

## 2 Fluxo em meios porosos não saturados

### 2.1. Meios porosos saturado e não saturado

O fluxo através de um meio poroso não-saturado é nada mais do que um caso especial de fluxo simultâneo de fluidos não miscíveis (BEAR, 1972). Para o caso mais comum em solos não saturados, esses fluidos são denominados molhante e não-molhante, sendo estes a água e o ar, respectivamente. Assim, o fluxo em um meio poroso não-saturado ocorre quando a água se movimenta através de um solo com grau de saturação ( $S$ ) inferior a 100% (com relação ao fluido molhante), com partes dos espaços vazios ocupados pelo ar, considerado aqui estagnado, isto é, que não se encontra em movimento. Na figura 2.1 são ilustradas as distribuições da pressão de água abaixo da superfície do solo.

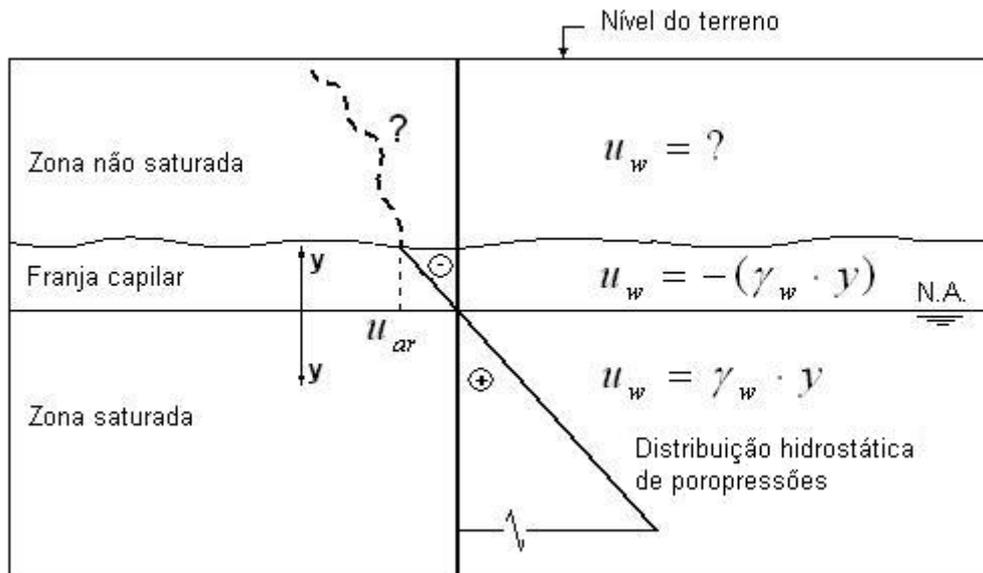


Figura 2.1 – Distribuição de poro-pressão típica em um horizonte de solo.

A zona saturada é a região na qual os vazios do solo estão totalmente preenchidos por água e a carga de pressão é positiva. A franja capilar, por sua vez, é a região de ascensão capilar na qual o solo ainda se encontra saturado, porém sujeito a uma carga de pressão negativa.

A zona não-saturada é a região na qual os vazios do solo são preenchidos por ar e água, também submetida a uma poropressão negativa. Nessa zona, a distribuição inicial de poropressões é incerta dependendo das características do meio poroso, sendo necessário para sua determinação medições em campo. A pressão  $u_{ar}$  indicada na Figura 2.1, é chamada pressão de entrada de ar; que caracteriza a interface entre a franja capilar e a zona não-saturada, surgindo assim uma propriedade própria dos solos não-saturados denominada sucção, definida pela diferença entre a pressão de entrada de ar ( $u_{ar}$ ) e a pressão da água ( $u_w$ ) nos vazios do solo, como definido pela equação abaixo.

$$sucção = u_{ar} - u_w \quad (2.1)$$

Com a diminuição do grau de saturação, os vazios maiores, responsáveis em grande parte pela condutividade hidráulica do meio poroso, são os primeiros a serem drenados, interrompendo o canal de fluxo, com o volume de água neles remanescente se concentrando sob forma de meniscos no contato com as partículas. A maior parte do fluxo se transfere para os vazios menores, diminuindo assim o coeficiente de permeabilidade do meio em até 100 mil vezes em relação ao seu valor na condição saturada. Para baixos teores de umidade ou altas sucções o coeficiente de permeabilidade pode ser tão pequeno que podem ser necessários gradientes hidráulicos elevados ou intervalos de tempo muito grandes para que seja possível detectar a ocorrência de fluxo no meio.

Se, por simplicidade for desconsiderado o valor da pressão de entrada de ar, a sucção seria então expressa apenas em função da pressão negativa de água nos vazios:

$$sucção = -u_w = -\gamma_w \cdot \psi \quad (2.2)$$

em que  $\gamma_w$  é o peso específico da água e  $\psi$  a carga de pressão. Note que como  $\psi < 0$ , então a sucção assume sempre um valor positivo, que se torna nulo quando a carga de pressão for maior ou igual a zero.

Nos solos não-saturados, as propriedades hidráulicas tais como a condutividade hidráulica ( $K$ ) e o teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) variam com as

mudanças da carga de pressão ( $\psi$ ) devido à presença de ar no meio poroso. A variação dessas propriedades pode ser representada pelas curvas características  $\theta = \theta(\psi)$ , chamada de curva de retenção de água ou curva característica de sucção, e  $K = K(\psi)$ , denominada curva de condutividade hidráulica.

## 2.2. Curva característica de sucção

O teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) é definido pela equação 2.3 como a razão entre o volume de água ( $V_w$ ) presente no interior do meio poroso e seu volume total  $V$ .

$$\theta = V_w / V \quad (2.3)$$

Nos solos não-saturados a sucção está relacionada com o teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) através da curva característica de sucção ou curva de retenção de água, ilustrada na figura 2.2, onde são exibidos três pontos de destaque.

O primeiro é constituído pelo valor da pressão de entrada de ar ( $u_{ar}$ ), que corresponde ao valor da sucção para a qual o ar começa penetrar nos poros de maior diâmetro no solo.

O segundo ponto é aquele correspondente ao teor de umidade volumétrica residual ( $\theta_r$ ) a partir do qual tem que se acrescentar em um grande valor à sucção para produzir pequenas variações na umidade volumétrica.

O terceiro, finalmente, corresponde ao teor de umidade volumétrica de saturação, teoricamente igual à porosidade do solo, já que neste ponto todos os vazios estão preenchidos pela água. Porém, como observado na figura 2.2, este ponto pode ser diferente nos processos de umedecimento ( $\theta'_s$ ) e de secagem ( $\theta_s$ ), sendo maior neste último. Esse tipo de comportamento está associado à não uniformidade dos poros, à presença de bolhas de ar que permanecem no solo durante o processo de umedecimento e a possíveis mudanças estruturais (Gerscovich, 1994; Reichardt e Timm, 2000).

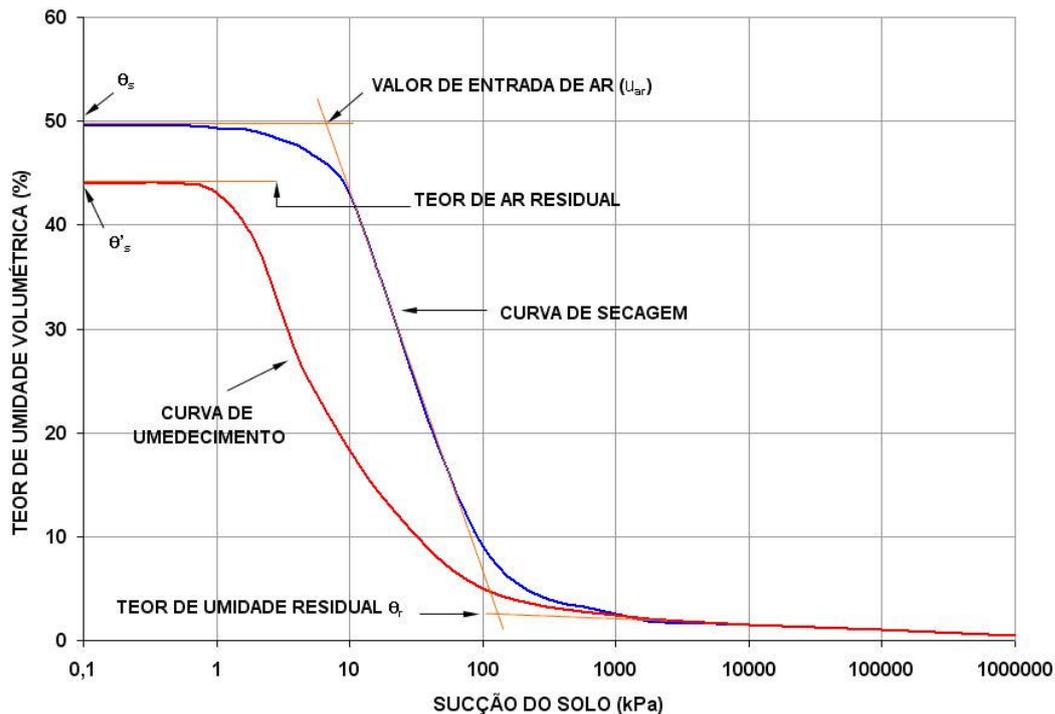


Figura 2.2 – Curva característica de retenção típica de um solo siltoso (Fredlund e Xing, 1994).

A curva característica de retenção pode ser determinada através de ensaios de laboratório ou aplicação de relações empíricas. As técnicas experimentais consagradas para a medição da sucção são as de papel filtro e da placa de sucção (diferenciando-se principalmente quanto ao nível de sucção aplicada), a partir das quais podem ser obtidos pontos da citada curva (Villar, 2002).

No método do papel filtro, padronizado pela norma ASTM D5298-92, o solo é colocado em contato com o papel filtro, de menor umidade, que absorve certa quantidade de água até que o sistema solo + papel entre em equilíbrio hidráulico. Dispondo-se da curva de calibração do papel, a sucção então pode ser determinada em função da quantidade de água do solo absorvida pelo papel.

A curva característica de sucção é muito afetada pela estrutura do solo, sendo indispensável a utilização de amostras indeformadas (Soares, 1999).

Quanto a relações empíricas, na literatura encontram-se as proposições sugeridas por van Genuchten (1980), Srivastava e Yeh (1991), Fredlund e Xing (1994), dentre outros.

Neste trabalho foram adotados para a representação da curva característica de retenção os modelos propostos por van Genuchten (1980) e por Srivastava e Yeh (1991), apresentados a seguir.

### 2.2.1. Modelo de Srivastava e Yeh (1991)

Srivastava e Yeh (1991) utilizaram a seguinte função exponencial para modelagem da curva característica de retenção em solos não saturados:

$$\theta(\psi) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)e^{\alpha_{exp}\psi} \quad (2.4)$$

na qual  $\theta_r$  é o teor de umidade volumétrica residual,  $\theta_s$  o teor de umidade volumétrica saturado,  $\psi$  a carga de pressão, e  $\alpha_{exp}$  é um parâmetro que varia de acordo com o tipo de solo e que representa a taxa de redução do teor de umidade volumétrica a medida que a carga de pressão diminui. O formato típico da curva de retenção de acordo com esta relação é apresentado na figura 2.3.

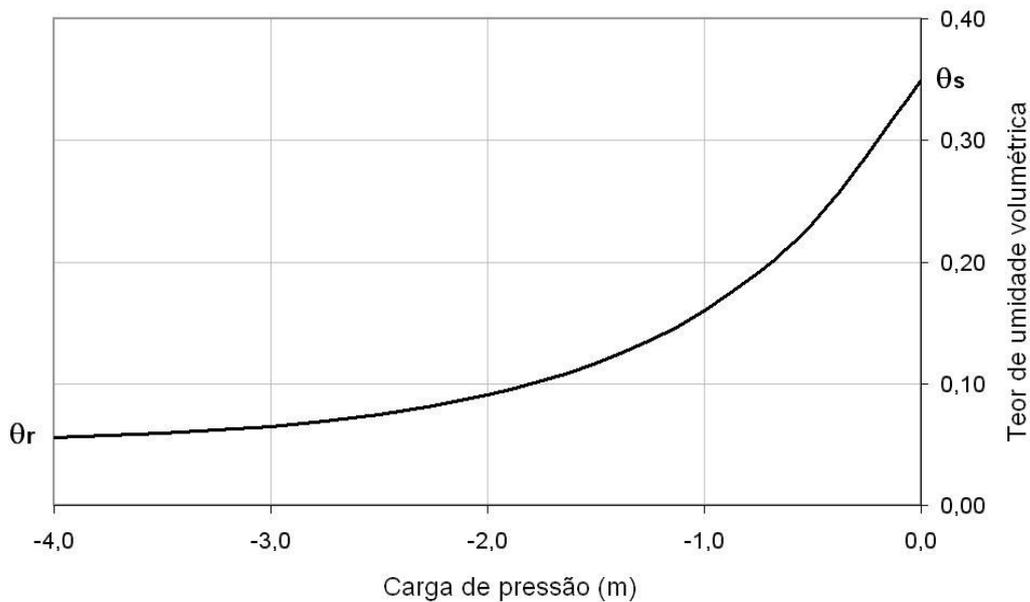


Figura 2.3 – Forma típica da curva característica de retenção conforme modelo exponencial.

Esse modelo apresenta um valor de capacidade de retenção específica

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \text{ diferente de zero para a situação de saturação a uma pressão nula.}$$

Em uma situação real, desprezando-se as variações de volume, isso não poderia acontecer. Assim, pode-se considerar que a aplicação do modelo de Srivastava e Yeh (1991) seria adequada para problemas que envolvam fluxo

somente na zona não-saturada. Cabe ainda ressaltar que esse modelo não é capaz de reproduzir a zona de ascensão capilar, caracterizada pela pressão de entrada de ar, e também não representa a histerese mostrada na figura 2.2 ( $\alpha_{exp}$  é o mesmo para ciclos de umedecimento ou de secagem).

### 2.2.2. Modelo de van Genuchten (1980)

A equação (2.5) foi proposta por van Genuchten (1980) para representação da relação entre o teor de umidade volumétrico e a carga de pressão em solos não-saturados,

$$\theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left[1 + (\alpha_{vg} |\psi|)^q\right]^p} \quad (2.5)$$

em que  $\alpha_{vg}$ ,  $p$  e  $q$  são parâmetros a serem ajustados de acordo com o tipo de solo. Valores de  $p$  e  $q$  são dependentes entre si, de acordo com a relação abaixo (van Genuchten, 1980):

$$p = 1 - \frac{1}{q} \quad (2.6)$$

Segundo Miller *et al* (1998) o parâmetro  $\alpha_{vg}$  está relacionado com a dimensão média dos poros e o parâmetro  $q$  com a uniformidade da distribuição dos poros de diferentes dimensões. O formato típico de uma curva de acordo com a equação (2.5) é ilustrado na figura 2.4.

Este modelo, ao contrário do anterior, apresenta uma capacidade de retenção nula para a condição de saturação e ainda é capaz de caracterizar a zona de ascensão capilar. Com essas características, o modelo de van Genuchten tornou-se o mais utilizado para simulação do comportamento hidráulico de solos não-saturados, tendo sido incorporados em vários softwares comerciais como o programa computacional PlaxFlow. Entretanto, este modelo também não considera a histerese observada entre processos de umedecimento e secagem.

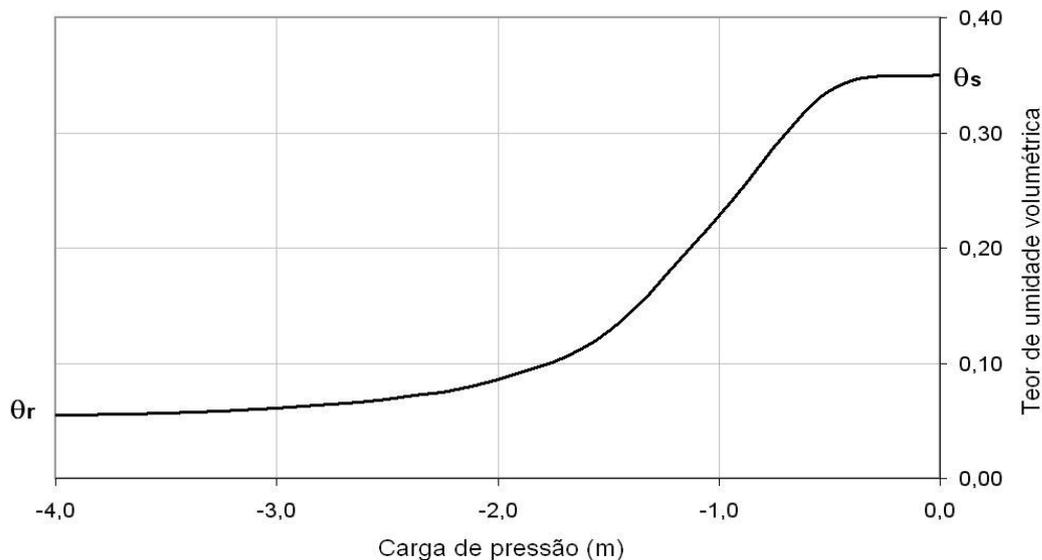


Figura 2.4 – Forma típica da curva característica de retenção de acordo com o modelo de van Genuchten (1980).

### 2.3. Curva de condutividade hidráulica

A outra curva característica na investigação do comportamento hidráulico de solos não-saturados se refere à que relaciona a permeabilidade com a carga de pressão.

Segundo Soares (1999), os métodos para a determinação da permeabilidade não saturada dos solos tanto em campo como no laboratório, podem ser divididos em duas categorias: Métodos de Regime Permanente (Permeâmetro de Guelph - campo) e Métodos de Regime Transiente (Método do perfil Instantâneo – campo e laboratório).

Porém esses métodos são muito difíceis de serem aplicados, geralmente devido a fenômenos de difusão do ar e em virtude das pequenas quantidades de fluxo medidas. Deste modo, pesquisadores propuseram métodos indiretos para a determinação da curva de condutividade hidráulica com base na curva característica de sucção, surgindo desta forma modelos estatísticos e modelos empíricos (Fredlund et al., 1994; van Genuchten, 1980; Srivastava e Yeh, 1991), dentre outros. Neste trabalho, foram novamente implementados os modelos propostos por van Genuchten (1980) e Srivastava e Yeh (1991), descritos a seguir.

### 2.3.1. Modelo de Srivastava e Yeh (1991)

Para a utilização desta formulação empírica é necessário conhecer-se diversos pontos da curva característica de sucção do solo não-saturado, bem como o valor da condutividade hidráulica na condição saturada.

O exponencial de Srivastava e Yeh (1991) para a curva de condutividade hidráulica consiste basicamente na equação (2.7), onde  $\alpha_{exp}$  representa o mesmo parâmetro empregado no ajuste da curva característica de sucção (equação 2.4) e  $K_s$  denota o valor da condutividade hidráulica saturada [ $LT^{-1}$ ].

$$K(\psi) = K_s e^{\alpha_{exp} \psi} \quad (2.7)$$

Uma forma esquemática da curva de condutividade hidráulica saturada – não saturada para o modelo exponencial é mostrada na figura 2.5.

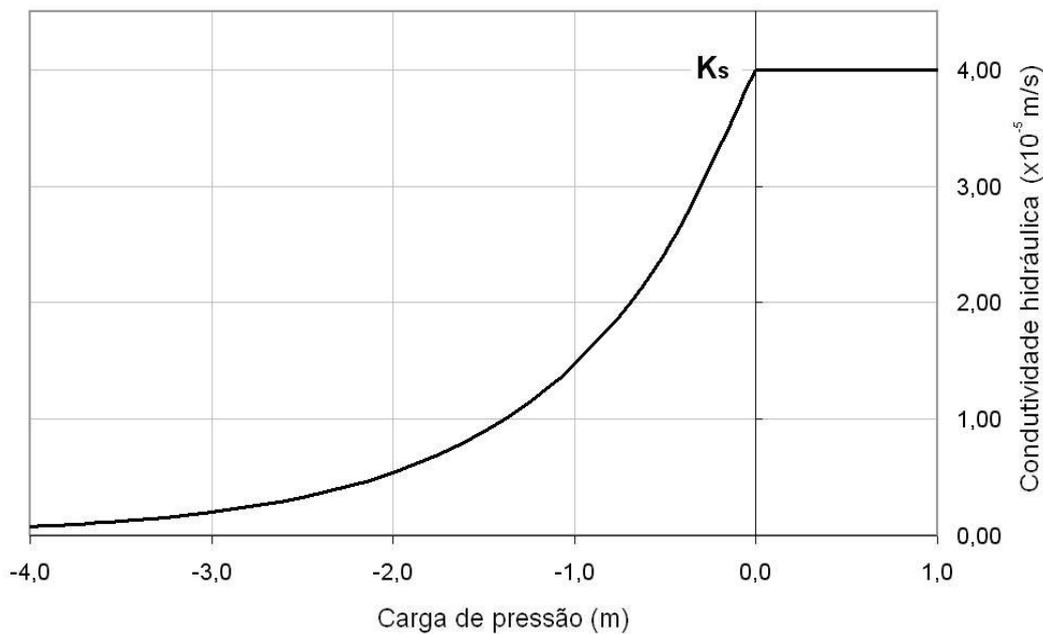


Figura 2.5 – Forma típica da curva da função de condutividade hidráulica para o modelo exponencial.

### 2.3.2. Modelo de van Genuchten (1980)

Dentre os modelos estatísticos utilizados para descrever a função de condutividade hidráulica, pode-se destacar o modelo proposto por Mualem (1976) baseado na dimensão e distribuição estatística dos vazios de um meio poroso. A partir deste modelo estatístico, van Genuchten (1980) propôs a seguinte formulação empírica para representação da função de condutividade hidráulica:

$$K(\theta) = K_s \cdot \theta_e^{1/2} \left( 1 - \left( 1 - \theta_e^{1/p} \right)^p \right)^2 \quad (2.8)$$

em que a umidade volumétrica relativa ( $\theta_e$ ) é definida por:

$$\theta_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\left[ 1 + (\alpha_{vg} |\psi|)^q \right]^p} \quad (2.9)$$

na qual  $p$ ,  $q$ , e  $\alpha_{vg}$ , são os mesmos parâmetros empregados nas equações (2.5) e (2.6) para estabelecimento da curva característica de sucção, sendo que  $\psi$  representa o valor da carga de pressão.

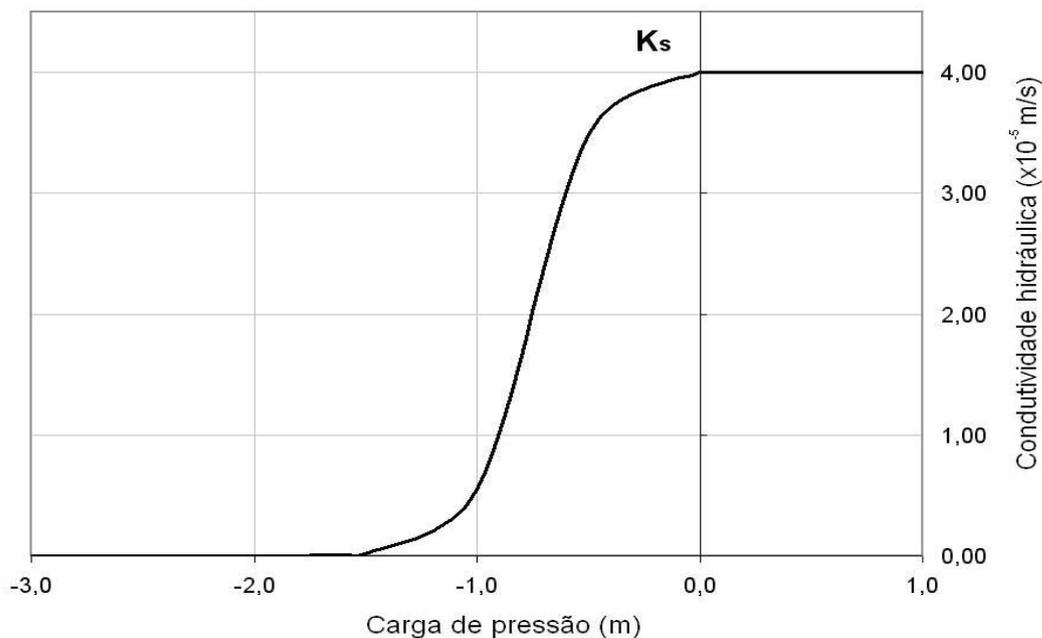


Figura 2.6 – Forma típica da curva da função de condutividade hidráulica para o modelo de van Genuchten (1980).

## 2.4.

### Equação governante do fluxo em meio poroso não-saturado

Considerando um volume elementar submetido a um fluxo de água nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como indicado na figura 2.6. A equação diferencial que governa o fluxo pode ser escrita como:

$$\nabla^T (\rho_w \cdot \bar{v}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\frac{\partial M_w}{\partial t} \quad (2.10)$$

em que  $\rho_w$  é a massa específica da água,  $\bar{v}$  é o vetor de velocidade superficial de fluxo e  $\nabla^T$  um operador diferencial que depende da dimensão do problema.

O termo do lado esquerdo da equação (2.10) representa o balanço de massa nas três direções cartesianas, enquanto que o termo do lado direito representa a taxa de variação no tempo da massa de água ( $M_w$ ) armazenada no volume elementar.

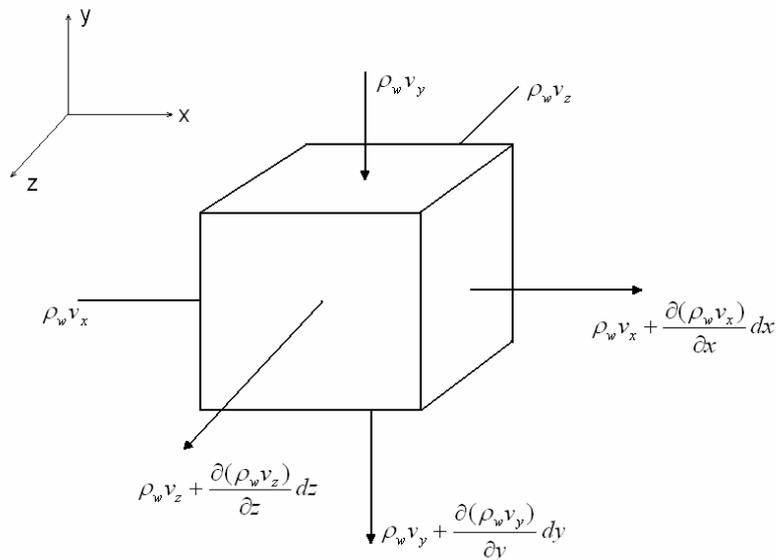


Figura 2.7 – Volume elementar sujeito a fluxo de água nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

A massa de água pode ser escrita em termos da massa específica ( $\rho_w$ ), do grau de saturação ( $S$ ), da porosidade do meio ( $n_e$ ) e do volume diferencial ( $dx \cdot dy \cdot dz$ ) como sendo:

$$M_w = \rho_w \cdot S \cdot n_e \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.11) na equação (2.10) e eliminando os termos comuns, chega-se em

$$\nabla^T (\rho_w \cdot \bar{v}) = - \frac{\partial (\rho_w \cdot S \cdot n_e)}{\partial t} \quad (2.12)$$

Observando-se que

$$\theta = n_e \cdot S \quad (2.13)$$

e considerando-se que o fluido e o meio são incompressíveis, então a equação 2.12 pode ser re-escrita como:

$$\nabla^T \bar{v} = - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.14)$$

Admitindo-se condições de fluxo laminar do fluido através do meio poroso, vem pela lei de Darcy:

$$\bar{v} = -\bar{K}(\psi) \cdot \nabla(z + \psi) \quad (2.15)$$

na qual  $\bar{K}(\psi)$  é a matriz da condutividade hidráulica, que para problemas de fluxo não-saturado depende da carga de pressão, e  $\nabla(z + \psi)$  é o vetor dos gradientes hidráulicos, observando-se que  $z$  e  $\psi$  são, respectivamente, as cargas de elevação e de pressão no ponto considerado.

Substituindo a equação 2.15 na equação 2.14 resulta em:

$$\nabla^T [\bar{K}(\psi)\bar{e} + \bar{K}(\psi)\nabla\psi] = \frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} \quad (2.16)$$

em que  $\bar{e}$  é um vetor unitário na direção da aceleração da gravidade ( $z$ ).

Tendo em vista que na equação (2.16) o teor de umidade volumétrico é função da carga de pressão (curva de retenção):

$$\theta = \theta(\psi) \quad (2.17)$$

aplica-se a regra da cadeia na obtenção da derivada em relação ao tempo do lado direito da equação (2.16),

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.18)$$

Introduzindo-se a capacidade de retenção específica ( $C(\psi)$ ) definida pela relação:

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \quad (2.19)$$

obtem-se da equação (2.18),

$$\frac{\partial \theta(\psi)}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.20)$$

Substituindo-se finalmente a equação (2.20) em (2.16) a equação governante do fluxo em meio poroso não-saturado pode ser escrita como:

$$\nabla^T [\bar{K}(\psi)\bar{e} + \bar{K}(\psi)\nabla \psi] = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.21)$$

Esta equação (2.21) é conhecida como equação de Richards, classificada como equação diferencial parcial de segunda ordem não-linear. A não linearidade surge devido à variação da condutividade hidráulica do meio poroso em função dos valores da carga de pressão.

Na formulação apresentada, o efeito da fase do ar no movimento da água foi desconsiderado, simplificando-se o problema. O caso mais geral seria o de fluxo bifásico água-ar, onde os movimentos de ambas as fases, e conseqüentemente sua interação, devem ser considerados simultaneamente (Nielsen et al., 1986).

A solução da equação de Richards deverá atender às condições de contorno que podem ser expressas em termos de carga de pressão prescrita (condição de Dirichlet):

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \bar{\psi} \text{ em } \Gamma_1 \quad (2.22)$$

ou em fluxo prescrito (condição de Newman):

$$n^T \left[ \bar{K}(\psi) \bar{e} + \bar{K}(\psi) \nabla \psi \right] = \bar{v} \text{ em } \Gamma_2 \quad (2.23)$$

na qual  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  define o contorno do domínio ( $\Omega$ ) do problema.

A solução da equação (2.21) deverá, ainda, atender à condição inicial do problema:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \bar{\psi}_0(\mathbf{x}) \quad (2.24)$$

Observe finalmente que para a solução numérica da equação (2.21) é necessária a determinação das curvas características  $K = K(\psi)$  e  $\theta = \theta(\psi)$  que, como foi destacado anteriormente, são propriedades intrínsecas do material para um determinado fluido.

## 2.5. Solução numérica da equação de Richards pelo método dos elementos finitos

A equação de Richards (equação 2.21) apresenta uma grande não-linearidade, já que tanto a condutividade hidráulica ( $K$ ) quanto a capacidade de retenção específica ( $C$ ) são funções da carga de pressão ( $\psi$ ), variável que se busca determinar (Miqueletto 2007).

Não existindo soluções analíticas da equação para análise de problemas com geometrias complexas, as aproximações numéricas são as mais recomendadas para este tipo de problema. Dentre os métodos numéricos mais utilizados podem ser citados o Método das Diferencias Finitas (MDF) e o método dos Elementos Finitos (MEF).

Para a solução aproximada da equação de Richards foi adotado neste trabalho o Método dos Elementos Finitos (MEF), onde o contínuo ( $\Omega$ ) é dividido em elementos ( $\Omega_e$ ), que se encontram ligados entre si através de nós distribuídos aos longo de seus contornos.

Considerando-se  $\psi^*$  uma solução aproximada de  $\psi$  no domínio do elemento ( $\Omega_e$ ), a equação 2.21 pode ser escrita como:

$$\nabla^T [\bar{K}(\psi)\bar{e} + \bar{K}(\psi)\nabla(\psi^*)] - C(\psi) \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = R(\psi^*) \quad (2.25)$$

em que  $R(\psi^*)$  representa o resíduo da solução aproximada.

A solução aproximada de  $\psi$  no domínio do elemento ( $\Omega_e$ ) é usualmente escrita no método dos elementos finitos considerando-se:

$$\psi^* = N \cdot \bar{\psi} \quad (2.26)$$

na qual  $N$  denota a matriz das funções de interpolação, definidas em função do tipo de elemento finito adotado, e  $\bar{\psi}$  representa o vetor das cargas de pressão nodais.

Assim, re-escreve-se a equação (2.25) como:

$$\nabla^T [\bar{K}(\psi)\bar{e} + \bar{K}(\psi)\nabla(N \cdot \bar{\psi})] - C(\psi) \cdot N \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = R(\psi^*) \quad (2.27)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados (Huyakorn e Pinder, 1983), a minimização do resíduo  $R(\psi^*)$  é obtida através da introdução de funções de ponderação que, no método de Galerkin, são as próprias funções de interpolação  $N$ .

$$\int_{\Omega_e} N^T \{ \nabla^T [\bar{K}(\psi)\bar{e} + \bar{K}(\psi)\nabla(N \cdot \bar{\psi})] - C(\psi) \cdot N \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \} d\Omega_e = 0 \quad (2.28)$$

Integrando-se por partes os dois primeiros termos de equação 2.28 vem:

$$\int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T \cdot [\bar{K}(\psi) \cdot \nabla(N \cdot \bar{\psi})] \cdot d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} (\nabla N)^T \cdot \bar{K}(\psi) \cdot \nabla(N \cdot \bar{\psi}) \cdot d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(\psi) \bar{e}] \cdot d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} (\nabla N^T) \cdot \bar{K}(\psi) \cdot \bar{e} \cdot d\Omega_e - \int_{\Omega_e} N^T \cdot C(\psi) \cdot N \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \cdot d\Omega_e = 0 \quad (2.29)$$

na qual  $\Gamma_e$  representa o contorno do elemento e  $\bar{n}$  o vetor unitário externo, normal ao contorno.

Considerando-se

$$\nabla N = B \quad (2.30)$$

e agrupando-se os termos, resulta:

$$\int_{\Omega_e} B^T \cdot \bar{K}(\psi) \cdot B \cdot d\Omega_e \cdot \bar{\psi} + \int_{\Omega_e} N^T \cdot C(\psi) \cdot N \cdot d\Omega_e \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(\psi) \bar{e} + \bar{K}(\psi) \cdot B \cdot \bar{\psi}] \cdot d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} B^T \cdot \bar{K}(\psi) \cdot \bar{e} \cdot d\Omega_e \quad (2.31)$$

que é a solução aproximada da equação de Richards pelo método dos elementos finitos. Esta equação, para efeitos de simplificação, pode ser definida como, a nível do elemento finito:

$$\bar{H} \cdot \bar{\psi} + \bar{F} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} = \bar{Q} - \bar{Q}' \quad (2.32)$$

Com a matriz de fluxo

$$\bar{H} = \int_{\Omega_e} B^T \cdot \bar{K}(\psi) \cdot B \cdot d\Omega_e \quad (2.33)$$

o vetor de vazão nodal equivalente ao fluxo prescrito na face do elemento,

$$\bar{Q} = \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(\psi) \bar{e} + \bar{K}(\psi) \cdot B \cdot \bar{\psi}] \cdot d\Gamma_e \quad (2.34)$$

o vetor de vazão nodal equivalente relacionado aos efeitos gravitacionais (carga de elevação),

$$\bar{Q}^i = \int_{\Omega_e} B^T \cdot \bar{K}(\psi) \cdot \bar{e} \cdot d\Omega_e \quad (2.35)$$

e a matriz de capacidade de retenção que traduz as variações do teor de umidade em relação à poropressão em cada elemento.

$$\bar{F} = \int_{\Omega_e} N^T \cdot C(\psi) \cdot N \cdot d\Omega_e \quad (2.36)$$

Celia et al. (1990) observaram que os resultados do MEF apresentam oscilações na previsão da carga de pressão, concluindo que a diagonalização da matriz  $\bar{F}$  (equação (2.36)) é condição necessária e suficiente para a eliminação desse problema. Atribuíram esse comportamento oscilatório ao fato de que no MEF as derivadas no tempo são distribuídas espacialmente quando se considera a formulação da matriz consistente, ou seja, quando as mesmas funções de interpolação são usadas para a construção de todas as matrizes e vetores da formulação numérica.

Fisicamente, a diagonalização representa que a propriedade relativa à capacidade de retenção não está mais distribuída nos elementos, mas concentrada em seus nós, resultando em uma matriz diagonal (“lumping”).

Neste trabalho adotou-se o seguinte esquema de diagonalização da matriz  $\bar{F}$  proposto por Milly (1985), expresso pela equação (2.37).

$$\bar{F} = \delta_{i,j} \cdot C_i(\psi) \cdot \int_{\Omega_e} N_i \cdot d\Omega_e \quad (2.37)$$

em que  $\delta_{i,j}$  é o delta de Kroenecker,  $C_i(\psi)$  é a capacidade de retenção específica do nó  $i$  e  $N_i$  representa as funções de interpolação associadas ao grau de liberdade  $i$ .