracterizada com um tamanho de estágio mínimo de 1 ano. Essa incompatibilidade de freqüência exige uma adaptação na metodologia proposta por Kouwenberg.

O modelo VAR de reversão à média descrito anteriormente é utilizado como base para a geração da árvore propriamente dita. É necessário acrescentar um novo índice à notação do modelo econométrico. Define-se X_q^t como o vetor dos fatores de risco do trimestre q do estágio t, e dur(t) como a duração do estágio t em trimestres. X_0^t é o valor observável dos fatores de risco para o início do estágio t.

$$X_q^t = \mu + \alpha\left(X_{q-1}^t - \mu\right) + \varepsilon_q^t,\ \varepsilon_q^t \sim N(0,\Sigma)$$

O processo é iniciado com a previsão determinística do modelo estocástico descrito. São computadas as previsões das variáveis econômicas para o primeiro trimestre (q = 1) do primeiro estágio (t = 1).

$$X_q^t = \mu + \alpha\left(X_{q-1}^t - \mu\right),\ \forall q = 1,\ldots,dur(t)$$

O retorno das ações, ou seja, a variação percentual do índice Ibovespa, pode ser utilizado como exemplo para demonstrar as etapas do processo de geração de cenários em árvore. Estas etapas são igualmente aplicadas para os outros fatores do modelo VAR.

Calculando os fatores de risco, o retorno determinístico das ações no primeiro estágio é dado por:

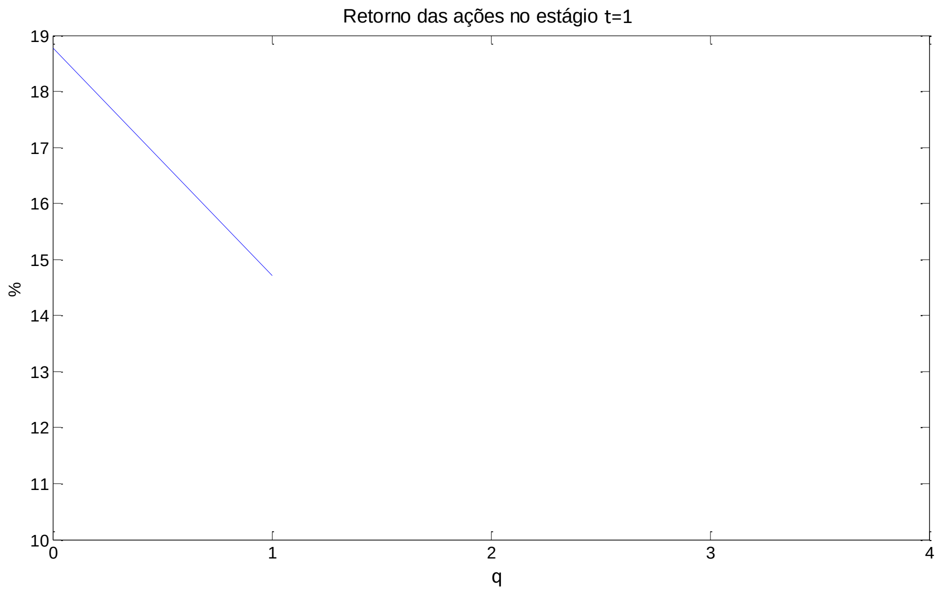

Figura 11. Previsão determinística para os retornos das ações

Observa-se a tendência de queda na rentabilidade média da renda variável, pois o último dado histórico (18,77%), utilizado no instante q = 0 da previsão, é maior do que a média μ escolhida (14,00%). É esperado que, no longo prazo, o retorno das ações convirja para a média.

A componente de incerteza é incluída somando um resíduo normalmente distribuído, com média nula e matriz de variâncias e covariâncias Σ, aos valores determinísticos calculados. Na prática, isto é feito através da geração de valores aleatórios com distribuição N(0, Σ) para os resíduos. A notação utilizada para estes resíduos é:

$$\varepsilon_q^t(i) \sim N(0, \Sigma),\ i = 1, \ldots, N_t$$

Onde N_t é o número de nós do estágio t.

Esta geração é feita através de valores antitéticos para a previsão um passo a frente dos fatores de risco. Os N_t / 2 primeiros valores são gerados aleatoriamente utilizando a distribuição dos resíduos. A segunda metade é computada como os mesmos valores da primeira com sinais trocados (valores antitéticos). Esta técnica garante que todos os momentos centrais ímpares (média, simetria,...) da amostra sejam iguais aos da distribuição contínua original. É necessário que o número de realizações condicionais seja par.

$$\varepsilon_q^t\left(i+\frac{N_t}{2}\right)=-\varepsilon_q^t(i)$$

No primeiro estágio, por exemplo, 10 ramos estão condicionados ao nó raiz. Os cinco primeiros valores de ε são gerados aleatoriamente e os últimos cinco são computados como valores antitéticos dos primeiros.

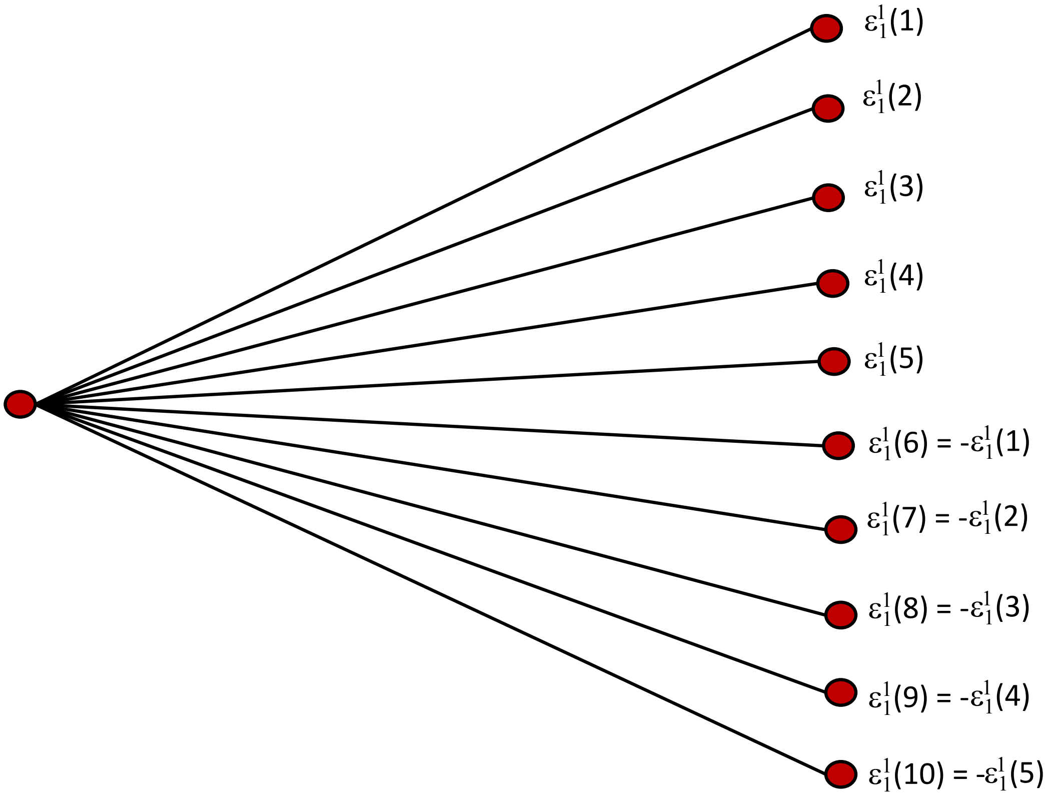

Figura 12. Valores antitéticos

A simulação estocástica com valores antitéticos garante o ajuste da média e da simetria, no entanto esta técnica não garante um ajuste de variância de cada uma das cinco componentes de ε. A notação destas componentes é dada por:

$$\varepsilon_q^t(i) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1q}^t(i) \\ \varepsilon_{2q}^t(i) \\ \varepsilon_{3q}^t(i) \\ \varepsilon_{4q}^t(i) \\ \varepsilon_{5q}^t(i) \end{bmatrix}$$

Se uma variável aleatória $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$ for multiplicada por um coeficiente γ, a média será mantida e a variância multiplicada por γ^2. Sendo assim, existe um único multiplicador γ que ajusta a variância amostral de cada variável do modelo VAR.

$$\gamma_{jq}^t = \frac{\sigma_j}{desvio\ \ padrão(\varepsilon_{jq}^t(.))} = \frac{\sigma_j}{\sqrt{\frac{1}{N_t}.\sum_{i=1}^{N_t}\left(\varepsilon_{jq}^t(i)\right)^2}}$$

Onde σ_j é a j-ésima componente da diagonal de Σ.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \sigma_3^2 & & \\ & & & \sigma_4^2 & \\ & & & & \sigma_5^2 \end{bmatrix}$$

Multiplicando os resíduos por γ são computados os erros ajustados que serão usados no cálculo dos fatores de risco no trimestre q = 1 do estágio t = 1.

$$\eta_{jq}^t(i) = \gamma_{jq}^t * \varepsilon_{jq}^t(i),\ \forall j = 1,\ 2\ ,3,\ 4\ e\ 5$$

As previsões estocásticas dos fatores são feitas somando os erros ajustados aos valores determinísticos. São computados os valores X para t = 1 e q = 1.

$$X_q^t = \mu + \alpha\left(X_{q-1}^t - \mu\right) + \eta_q^t$$

O exemplo do retorno das ações para o primeiro trimestre do primeiro estágio na figura abaixo retrata a inclusão de incerteza na previsão determinística. São computadas 10 realizações condicionadas ao nó raiz.

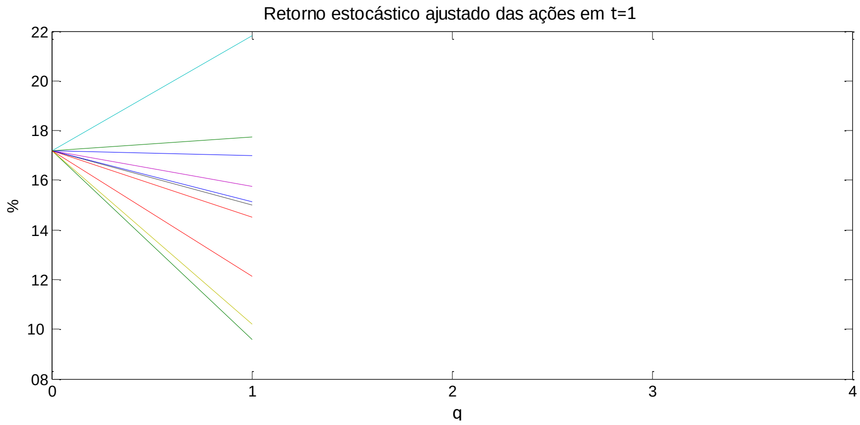

Figura 13. Previsões estocásticas para os retornos das ações

Tendo computado os fatores de risco em q = 1, é possível fazer a previsão determinística para q = 2 e recomeçar a metodologia para o segundo trimestre do primeiro estágio. O processo é completado para o primeiro estágio computando os coeficientes estocásticos para os trimestres restantes. Formam-se assim, dez cenários de rentabilidades para o primeiro estágio.

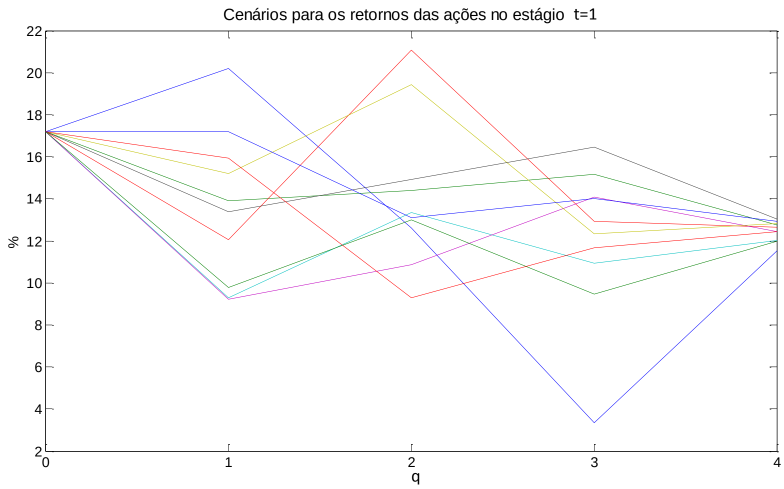

Figura 14. Cenários para os retornos das ações

A inicialização do processo para t = 2 é feita usando as rentabilidades do último trimestre de t = 1 como os "nós raízes" do segundo estágio. Para t = 1 temos a seguinte formulação:

$$X_0^{t+1} = X_{dur(t)}^{t}$$

A metodologia é repetida para os estágios t = 2, 3, 4, e 5 obtendo, respectivamente, 6, 6, 4 e 4 cenários para cada nó inicial X_0^t do estágio t.