

## 2 Fluxo em Meios Saturado e Não Saturados

Neste capítulo apresenta-se os principais aspectos da formulação utilizada para a modelagem de fluxo saturado e não saturado, bem como a metodologia empregada na solução da equação governante e as propriedades hidráulicas características dos solos.

### 2.1 Equação de Fluxo

Considerando um cubo elementar submetido a um fluxo de água nas direções x, y e z, como indicado na Figura 2.1, pode-se obter a equação diferencial do fluxo (Freeze e Cherry, 1979), que na forma matricial é dada por:

$$\nabla^T (\rho_w \bar{v}) dx dy dz = - \frac{\partial M_w}{\partial t} \quad (2.1)$$

onde  $\rho_w$  é a massa específica da água,  $\bar{v}$  é o vetor de velocidade superficial de fluxo, e  $\nabla$  é um operador diferencial que depende da dimensão do problema. O termo à esquerda desta equação representa o balanço de massa nas três direções e o termo à direita representa, de acordo com o princípio da conservação da massa, a taxa de variação, no tempo, da massa de água ( $M_w$ ) armazenada no elemento.

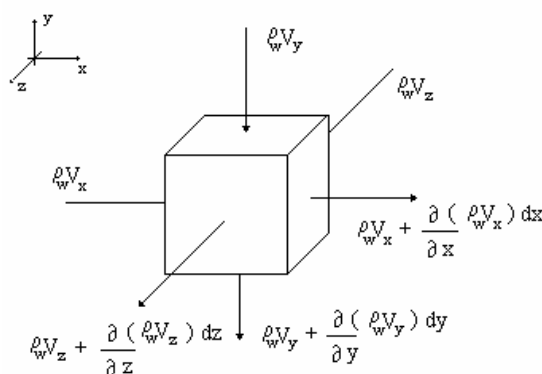


Figura 2.1 - Cubo elementar sujeito a um fluxo nas direções x, y e z.

A massa de água pode ser escrita em termos do grau de saturação ( $S$ ) e da porosidade ( $n_e$ ) como sendo

$$M_w = \rho_w S n_e \quad dx dy dz \quad (2.2)$$

Desta forma, a Equação 2.1 pode ser reescrita como:

$$\nabla^T (\rho_w \bar{v}) = - \frac{\partial (\rho_w S n_e)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Partindo-se do conceito de grau de saturação e porosidade, e introduzindo-se o conceito de teor de umidade volumétrica ( $\theta = n_e S$ ); e ainda, supondo o problema isotérmico com o fluido e o meio incompressíveis, a Equação 2.3 pode ser reescrita como

$$\nabla^T \bar{v} = - \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.4)$$

Admitindo-se condições de fluxo, vem pela lei de Darcy:

$$\bar{v} = -\bar{K} \nabla (h_e + h) \quad (2.5)$$

onde  $\bar{K}$  é a matriz da condutividade hidráulica que para problemas de fluxo não saturado depende da carga de pressão e  $\nabla (h_e + h)$  é o vetor dos gradientes hidráulicos, sendo que  $h_e$  e  $h$  são, respectivamente, as cargas de elevação e de pressão.

Desta forma, substituindo as equações 2.4 e 2.5, pode-se reescrever a equação 2.6 como:

$$\nabla^T [\bar{K}(h) \bar{e} + \bar{K}(h) \nabla h] = \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} \quad (2.6)$$

onde  $\bar{e}$  é um vetor de na direção da aceleração da gravidade.

É usual colocar a equação (2.6) de forma que a variável independente seja a carga de pressão  $h$ , e sabendo que  $\theta = \theta(h)$  obtém-se (Freeze e Cherry, 1979):

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)\nabla h] \quad (2.7)$$

onde

$$C(h) = \frac{\partial \theta}{\partial h} \text{ é a capacidade de retenção específica.} \quad (2.8)$$

A Equação 2.7 é a Equação de Richard escrita na sua forma matricial, e pode ser classificada como uma equação diferencial parcial de segunda ordem não linear.

A solução desta equação (equação 2.7) exige o conhecimento da distribuição inicial de carga de pressão no domínio de fluxo  $\Omega$ .

$$h(x, y, z, t) = h_0(x, y, z, 0) \quad (2.9)$$

Onde  $h_0$  é uma função prescrita de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

São necessárias também as especificações das condições de contorno que podem ser em carga de pressão prescrita (condição de Dirichlet)

$$h(x, y, z, t) = \bar{h}(x, y, z, t) \quad \text{em } \Gamma_D \quad (2.10)$$

ou em fluxo prescrito (condição de Neuman)

$$[\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)\nabla h]n^T = \bar{v} \quad \text{em } \Gamma_N \quad (2.11)$$

sendo,  $\Gamma_D$  e  $\Gamma_N$ , os segmentos do contorno do tipo Dirichlet e do tipo Neuman, respectivamente e  $n$  é o vetor normal ao contorno  $\Gamma_N$ .

Para obter-se a solução da Equação 2.7 é necessário a determinação das funções características  $k = k(h)$  e  $\theta = \theta(h)$ .

## 2.2 Propriedades Hidráulicas de Solos Não Saturadas

Um solo não saturado é composto por três fases: sólida, líquida e gasosa, (Lambe e Whitman, 1969). Fredlund e Morgenstern (1977) consideram também uma quarta fase, denominada película contrátil, sendo essa fase a interface água-ar.

A fase sólida é constituída por partículas minerais e matéria orgânica, variando de forma e tamanho; a fase líquida é composta por água, a fase gasosa é constituída pelo ar livre e está presente no espaço poroso não ocupado pela água, uma vez que o solo esteja em um estado não saturado. A película contrátil comporta-se como uma membrana elástica sobre tensão (tração) misturada por toda a estrutura do solo.

Nesta dissertação considera-se o solo como um sistema trifásico, considerando que o volume da película contrátil é pequeno e esta pode ser considerada com parte da fase água. A figura (2.2) apresenta um elemento de solo não saturado com suas respectivas fases.

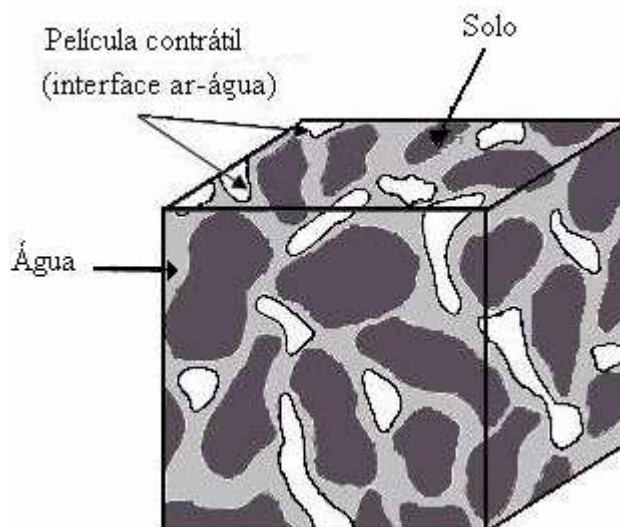


Figura 2.2 - Elemento de solo não saturado (adaptado de Fredlund e Morgenstern, 1977).

A seguir devem-se as propriedades das curvas características e da condutividade hidráulica não saturada.

### 2.2.1 Curva Característica

Segundo Fredlund e Xing (1994), a curva de retenção da água no solo pode ser definida como a variação da sucção com a capacidade de retenção da água nos macro e micro poros no interior do solo.

A umidade no meio não saturado é mantida entre os grãos sob forças capilares que são refletidas no raio de curvatura de cada menisco, e são responsáveis pelas pressões negativas de água. A figura 2.3 mostra um menisco formado entre duas partículas de solo onde  $R$  é o raio do solo e  $r$  é o raio de curvatura do menisco.

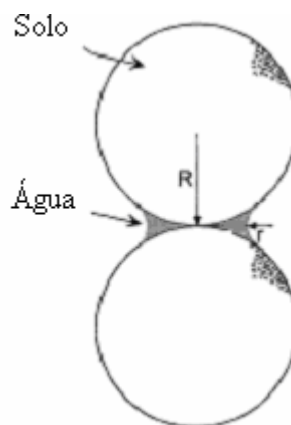


Figura 2.3 - Menisco de água no solo (adaptado de Lu e Likos, 2004).

Quando em um solo não saturado, em estado de equilíbrio, modifica-se a carga de pressão à qual o solo está submetido, ocorrerá um fluxo de água até que se atinja um novo equilíbrio. A nova condição de equilíbrio não significa uma distribuição uniforme da umidade, mesmo quando o solo seja homogêneo (Croney, 1952), citado por Rassam *et al.* (2004). A figura (2.4) apresenta uma curva característica típica, onde alguns valores merecem destaque como: o teor de umidade volumétrica saturada ( $\theta_s$ ), a qual teoricamente representa a porosidade do solo, mas na prática tende a ser 10-25% menor (Rassam *et al.*, 2004); o teor de umidade volumétrica residual ( $\theta_r$ ) é o valor do teor de umidade volumétrica além do qual um aumento adicional na carga de pressão resultara somente em mudanças pequenas no teor de umidade volumétrica; o valor de pressão de entrada de ar é o valor da carga de pressão no qual ocorre a entrada de ar nos poros do solo em um processo de secagem.

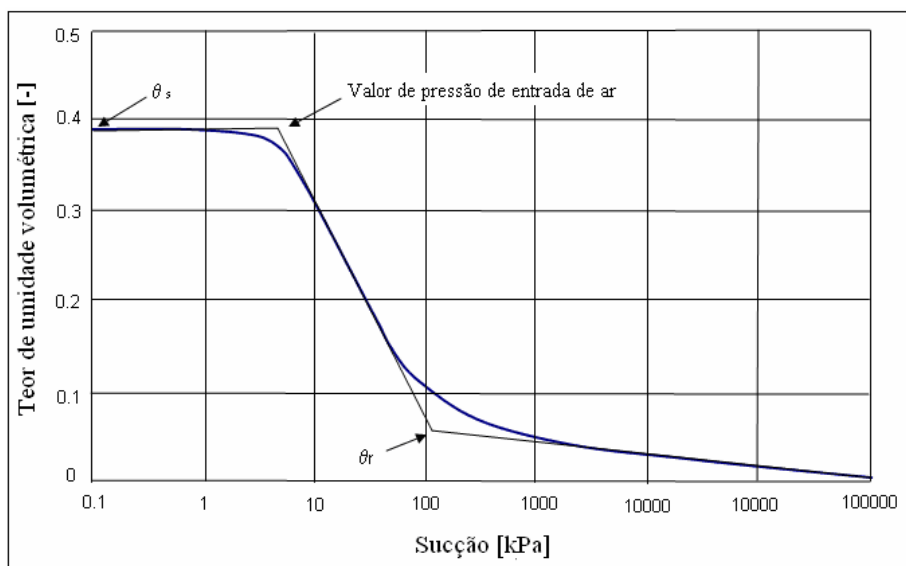


Figura 2.4 - Curva Característica.

Em solos argilosos, o valor de entrada de ar tende a ser maior do que em solos arenosos. Quanto maior o teor de argila espera-se que maior seja a quantidade de água retida e a perda de umidade será mais lenta a partir de quando a sucção atinge o ponto de entrada de ar, já os solos arenosos os poros são relativamente grandes e tendem a apresentar perda brusca de umidade (saturação). A figura 2.5 apresenta diferentes curvas de retenção para diferentes solos e condições.

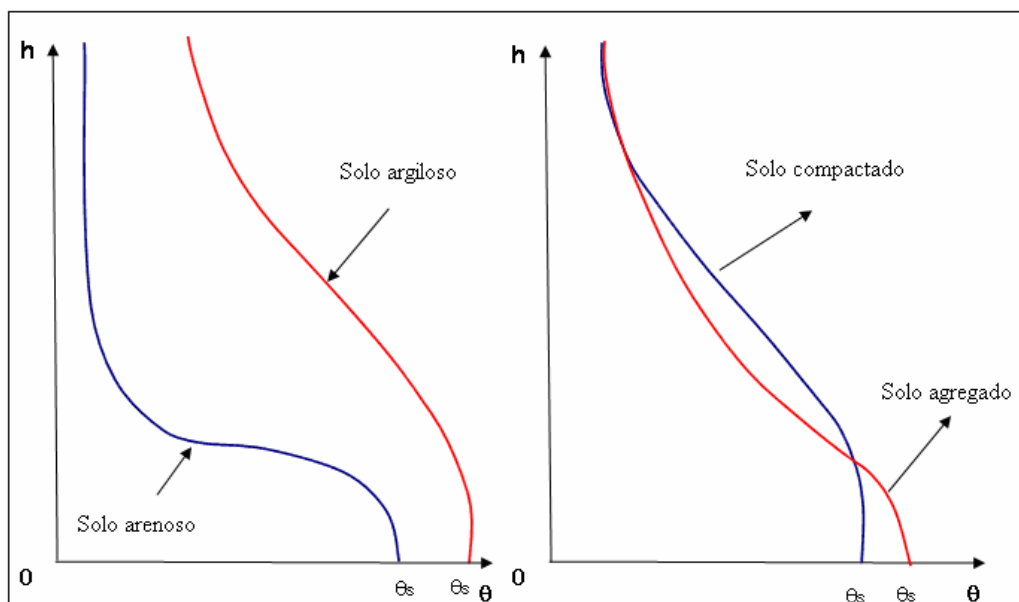


Figura 2.5 - Curvas de Retenção de água para diferentes solo e condições (adaptado, Reichardt e Timm, 2004).

A relação entre o valor da carga de pressão ( $h$ ) e o teor de umidade volumétrico ( $\theta$ ), em geral não é unívoca, e essa relação pode ser obtida de duas maneiras distintas: por “secagem” ou por “molhamento”, (Figura 2.6). Cada uma fornece uma curva contínua, mas as duas, na maioria dos casos, são distintas. Esse fenômeno é denominado histerese, e é atribuída à não uniformidade dos poros individuais com relação a fenômenos capilares, bolhas de ar que permanecem fixas nos macroporos e a mudanças estruturais (Reichardt e Timm, 2004; Lu e Likos, 2004).

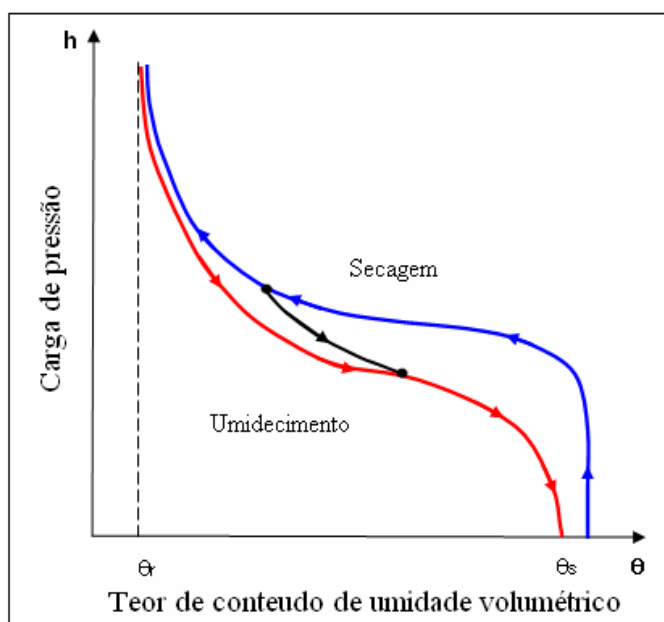


Figura 2.6 - Histerese (adaptado, Reichardt e Timm, 2004).

A curva característica tem sido exaustivamente analisada seja quanto às técnicas de ensaios, seja para avaliar a validade dos diversos modelos já existentes, para o ajuste da relação entre teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) e a carga de pressão ( $h$ ) (Mateus, 2007).

Diversas expressões para modelagem da curva característica foram propostas por vários autores, tais como: Brooks e Corey (1964), Visser (1966), van Genuchten (1980) e Fredlund e Xing (1994). O modelo proposto por van Genuchten (1980) vem sendo amplamente utilizado em vários trabalhos, pois propicia um bom ajuste para uma grande variedade de solos. A equação de van Genuchten - Mualem é expressa da seguinte forma:

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{\left(1 + |\alpha h|^n\right)^m} \quad (2.12)$$

onde  $\theta_r$  é o teor de umidade volumétrica residual,  $\theta_s$  é o teor de umidade volumétrica saturada,  $\alpha$  e  $n$  são parâmetros empíricos, e  $m$  é dado por:

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad (2.13)$$

Segundo van Genuchten (1980) o valor de  $\alpha$  é proximamente relacionado com o inverso do valor de pressão de entrada de ar.

### 2.2.2 Curva de Condutividade Hidráulica

A condutividade hidráulica é definida como a capacidade de um meio poroso para transmitir o fluido. Num meio saturado, a condutividade hidráulica é função das propriedades do fluido e do meio poroso, mas no meio não saturado ele depende ainda do grau de saturação (Freeze e Cherry, 1979). Quando o solo é saturado, todos os poros estão preenchidos e são condutores, então a condutividade hidráulica é máxima. Quando o solo se torna não saturado, alguns poros se tornam preenchidos de ar e a porção condutora da área transversal do solo decresce correspondentemente. O valor da condutividade hidráulica decresce rapidamente com o decréscimo do teor de umidade volumétrica ( $\theta$ ) ou da carga de pressão ( $h$ ), devido à diminuição da área útil para a condução da água, (Reichardt e Timm, 2004). Na figura 2.7 apresenta-se diversos valores de  $k(\theta)$  quando a área de fluxo diminui.



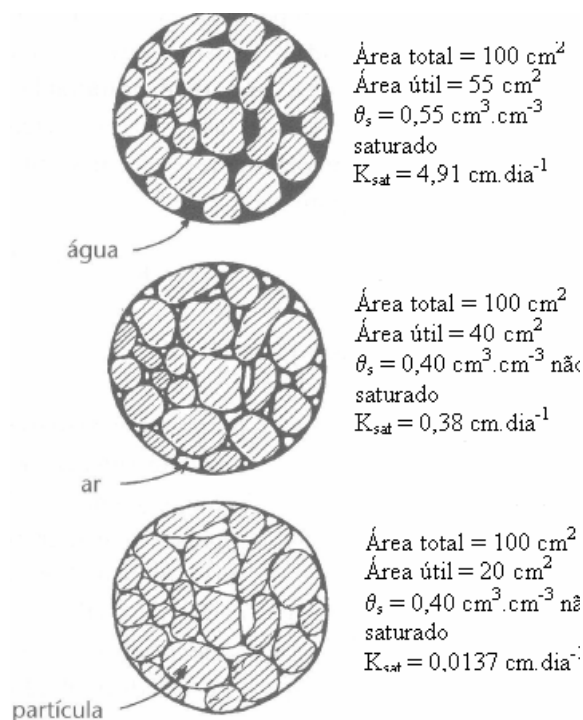


Figura 2.7 - Diminuição da área útil para o fluxo de água. (adaptado, Reichardt e Timm, 2004).

Em condição de saturação, os solos mais permeáveis são aqueles em que os poros grandes e contínuos constituem a maioria do volume dos poros, enquanto os menos permeáveis são os solos em que o volume de poros consiste de numerosos microporos. Então, como se sabe, solos arenosos conduzem água mais rapidamente que um solo argiloso. Em solos com poros grandes, esses poros esvaziam rapidamente e se tornam não condutores, a medida que a carga de pressão se torna mais negativa, então a alta condutividade hidráulica inicial decresce abruptamente. Por outro lado, em solos com poros pequenos, vários poros permanecem preenchidos e condutores mesmo a uma carga de pressão muito negativa, logo a condutividade hidráulica decresce suavemente e pode ser maior que a de solo com poros grandes, mesmo submetidos à mesma carga de pressão.

A Figura 2.8 mostra a tendência geral da dependência da condutividade hidráulica em relação à carga de pressão em diferentes solos. Observa-se que, embora a condutividade hidráulica saturada do solo arenoso seja tipicamente maior do que a do solo argiloso, a condutividade hidráulica não saturada do primeiro decresce mais abruptamente à medida que a carga de pressão se torna mais negativa.

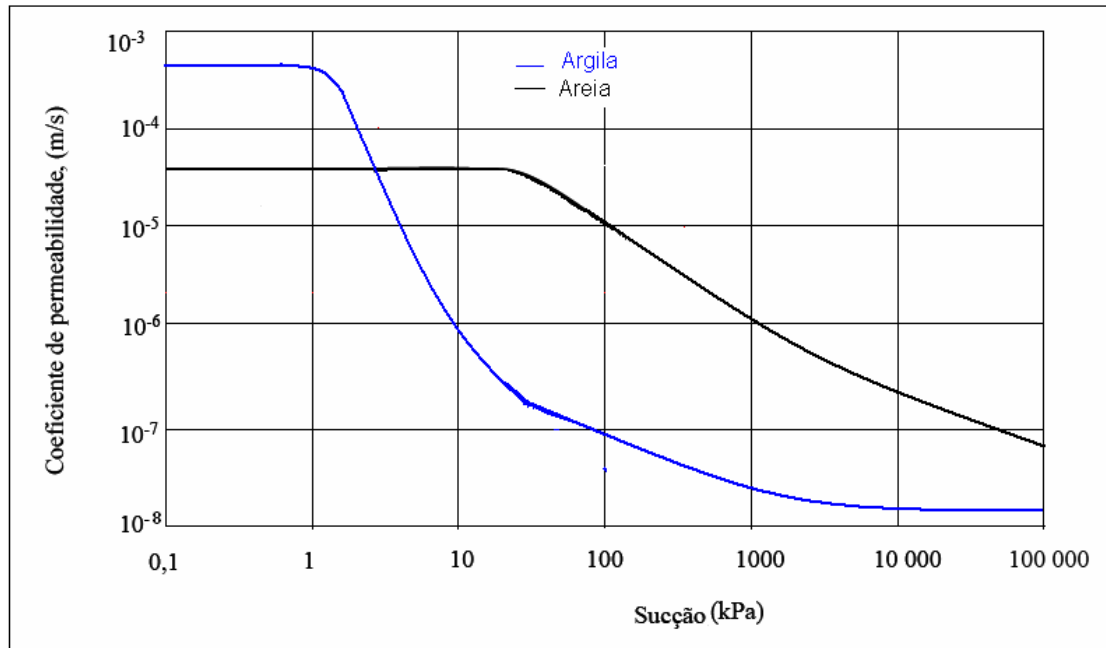


Figura 2.8 - Condutividade hidráulica não Saturada (adaptado, Velloso, 2000).

O formato da curva de condutividade hidráulica é similar ao formato da curva característica, inclusive apresentando a histerese para etapas de drenagem e secagem.

De acordo com Fredlund e Xing (1994) existem basicamente dois tipos de abordagem para a determinação da função de condutividade hidráulica, uma primeira baseada em estudos empíricos e a segunda em modelos estatísticos. Dentro destes modelos estatísticos encontra-se o de van Genuchten - Mualem que é apresentado da seguinte forma:

$$k(h) = k_s \theta_e^{0.5} \left[ 1 - \left( 1 - \theta_e^{0.5} \right)^m \right]^2 \quad (2.14)$$

Onde  $k_s$  é a condutividade hidráulica saturada e  $\theta_e$  é dado por:

$$\theta_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.15)$$

### 2.3 Solução Numérica da Equação de Fluxo

O método dos elementos finitos é uma ferramenta que pode ser usada para resolver as equações de fluxo (Equação de Richards). A aplicação dos métodos de

elementos finitos requer a discretização da área do solo em elementos. Na discretização no espaço o programa HYDRUS (Simunek *et al.*, 2004) considera a região do fluxo subdividida em elementos que podem ser triângulos, para os casos bidimensionais, e tetraedros para os casos tridimensionais.

A solução aproximada da equação de Richard usando o Método dos Elementos Finitos (MEF), faz que o domínio contínuo ( $\Omega$ ) seja dividido em elementos ( $\Omega_e$ ), que se encontram ligados entre si através de nós distribuídos ao longo de seus contornos.

Considerando-se  $h^*$  uma solução aproximada de  $\mathbf{h}$  no domínio do elemento ( $\Omega_e$ ), a equação 2.7 pode ser escrita como:

$$\nabla^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)\nabla(h^*)] - C(h)\frac{\partial h^*}{\partial t} = R(h^*) \quad (2.16)$$

onde  $R(h^*)$  representa o resíduo da solução aproximada.

A solução aproximada de  $\mathbf{h}$  no domínio do elemento ( $\Omega_e$ ) é usualmente escrita no método dos elementos finitos considerando-se

$$h^* = N\hat{h} \quad (2.17)$$

onde  $N$  denota a matriz das funções de interpolação, definidas em função do tipo de elemento finito adotado, e  $\hat{h}$  representa o vetor das cargas de pressão nodais. Assim, re-escreve-se a equação (2.15) como

$$\nabla^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)\nabla(N\hat{h})] - C(h)N\dot{\hat{h}} = R(h^*) \quad (2.18)$$

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados (Huyakorn e Pinder, 1983), a minimização do resíduo  $R(h^*)$  é obtida através da introdução de funções de ponderação que, no método de Galerkin, são as próprias funções de interpolação  $N$ .

$$\int_{\Omega_e} N^T \{ \nabla^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)\nabla(N\hat{h})] - C(h)N\dot{\hat{h}} \} d\Omega_e = 0 \quad (2.19)$$

Integrando-se por partes os dois primeiros termos de equação 2.19 vem:

$$\int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(h) \cdot \nabla(N\hat{h})] \cdot d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} (\nabla N)^T \bar{K}(h) \nabla(N\hat{h}) d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [K(h)\bar{e}] \cdot d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} (\nabla N^T) \bar{K}(\psi) \bar{e} d\Omega_e - \int_{\Omega_e} N^T C(\hat{h}) N \dot{\hat{h}} d\Omega_e = 0 \quad (2.20)$$

onde  $\Gamma_e$  representa o contorno do elemento e  $\bar{n}$  o vetor unitário externo, normal ao contorno.

Considerando-se

$$\nabla N = B \quad (2.21)$$

e agrupando-se os termos, resulta

$$\int_{\Omega_e} B^T \bar{K}(h) B d\Omega_e \hat{h} + \int_{\Omega_e} N^T C(h) N d\Omega_e \dot{\hat{h}} = \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)B\hat{h}] d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} B^T \bar{K}(h) \bar{e} d\Omega_e \quad (2.22)$$

que é a solução aproximada da equação de Richard pelo método do elementos finitos. Esta equação, para efeitos de simplificação, pode ser definida como, a nível do elemento finito:

$$\bar{H}h + \bar{F} \frac{dh}{dt} = \bar{Q} - \bar{Q}' \quad (2.23)$$

onde

$$\bar{H} = \int_{\Omega_e} B^T \bar{K}(h) B d\Omega_e \quad \text{é a matriz do elemento de fluxo} \quad (2.24)$$

$$\bar{Q} = \int_{\Gamma_e} N^T \bar{n}^T [\bar{K}(h)\bar{e} + \bar{K}(h)Bh] d\Gamma_e \quad \text{é vetor de vazões nodais} \quad (2.25)$$

$$\bar{Q}' = \int_{\Omega_e} B^T \bar{K}(h) \bar{e} d\Omega_e \quad \text{é o vetor de vazão nodal} \quad (2.26)$$

relacionado aos efeitos gravitacionais

$$\bar{F} = \int_{\Omega_e} N^T C(h) N d\Omega_e \quad \text{é a matriz de capacidade de retenção} \quad (2.27)$$

A discretização no tempo é feita através de uma seqüência de intervalos, discretizando se o tempo em intervalos conhecidos e  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ , e supondo uma variação linear para as funções, F, H, Q e Q', como se segue:

$$\bar{F} \frac{h_{j+1} - h_j}{\Delta t_j} + \bar{H}_{j+1} h_{j+1} = \bar{Q}_j + \bar{Q}'_{j+1} \quad (2.28)$$

onde  $j + 1$  representa o passo de tempo corrente onde a solução está sendo considerada,  $j$  se refere ao passo de tempo anterior. A equação (2.28) representa o sistema de equações algébricas a serem resolvidas.

Por causa da natureza não-linear da equação (2.28), um processo iterativo deve ser usado para obter soluções da equação em cada etapa nova do tempo. Para obter a solução da equação utiliza se o método de Picard (Huyakorn e Pinder, 1983), obtendo-se a solução da equação matricial global a cada novo passo de tempo.