2
Modelo de Programação Estocástica

2.1.
Conceitos básicos

A programação estocástica (PE) é definida como um modelo de otimização que apresenta um ou mais parâmetros estocásticos chamados de fatores de risco. O objetivo é encontrar uma solução ótima dadas todas as possíveis realizações desses fatores.

A classe de modelos de PE considerada como a mais importante dentro do ALM são os modelos de recurso. Um modelo de recurso é aquele em que uma decisão de primeiro estágio é tomada sem o conhecimento dos valores futuros dos fatores de risco e, em seguida, uma decisão de recurso é efetuada dependendo da realização obtida. No ALM isso ocorre, por exemplo, quando é escolhida uma carteira de alto risco que nos piores cenários é incapaz de pagar todos os benefícios futuros. A decisão de recurso neste caso é a tomada de um empréstimo que, por sua vez, terá um custo de captação.

Um modelo de recurso de dois estágios é caracterizado pelo primeiro estágio onde se tomam decisões sem saber o valor futuro dos fatores de risco no futuro e pelo segundo onde as decisões de recurso são tomadas tendo toda a informação necessária. Para esse tipo de problema temos a seguinte formulação:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = c'.x + E\left[f\left(x,\theta\right)\right] \\
s.a \quad & A.x = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Onde a f(x,θ) é a função de segundo estágio dada por:

$$
\begin{aligned}
f(x,\theta) = \min \quad & d'.y(\theta) \\
s.a \quad & W(\theta).y(\theta) = \theta - T(\theta).x \\
& y(\theta) \geq 0
\end{aligned}
$$

Nesta formulação x representa as decisões de primeiro estágio e y(θ) as decisões de recurso. A variável y(θ) é dependente do conjunto de valores dos fatores de risco θ. A matriz A é a de coeficientes determinísticos e as matrizes W e T dos estocásticos, sendo x e y variáveis não-negativas.

O problema apresentado pode ser reescrito como uma otimização linear única:

$$
\begin{array}{lllll}
\min & z = c'.x + \sum_{i=1}^{Q} p_i.d'.y_i & & & \\
s.a & A.x & & & = b \\
 & T_1.x + W_1.y_1 & & & = r_1 \\
 & \vdots & \ddots & & \\
 & T_Q.x + & & +W_Q.y_Q & = r_Q \\
 & & x, y_1, \ldots, y_Q \geq 0 & &
\end{array}
$$

Onde r_i = realização de θ e $p_i = P(\theta = r_i)$, ∀ i = 1, ... , Q

Uma programação estocástica de dois estágios é representada por um vetor x de solução inicial a priori e um vetor y(θ) de ajuste a posteriori, onde os acontecimentos futuros θ já são conhecidos. No caso multi-estágio, os acontecimentos futuros θ são revelados progressivamente de forma que haja um vetor de ajuste para cada novo estágio do problema.

$$\theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_{E-1}\}$$

$$y(\theta) = \{y(\theta_1), \ldots, y(\theta_{E-1})\},$$

Onde E é o número de estágios do problema.

Além disso, a formulação apresentada pode ser classificada como uma programação estocástica linear, já que sua função objetivo e suas restrições são funções lineares das variáveis do problema. A utilização de uma abordagem linear viabiliza a solução de problemas de grande porte, em termos de número de variáveis e restrições.

Utilizando uma abordagem linear multi-estágio, muitos artigos desenvolvem modelos de ALM com programação estocástica para fundos de pensão. Nestes trabalhos, formas diferentes de modelagem são utilizadas para representar a realidade do fundo e da economia como um todo.

2.2.
Revisão da literatura

Os artigos dedicados à descrição dos modelos de ALM com programação estocástica apresentam algumas características que diferenciam o tipo de modelagem adotada: o horizonte de planejamento, a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições.

A escolha do horizonte de planejamento depende da aplicação do modelo ALM. Horizonte de médio prazo se relaciona a aplicações para bancos, como Kusy e Ziemba (1986), ou seguradoras, como Cariño e Ziemba (1998). Horizontes de longo prazo, por sua vez, são escolhidos para modelos aplicados aos fundos de pensão como Dert (1998), Drijver, Haneveld e Vlerk (2000), Kouwenberg (2001) e Koivu, Pennanen e Ranne (2004).

No caso dos modelos aplicados aos fundos de pensão, a função objetivo apresenta duas linhas claras de modelagem: A primeira, Kusy e Ziemba (1986), Cariño e Ziemba (1998) e Koivu, Pennanen e Ranne (2004) maximizam a riqueza (ou lucro) esperada ao final do horizonte. Especificamente para os fundos de pensão, instituições sem fins lucrativos, maximizar o lucro é equivalente a minimizar as contribuições pagas. A minimização do conhecido “cost of funding” é adotada por Dert (1998), Drijver, Haneveld e Vlerk (2000) e Kouwenberg (2001). As duas linhas de modelagem da função objetivo têm como variáveis de decisão a política de investimento dos ativos, no entanto para a segunda linha são acrescidas variáveis relacionadas à política de contribuições do fundo.

Duas restrições básicas são usadas em todos os modelos ALM via programação estocástica. A primeira delas trata da conservação de riqueza de cada investimento, ou seja, o valor de cada investimento cresce com sua rentabilidade e varia de acordo com as transações realizadas. A segunda é o balanço de caixa, isto é, a soma das entradas de caixa (venda de ativos, contribuições, dividendos,...) deve ser igual à soma das saídas (compra de ativos, benefícios, custos de transação,...).

Limites na alocação e na política de contribuições também são bastante comuns nos artigos da literatura. Além de adotarem estes limites, Dert (1998), Drijver, Haneveld e Vlerk (2000), Kouwenberg (2001) e Koivu, Pennanen e Ranne (2004) utilizam equações para modelar o estado de solvência da instituição. Dert (1998), Drijver, Haneveld e Vlerk (2000) utilizam uma "chance constraint" para impor um limite máximo de probabilidade de insolvência. Sendo assim, o problema é transformado numa programação estocástica multi-estágio mista inteira, isto é, variáveis binárias são incluídas para contar os cenários que caracterizam insolvência.

Duas críticas podem ser feitas aos trabalhos citados no parágrafo anterior. Primeiramente, o esforço computacional de uma programação inteira é muito maior, além de só permitir a escolha de um limite superior para a probabilidade de insolvência. A segunda diz respeito ao cálculo da reserva técnica (RT). Dert (1998), Drijver, Haneveld e Vlerk (2000) e Kouwenberg (2001) fazem esse cálculo usando a taxa de desconto atuarial determinada por lei. Koivu, Pennanen e Ranne (2004), por sua vez, usam a denominada "technical interest rate" calculada como uma proporção das rentabilidades dos ativos dependente do nível de solvência do fundo. Esta proporção é estimada externamente já que o nível de solvência é uma variável de decisão obtida a posteriori. Todas essas modelagens não utilizam a taxa de desconto adequada.

Segundo Veiga (2003), o cálculo da reserva técnica deve considerar a rentabilidade de carteira como taxa de desconto para representar corretamente o custo de oportunidade do fundo. A escolha de uma taxa de desconto fixa independente da política de investimentos pode ser interpretada como uma aproximação do portfólio por um único contrato de renda fixa sem risco. Esta aproximação é adotada devido a uma dependência circular de algumas variáveis aleatórias que devem ser conhecidas a priori com outras obtidas a partir da reposta do modelo. A reserva matemática, que representa um parâmetro inicial do modelo de PE, é função da rentabilidade da carteira que, por sua vez, é calculada a partir da alocação ótima obtida como solução do modelo de PE. No entanto, a alocação ótima depende do conhecimento prévio da reserva matemática. Por isso, a escolha de uma taxa de desconto fixa torna possível o cálculo de um valor aproximado a priori da reserva matemática. Este valor pode ser subestimado ou superestimado dependendo do valor da taxa escolhida.

Outra crítica importante aos trabalhos citados é a ausência de uma medida do risco de equilíbrio (insolvência) dos fundos de pensão. Nesses artigos, o risco de insolvência pode ser aproximado pela probabilidade de uma riqueza final negativa ou por um patrimônio menor que a RT calculada com uma taxa de desconto fixa. Entretanto, as duas formas não representam a verdadeira probabilidade de insolvência do fundo.

A medida do risco de equilíbrio é incluída no presente trabalho de forma inovadora. Os fluxos reais do passivo (até a extinção do fundo) são descontados pela rentabilidade da carteira, ou seja, considerando o real custo de oportunidade da instituição. A distribuição de probabilidades desta rentabilidade é aproximada pelas observações contidas no horizonte de planejamento. Para efeitos de comparação, calcula-se também a reserva técnica com a taxa de desconto determinada pela legislação brasileira (IGP-M+6%) - como é feito nos artigos da literatura.

2.3. Modelo proposto

O modelo desenvolvido neste artigo utiliza uma programação linear estocástica multi-estágio para a gestão de ativos e passivos de fundos de pensão brasileiros, em especial os de grande porte. São contempladas 4 classes de ativos: 1- ações, 2- imóveis, 3- renda fixa e 4- caixa. São incluídas considerações de liquidez, custos de transação, empréstimos, além das restrições de balanço, de inventário de ativos e de regulação (relativas à legislação brasileira).

A definição da notação, das variáveis e dos parâmetros é o próximo passo para a descrição do modelo de PE. Define-se a notação N_t como o número de nós no estágio $t \in \{1,..., T\}$, e $n_t \in \{1,..., N_t\}$ representando um nó qualquer no mesmo instante.

Definição das *variáveis de decisão*

• $c_i(n_t)$ = valor (R$) comprado do ativo i no nó n_t

• $v_i(n_t)$ = valor (R$) vendido do ativo i no nó n_t

• $e(n_t)$ = empréstimo (R$) tomado no nó n_t

Definição das *variáveis de estado*

• $a_i(n_t)$ = valor (R$) alocado no ativo i no nó n_t

• $y(n_T)$ = max [0, riqueza no nó n_T menos requisito de capital]

• $w(n_T)$ = max [0, requisito de capital menos riqueza no nó n_T]

Definição dos *parâmetros determinísticos*

• pe = penalização por uma riqueza final menor que o requisito de capital

• bo = bonificação por uma riqueza final maior que o requisito de capital

• sp = spread da taxa de empréstimo sobre o juros

• ma = percentual máximo de ações no portfólio

• ct = custo de transação percentual

• cc_i = capacidade máxima de compra do ativo i

• cv_i = capacidade máxima de venda do ativo i

• $a_i(inicial)$ = valor (R$) alocado no ativo i antes da primeira decisão

• L^* = requisito de capital

Definição dos *parâmetros estocásticos* ou *fatores de risco*

• $l(n_t)$ = fluxo de caixa nominal do passivo no nó n_t

• $r_i(n_t)$ = retorno do ativo i entre os nós interligados n_{t-1} e n_t

2.4. Função objetivo

Existem duas formas de se representar a função objetivo de um fundo de pensão. A primeira delas é minimizar as contribuições do participante e do patrocinador, e a segunda é maximizar a utilidade esperada do patrimônio do fundo ao final do horizonte de estudos mantendo a política de contribuição constante. Intuitivamente pode-se dizer que estas são equivalentes, pois quanto mais dinheiro sobrando maiores seriam as reduções nas contribuições. Foi escolhida para esse trabalho a segunda opção já que, na prática, a política de contribuições não é uma variável que tenha flexibilidade de ser alterada pelo gestor a cada período.

Sendo assim, a função objetivo do modelo é maximizar a utilidade esperada da riqueza do fundo ao final do horizonte de estudos. Sabendo que os fundos de pensão são instituições sem fins lucrativos, fica claro que a escolha de uma função utilidade côncava que represente as preferências de um indivíduo avesso ao risco é a mais adequada. Devido a algoritmos de solução mais eficientes para o problema de otimização com muitas restrições e variáveis, e à facilidade de interpretação dos parâmetros, foi escolhida uma função utilidade linear por partes. A utilidade do fundo relacionada à riqueza em um nó terminal n_T é dada por:

$$u(riqueza(n_T)) = u(y(n_T), w(n_T)) = bo.y(n_T) - pe.w(n_T)$$

Sabendo que $y(n_T)$ e $w(n_T)$ representam respectivamente o quanto à riqueza final excede o requisito de capital (L^*) e o quanto falta para atingir o mesmo valor (L^*), é possível afirmar que a aversão ao risco do fundo de pensão é caracterizada pela escolha dos parâmetros pe e bo. A função de utilidade será côncava se pe > bo, pois assim o portfólio escolhido é menos arriscado evitando prejuízos nos cenários mais pessimistas. A Figura 5 exemplifica uma função utilidade linear por partes de um indivíduo avesso ao risco para um requisito de capital nulo ($L^* = 0$).

Figura 5. Função utilidade linear por partes

O valor da função objetivo é a utilidade esperada da riqueza ao final do horizonte de planejamento, ou seja, é a média das utilidades de todos os nós terminais.

$$E[u(riqueza)] = E[bo.y - pe.w]$$

Logo,

$$\max z = \sum_{n_T=1}^{N} p_{n_T} . [bo.y(n_T) - pe.w(n_T)]$$

Onde p_{n_T} é a probabilidade de ocorrência do nó terminal n_T

Neste trabalho, os exercícios de simulação consideram que os cenários são equiprováveis e que os parâmetros bo e pe são 1 e 2, respectivamente. Sendo assim, temos que $p_{n_T} = p$ e a função objetivo passa a ser:

$$\max z = \sum_{n_T=1}^{N} p.[y(n_T) - 2.w(n_T)]$$

2.5. Restrições

As relações importantes entre variáveis e parâmetros são expressas pelas restrições. Foram considerados quatro tipos de restrições para o modelo:

- Restrição de balanço
- Restrição de inventário de ativos
- Restrição de máximo de alocação em ações (regulatória)
- Restrição de liquidez

2.5.1. Restrição de balanço

Restrição de balanço para os primeiros estágios

A restrição de balanço determina de forma coerente a evolução da riqueza do fundo ao longo do tempo. O valor total dos ativos no instante t+1 será o valor total em t rentabilizado e, em seguida, subtraído das obrigações líquidas do fundo. As classes de ativos consideradas são: 1- ações; 2- imóveis; 3- renda fixa; 4- caixa. A restrição é expressa pela equação abaixo:

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(1+r_i(n_{t+1})\right).a_i(n_t)\right]+e(n_{t+1})-\left(1+\left(sp+r_3(n_{t+1})\right)\right).e(n_t)-l(n_t)-ct.\sum_{i=1}^{4}\left[c_i(n_{t+1})+v_i(n_{t+1})\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{A}\left[a_i(n_{t+1})\right], \qquad \forall (n_t,n_{t+1})\ interligados, \quad \forall t \in \{0,1,\ldots,T-2\}$$

O modelo considera que os fluxos de caixa do passivo são acumulados no final de cada período enquanto que os empréstimos são tomados no início e pagos no final. A Figura 6 ilustra a ordem cronológica dos desembolsos e outros fatos relevantes.

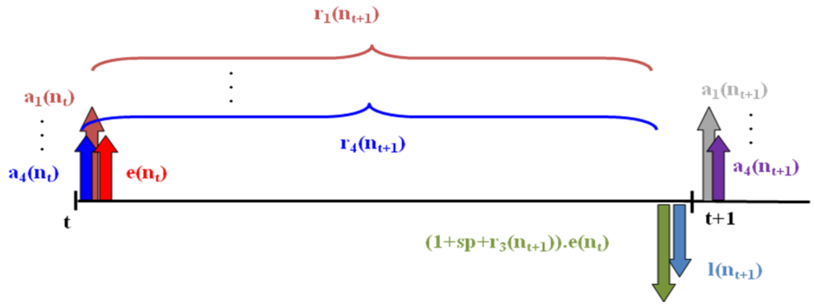

Figura 6. Fluxos relativos à restrição de balanço

Restrição de balanço para o último estágio

No último estágio a restrição de balanço apresenta uma modificação que define o superávit ou déficit ao final do horizonte. Se o valor dos ativos rentabilizado e descontado das obrigações do penúltimo período é positivo caracteriza-se um superávit, caso contrário um déficit.

$$\sum_{i=1}^{4}\left[\left(1+r_i\left(n_T\right)\right).a_i\left(n_{T-1}\right)\right]+e\left(n_T\right)-\left(1+\left(sp+r_3\left(n_T\right)\right)\right).e\left(n_{T-1}\right)-l\left(n_{T-1}\right)$$
$$=L^*+y\left(n_T\right)-w\left(n_T\right),\qquad \forall\left(n_{T-1},n_T\right)\ interligados$$

Se o lado esquerdo da equação for positivo logo o valor de $y(n_T)$ será maior que zero e $w(n_T)$ será nula. Da mesma forma se o lado esquerdo for negativo $w(n_T)$ será positiva e $y(n_T)$ será igual a zero.

2.5.2.
Restrição de inventário de ativos

A restrição de inventário de ativos especifica que o valor investido em um ativo em t+1 será o valor investido em t rentabilizado, somado as compras e subtraído as vendas do mesmo ativo em t+1. Esta restrição garante a conservação da riqueza de cada ativo individual e a coerência do valor alocado com as transações efetuadas.

$$a_i\left(n_{t+1}\right)=\left(1+r_i\left(n_{t+1}\right)\right).a_i\left(n_t\right)+c_i\left(n_{t+1}\right)-v_i\left(n_{t+1}\right),$$
$$\forall i=1,2\,e\,3;\ \ \forall t\in\left\{0,\ldots,T-2\right\}$$

É importante destacar que a classe de ativos “4- caixa” não é contemplada por essa equação pela ausência de custos de transação. Além disso, não faria sentido comprar ou vender “caixa”.

Nesta equação é de fácil percepção que a escolha do valor das variáveis de decisão $c_i(n_{t+1})$ e $v_i(n_{t+1})$ define completamente a variável de estado $a_i(n_{t+1})$, já que $a_i(n_t)$ do período anterior e as rentabilidades são conhecidos. Percebe-se também a necessidade de uma restrição de inventário de ativos para a primeira decisão.

$$a_i(n_0) - a_i(inicial) = c_i(n_0) - v_i(n_0), \forall i = 1,2 e 3$$

Nessa equação não é necessário a rentabilidade do ativo já que as alocações $a_i(n_0)$ e a_i(inicial) estão praticamente no mesmo instante de tempo como pode ser visto na Figura 7.

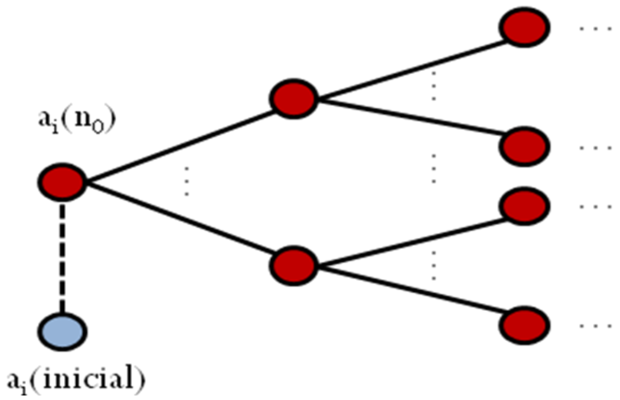

Figura 7. Alocação inicial

2.5.3.
Restrição de máximo de alocação em ações (regulatória)

A legislação brasileira determina que no máximo 50% da carteira de um fundo de pensão deve ser investimento em renda variável, com exceções aos casos de ações “hedgiadas” por opções. Para efeitos de simplificação não serão consideradas opções e conseqüentemente o limite de ma = 50% será rígido.

$$a_1(n_t) \leq ma.\sum_{i=1}^{4} a_i(n_t), \forall t = 0,...,T$$

2.5.4. Restrição de liquidez

A restrição de liquidez foi incluída para evitar que o gestor do fundo possa comprar ou vender uma quantidade de títulos maior que a capacidade do mercado. Esta restrição é de suma importância no contexto brasileiro já que os grandes fundos do país conseguem movimentar o mercado de preços com suas posições em carteira. As equações definem que o valor da variável de decisão de compra (venda) deve ser menor ou igual à capacidade de compra (venda) do mercado. Os parâmetros de capacidade de compra cc_i e o de venda cv_i não são observáveis diretamente, sendo assim escolhidos de acordo com a opinião e a sensibilidade do gestor do fundo. Para exercícios simulação as capacidades de compra e venda serão uma proporção da movimentação de títulos dos respectivos mercados.

$$c_i(n_t) \leq cc_i, \forall t = 0,\ldots,T, \forall i = 1,2e3$$
$$v_i(n_t) \leq cv_i, \forall t = 0,\ldots,T, \forall i = 1,2e3$$