



Davi Michel Valladão

**Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para
Fundo de Pensão Via Programação Estocástica
Multi-Estágio e Bootstrap**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Mestre pelo Programa
de Pós-Graduação em Atuária da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho

Rio de Janeiro

Abril de 2008



Davi Michel Valladão

**Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para
Fundo de Pensão Via Programação Estocástica
Multi-Estágio e Bootstrap**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Atuária da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Álvaro de Lima Veiga Filho

Orientador e Presidente
Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Luciano Vereda Oliveira

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais - PUC-Rio

Prof. Hélio Cortes Vieira Lopes

Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Roberto Westenberger

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais - PUC-Rio

Prof. Nizar Messari

Coordenador Setorial do Centro de Ciências Sociais - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Davi Michel Valladão

Graduou-se em Engenharia de Produção e Engenharia Elétrica com ênfase em Sistemas de Apoio à Decisão (SAD) em 2005.

Ficha Catalográfica

Valladão, Davi Michel

Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap / Davi Michel Valladão ; orientador: Álvaro de Lima Veiga Filho. – 2008.

98 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Gestão de riscos financeiros e atuariais - Teses. 2. ALM. 3. Fundos de pensão. 4. Programação estocástica. 5. Risco de solvência. 6. Risco de equilíbrio. 7. Atuária. I. Veiga Filho, Álvaro de Lima. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais. III. Título.

CDD: 368.01

Agradecimentos

Ao professor Álvaro Veiga por me orientar e por oferecer-me importantes incentivos para o desenvolvimento deste trabalho.

A CAPES pela bolsa de estudos a mim concedida.

Aos membros da banca pelas críticas construtivas ao trabalho.

Ao IAPUC pelos incentivos à pesquisa, estrutura oferecida e pelo apoio financeiro para a apresentação do trabalho em congressos nacionais e internacionais.

Aos meus pais, José Ricardo Garcia Valladão e Marcia Michel Valladão, pelo apoio moral e financeiro.

À Ana Carolina Freire pelo apoio moral e técnico.

Resumo

Valladão, Davi Michel; Veiga Filho, Álvaro de Lima. **Alocação ótima e medida de risco de um ALM para fundo de pensão via programação estocástica multi-estágio e bootstrap.** Rio de Janeiro, 2008. 98p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Atuária, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Asset and Liability Management ou ALM pode ser definido como um processo gestão de ativos e passivos de forma coordenada com a finalidade de atingir os objetivos financeiros de uma organização. No caso dos fundos de pensão, o ALM consiste fundamentalmente na determinação da política ótima de investimentos. Esta deverá maximizar o capital acumulado através de contribuições dos participantes e do retorno dos investimentos ao mesmo tempo em que minimiza o risco do não cumprimento das obrigações do fundo. A aplicação de modelos de programação estocástica para problemas de ALM em fundos de pensão é dificultada pelos longos prazos envolvidos - a duração dos benefícios pode ultrapassar cem anos. No entanto, os modelos de programação estocástica propostos na literatura limitam o horizonte de planejamento a poucas décadas, ao final das quais é imposta uma restrição de capital mínimo com vistas a controlar o risco de equilíbrio relativo ao restante da vigência do fundo. Este trabalho propõe um novo método para incorporar o risco de equilíbrio na determinação do capital mínimo final do modelo de programação estocástica aplicado a um fundo de pensão no contexto brasileiro. No método proposto, o cálculo da probabilidade de insolvência leva em consideração que os benefícios futuros devem ser trazidos a valor presente pela rentabilidade futura da carteira, cuja distribuição de probabilidades é levantada através de um processo de reamostragem (bootstrap) dos cenários embutidos na solução do problema de programação estocástica. O método proposto permite evidenciar que a probabilidade de insolvência medida tradicionalmente utilizada subestima acentuadamente o risco de equilíbrio.

Palavras-chave

ALM; fundos de pensão; programação estocástica; risco de solvência; risco de equilíbrio

Abstract

Valladão, Davi Michel; Veiga Filho, Álvaro de Lima. **Optimum allocation and risk measure in an ALM model for a pension fund via multi-stage stochastic programming and bootstrap.** Rio de Janeiro, 2008. 98p. MSc. Dissertation – Actuarial Department, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Asset and Liability Management or ALM can be defined as a process of managing coordinately assets and liabilities in an attempt to achieve an organization's financial objectives. For instance, a pension fund ALM consists in determining the optimal investment policy which is the one that maximizes wealth accumulated by the contributions and minimizes the equilibrium risk defined as the insolvency probability, i.e., the probability that the fund won't be able to pay all benefits during the planning horizon. The use of stochastic programming models for ALM problems is more difficult because of the long planning horizon. However stochastic programming models are proposed in the literature reducing the planning horizon and including a chance constraint or an objective function penalization to control the equilibrium risk for the non-considered period. On this work, a new method for measuring and controlling the equilibrium risk is proposed determining capital requirement of a Brazilian pension fund for the non-considered period. This developed method considers the portfolio return as the discount rate of all net liability flows. The distribution of this discount rate conditioned on the optimal decisions is estimated by bootstrapping the portfolio return embedded on the stochastic programming solution. To sum up, this method shows that the usual insolvency probability of the previous models actually underestimates the pension fund's equilibrium risk.

Keywords

ALM; pension funds; stochastic programming; solvency risk; equilibrium risk

Sumário

1	Introdução	12
1.1.	Definição de ALM	12
1.2.	ALM para fundos de pensão	14
1.3.	Elementos de um ALM para fundos de pensão	16
2	Modelo de Programação Estocástica	23
2.1.	Conceitos básicos	23
2.2.	Revisão da literatura	25
2.3.	Modelo proposto	28
2.4.	Função objetivo	29
2.5.	Restrições	31
3	Modelo estocástico para os fatores de risco	35
3.1.	Conceitos básicos	35
3.2.	Revisão da literatura	36
3.3.	Modelo proposto	37
4	Método de geração de cenários em árvore	41
4.1.	Conceitos básicos	41
4.2.	Revisão da literatura	42
4.3.	Método proposto	43
5	Modelo financeiro para os ativos	51
5.1.	Premissas	51
5.2.	Geração de cenários em árvore para os ativos	53
6	Modelo financeiro para os passivos	56
6.1.	Premissas	56
6.2.	Geração de cenários em árvore para os passivos	61

7	Medição e controle do risco de equilíbrio	64
7.1.	Risco de equilíbrio e programação estocástica	64
7.2.	Medição do risco de equilíbrio via bootstrap	66
7.3.	Controle do risco de equilíbrio	69
8	Resultados	70
8.1.	Descrição dos exercícios	70
8.2.	Exercício 1	72
8.3.	Exercício 2	80
8.4.	Exercício 3	84
9	Conclusão	91
10	Referências bibliográficas	93
11	Apêndice A: Testes de diagnósticos e estimação	95

Lista de figuras

Figura 1. Árvore de decisão	17
Figura 2. Modelo de alocação dinâmica	18
Figura 3. Cenários independentes	20
Figura 4. Cenários em árvore	20
Figura 5. Função utilidade linear por partes	30
Figura 6. Fluxos relativos à restrição de balanço	31
Figura 7. Alocação inicial	33
Figura 8. CDI	39
Figura 9. Árvore genérica de decisão	41
Figura 10. Estrutura de árvore escolhida	44
Figura 11. Previsão determinística para os retornos das ações	46
Figura 12. Valores antitéticos	47
Figura 13. Previsões estocásticas para os retornos das ações	49
Figura 14. Cenários para os retornos das ações	49
Figura 15. Cenários para os retornos de todos os ativos	54
Figura 16. Cenários para os retornos de todos os ativos (zoom)	55
Figura 17. Cenários para os retornos em diferentes escalas	55
Figura 18. Fluxos reais determinísticos do passivo	61
Figura 19. Gerador de cenários em árvore para o passivo com estágios anuais	62
Figura 20. Gerador de cenários em árvore para o passivo genérico	62
Figura 21. Fluxos do passivo além do horizonte da PE	66
Figura 22. Ex. 1: Comparação das probabilidades para o caso 1	73
Figura 23. Ex. 1: Comparação das probabilidades para o caso 2	73
Figura 24. Ex. 1: Comparação das probabilidades para o caso 3	74
Figura 25. Ex. 1: Comparação das probabilidades para o caso 4	74
Figura 26. Ex. 1: Probabilidade de underfunding	75
Figura 27. Ex. 1: Probabilidade de underfunding (zoom)	76
Figura 28. Ex. 1: Probabilidade de insolvência	76
Figura 29. Ex. 1: Probabilidade de insolvência (zoom)	77

Figura 30. Ex. 1: Rentabilidade da carteira para o caso 1	78
Figura 31. Ex. 1: Rentabilidade da carteira para o caso 2	78
Figura 32. Ex. 1: Rentabilidade da carteira para o caso 3	79
Figura 33. Ex. 1: Rentabilidade da carteira para o caso 4	79
Figura 34. Ex. 2: Alocação inicial ótima para $c(0) = 2.7$ bi	80
Figura 35. Ex. 2: Alocação inicial ótima para $c(0) = 3.7$ bi	81
Figura 36. Ex. 2: Alocação inicial ótima para $c(0) = 4.1$ bi	81
Figura 37. Ex. 2: Alocação inicial ótima para $c(0) = 4.2$ bi	82
Figura 38. Ex. 2: Alocação inicial ótima para $c(0) = 4.4$ bi	82
Figura 39. Ex. 2: Alocação inicial ótima irrestrita para $c(0) = 3.7$ bi	83
Figura 40. Ex. 2: Alocação inicial ótima irrestrita para $c(0) = 4.4$ bi	83
Figura 41. Ex. 3: Alocação ótima esperada para o caso 1	84
Figura 42. Ex. 3: Alocação ótima esperada para o caso 3	85
Figura 43. Ex.3: Árvore de alocação para o caso 1	85
Figura 44. Ex.3: Árvore de alocação para o caso 3	86
Figura 45. Ex. 3: Distribuição da riqueza final real para o caso 1	86
Figura 46. Ex. 3: Distribuição da riqueza final real para o caso 3	87
Figura 47. Ex. 3: Distr. da rentabilidade real da carteira para o caso 1	87
Figura 48 Ex. 3: Distr. da rentabilidade real da carteira para o caso 3	88
Figura 49. Ex. 3: Distribuição da reserva matemática real par o caso 1	88
Figura 50. Ex. 3: Distribuição da reserva matemática real par o caso 3	89
Figura 51. Ex. 3: Distr. da probabilidade de insolvência para o caso 1	90
Figura 52. Ex. 3: Distr. da probabilidade de insolvência para o caso 3	90
Figura 53. Fluxograma geral do modelo de ALM proposto	91

Lista de tabelas

Tabela 1. Testes de raiz unitária	39
Tabela A 1. Testes de normalidade	95
Tabela A 2. Critérios para a escolha de defasagens	96
Tabela A 3. Teste LM	97
Tabela A 4. Matriz de variâncias e covariâncias dos resíduos (\square)	97
Tabela A 5. Estimação do modelo	98