4
Modelo Estacionário para o CEP Autocorrelacionados

4.1.
O Processo AR(1) com Erro Aleatório Adicional – ARMA(1,1)

Inicialmente, suponha que observações são tomadas de um processo em espaços de tempo regulares e, ainda, que Y_t seja definido como a observação tomada no tempo t.

Para a modelagem de observações tomadas de um processo autocorrelacionado, será utilizado, nessa dissertação, o modelo representado por

$$Y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \cdots \tag{64}$$

onde:

$\mu_t \rightarrow$ média do processo aleatório no tempo t.

$\varepsilon_t \rightarrow$ variável aleatória normal independente em t, com média 0 e variância constante σ_ε^2.

Assume-se que μ_t pode ser descrito como um processo AR(1) conforme segue:

$$\mu_{\text{t}} = (1 - \phi)\xi + \phi\mu_{\text{t-1}} + \alpha_{\text{t}} \quad t = 1, 2, \cdots \tag{65}$$

onde:

$\xi \rightarrow$ média global do processo , sendo $\xi = E[\mu_t]$.

$\alpha_t \rightarrow$choque aleatório, variável aleatória normal independente em t, com média 0 e variância constante σ_α^2. Assume-se que α_t´s são independentes dos ε_t´s.

$\phi \rightarrow$parâmetro auto-regressivo que satisfaz $|\phi| < 1$.

Considera-se que o processo, cujo valor inicial é μ_0, segue uma distribuição normal com média ξ e variância $\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\alpha^2}{(1-\phi^2)}$ (ver a Prova 1, a seguir), implicando em $\sigma_Y^2 = \sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2$.

<u>Prova 1</u>:

De (65) é conhecido que

$$\mu_{\mathrm{t}} = (1 - \phi)\xi + \phi\mu_{\mathrm{t-1}} + \alpha_{\mathrm{t}} \qquad t = 1, 2, \cdots$$

Sem perda de generalidade, considere $\xi = 0$

$$\mu_{\mathrm{t}} = \phi\mu_{t-1} + \alpha_{\mathrm{t}} \qquad t = 1, 2, \cdots$$
$$\mu_t - \phi\mu_{t-1} = \alpha_t \qquad t = 1, 2, \cdots$$
$$(1 - \phi B)\mu_t = \alpha_t \qquad t = 1, 2, \cdots$$
$$\mu_t = \frac{\alpha_t}{(1 - \phi B)} \qquad t = 1, 2, \cdots$$

onde B é o operador de retardo.

Sabe-se que $(1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \cdots) = \frac{1}{(1 - \phi B)}$, desde que $|\phi| < 1$.

Conseqüentemente,

$$\mu_t = (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \cdots)\alpha_t = \alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \cdots \qquad t = 1, 2, \cdots \qquad .(a)$$

Então, a variância de μ_t é dada por

$$\mathrm{var}[\mu_t] = \sigma_\mu^2 = \mathrm{var}[\alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \cdots] \qquad t = 1, 2, \cdots$$
$$\mathrm{var}[\mu_t] = \sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots) \qquad t = 1, 2, \cdots$$

Como $1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots = \frac{1}{1 - \phi^2}$, portanto $\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma_\alpha^2}{(1 - \phi^2)}$.

É considerado nesse trabalho que a variação em μ_t, representada pela equação (65), é uma característica inerente ao processo e não pode ser removida. Além disso, quando o processo segue as equações (64) e (65) com $\xi = \xi_0$, onde ξ_0 é o valor-alvo para o processo em controle. Esse trabalho considera o problema em detectar causas especiais de mudança na média de ξ_0 para um outro valor ξ, sendo conveniente expressar essa mudança em termos de $\delta = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma_Y}$.

É útil definir $\psi = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\mu^2 + \sigma_\varepsilon^2}$ como sendo a proporção da variação do processo imposta por μ_t. Pode ser mostrado que a covariância entre duas observações consecutivas é $\phi\sigma_\mu^2$ e que a correlação é $\rho = \phi\psi$ (ver Prova 2, abaixo).

Prova 2:

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[(Y_t - E[Y_t])(Y_{t-1} - E[Y_{t-1}])]$$
$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[(Y_t - \xi)(Y_{t-1} - \xi)]$$
$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1} - \xi Y_t - \xi Y_{t-1} + \xi^2]$$
$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1}] - \xi^2$$

Sem perda de generalidade, considere $\xi = 0$, então

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = E[Y_t Y_{t-1}] \qquad \text{(b)}$$

como,

$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\mu_t + \varepsilon_t)(\mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1})]$$
$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[\mu_t \mu_{t-1} + \varepsilon_{t-1}\mu_t + \varepsilon_t \mu_{t-1} + \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}]$$
$$E[Y_t Y_{t-1}] = E[\mu_t \mu_{t-1}] \qquad \text{(c)}$$

então, de (a), é possível afirmar que

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = E[(\alpha_t + \phi\alpha_{t-1} + \phi^2\alpha_{t-2} + \cdots)(\alpha_{t-1} + \phi\alpha_{t-2} + \phi^2\alpha_{t-3} + \cdots)]$$
$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = E\left[\sum_{i=0}^{\infty}(\phi^i \alpha_{t-i})\sum_{j=0}^{\infty}(\phi^j \alpha_{t-1-j})\right]$$

É conhecido que α_t é normal e independente em t, com média 0 e variância constante σ_α^2, portanto

$$E[\alpha_t \alpha_{t-k}] = \begin{cases} 0 & \text{para } k \neq 0 \\ \sigma_\alpha^2 & \text{para } k = 0 \end{cases}$$

$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \phi\sigma_\alpha^2 + \phi^3\sigma_\alpha^2 + \phi^5\sigma_\alpha^2 \cdots = \sigma_\alpha^2(\phi + \phi^3 + \phi^5 \cdots)$$
$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \sigma_\alpha^2 \frac{\phi}{1-\phi^2}$$
$$E[\mu_t \mu_{t-1}] = \phi\sigma_\mu^2 \qquad \text{(d)}$$

Substituindo (a), (b) e (c) em (d), tem-se:

$$\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}] = \phi\sigma_\mu^2$$
$$\rho = \frac{\text{cov}[Y_t, Y_{t-1}]}{\sigma_Y^2} = \frac{\phi\sigma_\mu^2}{\sigma_Y^2} = \phi\psi$$

Como informação adicional e conforme Lu & Reynolds (2001), o processo AR(1) com um erro aleatório adicional é equivalente a um processo ARMA(1,1), que pode ser escrito como

$$(1-\phi B)Y_t = (1-\phi)\xi + (1-\theta B)\gamma_t \tag{66}$$

Onde:

$\gamma_t \rightarrow$ variável aleatória normal independente com média 0 e variância σ_γ^2.

$\theta \rightarrow$ parâmetro média móvel

$BY_t = Y_{t-1} \rightarrow$ operador de retardo.

4.2.
MLD-CEP

Como alternativa aos procedimentos já disponíveis na literatura para lidar com a ocorrência de observações autocorrelacionadas no âmbito do controle estatístico de processo (CEP), esse trabalho propõe o uso do modelo linear dinâmico de Harrison & Stevens (MLD-HS) para o CEP de variáveis na presença de dados serialmente correlacionados, e foi denominado MLD-CEP.

O pressuposto básico para elaboração desse trabalho é que se uma dada característica de qualidade se encontra em controle, ou seja, não existe nenhuma causa especial atuando, o modelo que estará operando é o modelo estacionário de HS. O intuito é detectar algum tipo de descontinuidade na série, pois essa descontinuidade indicará uma possível atuação de causa especial no processo.

Para se atingir esse objetivo, o fator de Bayes acumulado foi o instrumento utilizado para detecção de descontinuidades na série temporal.

4.3.
Suposições e Opções do Modelo Proposto – MLD-CEP

Os resultados numéricos obtidos nesse trabalho são para valores não negativos de ϕ, correspondendo a valores não negativos de ρ. A justificativa para tal opção é que, segundo Lu & Reynolds (2001), em aplicações onde se deseja monitorar o processo, existem muito mais situações de autocorrelação positiva do que de autocorrelação negativa.

Ainda, optou-se em acompanhar os níveis de autocorrelação considerados no artigo de Lu & Reynolds (2001), ou seja, de baixo a moderadamente alto. Essa opção foi com intuito de viabilizar a comparação de desempenho do esquema de CEP aqui proposto, com os esquemas alternativos a ele, propostos na literatura. Importante salientar ainda que esse trabalho assume processo estacionário e variância conhecida.

A medida de desempenho utilizada é o NMA. Conforme dito anteriormente, o NMA é a medida de desempenho de gráficos de controle mais utilizada quando o intervalo de tempo entre amostras for constante. Quando o processo está em controle, espera-se obter $\mathrm{NMA}_0 = 370$ observações até a sinalização de um alarme falso; quando o processo está fora de controle, deseja-se que o NMA_1 seja o menor possível, para que uma mudança seja rapidamente detectada.

Quando existe uma mudança em ξ, a abordagem mais simples para o cálculo do NMA_1 é assumir que essa mudança está presente no tempo em que o gráfico de controle foi inicializado. Porém, nesse trabalho, foi considerado que o processo está em controle por certo período de tempo e somente em um determinado instante t ocorre uma mudança em ξ. A eficiência, do esquema aqui proposto, em detectar mudanças pré-definidas na média do processo ξ é comparada com resultados obtidos por Lu & Reynolds (2001).

4.4. Obtenção dos *Designs* para o Modelo Proposto – MLD-CEP

O processo para alcançar os melhores *designs* consistiu em obter valores de β, que é o fator de desconto discutido na seção 3.4.5, assim como valores de τ (*threshold*), fixando $\mathrm{NMA}_0 \cong 370$. Foram obtidos pares (β, τ) para cada conjunto de parâmetros (ϕ, ψ, δ^*) escolhido, onde ϕ e ψ são definidos conforme seção 4.1. Já δ^* é definido como o desvio (medido em número de desvio-padrão) na média do modelo alternativo para efeito do cálculo do fator de Bayes $H_t = \dfrac{p(y_t \mid D_{t-1}; M)}{p(y_t \mid D_{t-1}; M_A)}$ (ver seção 3.5). Para facilitar o entendimento do parâmetro δ^*, considerar que se deseja avaliar o modelo corrente (M) versus um modelo alternativo (M_A). Ainda, sem perda de generalidade, que o modelo corrente (M)

é fixado como $(e_t \mid D_{t-1}) \sim N[0,1]$ e, portanto, a preditiva do M é dado por $p_M(e_t \mid D_{t-1}) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0,5e_t^2\}$.

O modelo alternativo como $(e_t \mid D_{t-1}) \sim N[\delta^*, 1]$ tendo como preditiva $p_{M_A}(e_t \mid D_{t-1}) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-0,5(e_t - \delta^*)^2\}$. Então, para um conhecido δ^*, o fator de Bayes, em um instante t, é dado por $H_t = p_M(e_t \mid D_{t-1}) / p_{M_A}(e_t \mid D_{t-1}) = \exp\{0,5(\delta^{*2} - 2\delta^* e_t)\}$.

4.4.1. Obtenção de pares (β,τ) para conjunto de (ϕ,ψ,δ^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)

Para cada par (β,τ), rodaram-se 1600 vezes (erro menor que 5%) para obtenção da média de alarmes ($\overline{alarmes}$) igual a 7,45, que conduz ao $\mathrm{NMA}_0 \cong 370$ em uma corrida de tamanho 2760. O número de repetições foi reduzido devido ao tempo computacional. Tabela 3 mostra os resultados obtidos.

Tabela 3 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7{,}45$ sem refino para (ϕ,ψ,δ^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5)

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,700	0,100	0,000
0,700	0,150	0,000
0,700	0,200	0,000
0,700	0,250	0,000
0,700	0,300	0,000
0,750	0,100	0,000
0,750	0,150	0,000
0,750	0,200	0,000
0,750	0,250	0,000
0,750	0,300	0,000
0,800	0,100	0,000
0,800	0,150	0,000
0,800	0,200	0,000
0,800	0,250	0,000
0,800	0,300	0,000
0,850	0,100	0,000
0,850	0,150	0,000
0,850	0,200	0,000

0,850	0,250	0,039
0,850	0,300	3,024
0,900	0,100	0,000
0,900	0,150	0,000
0,900	**0,200**	**0,944**
0,900	**0,250**	**4,747**
0,900	**0,300**	**11,362**
0,950	**0,100**	**0,087**
0,950	**0,150**	**3,294**
0,950	**0,200**	**8,240**
0,950	**0,250**	**14,662**
0,950	**0,300**	**22,301**

A partir dos dados da Tabela 3, é possível refinar o processo para menores intervalos de β e τ em torno de $\overline{alarmes} = 7{,}45$. O processo refinado pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 - Obtenção do $\overline{alarmes} = 7{,}45$ com refino para $\left(\phi, \psi, \delta^*\right)$ = (0,4 / 0,5 / 0,5)

β	τ	$\overline{alarmes}$
0,900	0,200	0,962
0,900	0,220	2,151
0,900	0,240	3,803
0,900	**0,260**	**6,010**
0,900	**0,280**	**8,406**
0,900	0,300	11,131
0,910	0,200	1,813
0,910	0,220	3,435
0,910	**0,240**	**5,357**
0,910	**0,260**	**7,562**
0,910	0,280	10,308
0,910	0,300	13,363
0,920	0,200	2,961
0,920	0,220	4,926
0,920	**0,240**	**7,085**
0,920	**0,260**	**9,654**
0,920	0,280	12,566
0,920	0,300	15,674
0,930	0,200	4,571

0,930	0,220	6,598
0,930	0,240	8,981
0,930	0,260	11,809
0,930	0,280	14,603
0,930	0,300	17,841
0,940	**0,200**	**6,173**
0,940	**0,220**	**8,524**
0,940	0,240	11,021
0,940	0,260	13,841
0,940	0,280	16,683
0,940	0,300	20,109
0,950	0,200	8,166
0,950	0,220	10,516
0,950	0,240	13,156
0,950	0,260	16,021
0,950	0,280	18,938
0,950	0,300	22,253

Em torno de $\overline{alarmes} = 7{,}45$, foi feita uma interpolação, sendo obtidos os valores da Tabela 5. Para cada par (β, τ) da tabela 5 obteve-se o NMA_1 (apêndice D), o critério de escolha do par (β, τ) foi o menor NMA_1 para um conhecido δ^*. Esse processo foi executado para todo conjunto de interesse (ϕ, ψ, δ^*).

Tabela 5 - (β, τ) para (ϕ, ψ, δ^*) = (0,4 / 0,5 / 0,5) e $\overline{alarmes} = 7{,}45 \Rightarrow \mathrm{NMA}_0 \cong 370$

β	τ
0,90	0,272
0,91	0,259
0,92	0,243
0,93	0,227
0,94	**0,211**

O mesmo processo de obtenção de pares (β, τ) se repetiu para as demais combinações (ϕ, ψ, δ^*) e os resultados estão disponíveis no apêndice C.

4.5. Análise de desempenho do MLD-CEP para cada *design*

Nesta seção comparam-se os NMA_1 obtidos por Lu & Reynolds (2001) com o MLD-CEP. Nesse artigo, os autores investigaram o desempenho de gráficos de controle CUSUM para monitoramento da média de um dado processo, com nível de autocorrelação baixo até moderadamente alto, sendo as observações tomadas de um processo que pode ser modelado como um processo AR(1) mais um erro aleatório adicional. Eles investigaram tanto o desempenho dos gráficos de resíduos do modelo de previsão, quanto o dos gráficos das observações originais.

Lu & Reynolds (2001) adicionam ainda, no mesmo artigo, resultados de desempenho para gráficos de controle EWMA, também nas duas alternativas, utilizando os resíduos e utilizando as observações originais, resultados estes obtidos de um outro trabalho de investigação dos autores, Lu & Reynolds (1999a); além de resultados do uso de gráficos de Shewhart para resíduos e para as observações originais. Portanto, isso inclui os principais esquemas na literatura para controle estatístico de processos autocorrelacionados, possibilitando uma comparação abrangente do desempenho do MLD-CEP .

Os NMA_1's para o MLD-CEP foram obtidos considerando a situação em que o processo está em controle por certo período de tempo e somente em um determinado instante t ocorre uma mudança em ξ. A mudança em ξ é definida por $\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$. Importante salientar que δ^* é o $\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$ para o qual determinado esquema foi otimizado.

O gráfico de Shewhart só possui um *design*. De fato, como se considera neste trabalho o mesmo tamanho de amostra para todos os esquemas, sendo o intervalo de tempo entre amostras considerado (também para todos os esquemas) igual a 1 unidade de tempo, sem perda de generalidade, então, só resta para o gráfico de Shewhart um parâmetro que pode ser variado: a largura dos limites de controle; mas esta largura é fixada em função do NMA_0, de modo que o *design* do gráfico de Shewhart resulta fixo..

O apêndice D e as Tabelas 39 a 42 mostram os NMA_1's obtidos para o MLD-CEP e para os demais esquemas considerados.

Como se observa nas Tabelas 6 a 9, o melhor design para detectar um desvio de magnitude δ^* não é o que utiliza δ^* como a média do modelo alternativo. Portanto não se trata de *designs* ótimos, mas de uma gama de valores de δ^* de modo a fornecer um leque de *designs* para escolha — da mesma maneira que, para os esquemas concorrentes, Lu & Reynolds fornecem um leque de valores para os parâmetros, de modo a fornecer uma gama de *designs* para escolha do melhor, mas não se trata de *designs* otimizados. Contudo, é importante salientar, a comparação mostrou que o MLD-CEP é competitivo e vantajosos em um conjunto de situações. Notar que, em tais tabelas, Cusum-Obs e EWMA-Obs significa, respectivamente, gráfico Cusum e gráfico EWMA para as observações, e Cusum-Res e EWMA-Res são os mesmos gráficos aplicados aos resíduos. Além disso, λ $(0 < \lambda < 1)$ e r $(r \geq 0)$ são constantes e foram discriminadas nas seções 2.2 e 2.3 respectivamente.

Tabela 6 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}4$ **e** $\psi = 0{,}5$)

$\psi = 0{,}5$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ	δ^*	**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
		Cusum-Obs $r = 0{,}20$	36,1	14,7	9,2	6,8	5,4	4,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	37,0	14,1	8,5	6,2	4,9	4,1
	0,5	Cusum-Res $r = 0{,}20$	36,4	13,8	8,3	5,9	4,6	3,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	36,7	14,0	8,4	6,0	4,7	3,8
		MLD-CEP	**86,3**	**10,9**	**5,8**	**3,8**	**2,6**	**1,9**
		Cusum-Obs $r = 0{,}40$	40,3	12,9	7,4	5,2	4,0	3,3
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}10$	40,5	13,3	7,5	5,2	4,0	3,3
0,4	1,0	Cusum-Res $r = 0{,}30$	40,5	13,0	7,4	5,1	3,9	3,2
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	42,1	13,3	7,4	5,1	3,9	3,1
		MLD-CEP	**188,8**	**45,2**	**7,4**	**3,4**	**2,3**	**1,6**
		Cusum-Obs $r = 1{,}00$	77,6	17,1	7,1	4,1	2,9	2,2
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}35$	75,7	17,6	7,3	4,2	3,0	2,4
	2,0	Cusum-Res $r = 0{,}80$	86,5	18,8	7,3	4,1	2,7	2,1
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}30$	74,7	17,7	7,5	4,3	3,0	2,3
		MLD-CEP	**284,8**	**222,5**	**126,3**	**34,6**	**6,2**	**1,5**
		Shewhart – Obs.	160,9	47,0	16,4	7,2	3,6	2,2
		Shewhart – Res.	205,4	74,4	29,2	12,0	5,5	2,8

Tabela 7 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}8$ **e** $\psi = 0{,}5$)

$\psi = 0{,}5$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ	δ^*	**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
		Cusum-Obs $r = 0{,}20$	71,3	29,4	18,2	13,0	10,2	8,4
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
	0,5	Cusum-Res $r = 0{,}10$	71,9	28,0	16,2	10,4	7,9	6,1
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
		MLD-CEP	**175,2**	**62,1**	**18,7**	**9,8**	**7,5**	**5,7**
		Cusum-Obs $r = 0{,}50$	83,3	26,8	14,2	8,3	6,9	5,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
0,8	1,0	Cusum-Res $r = 0{,}20$	81,5	26,2	13,4	8,4	5,9	4,4
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
		MLD-CEP	**249,3**	**179,0**	**101,7**	**36,5**	**14,7**	**5,5**
		Cusum-Obs $r = 1{,}50$	135,3	38,6	14,7	6,8	13,9	2,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}35$	127,2	36,2	14,2	7,3	4,4	3,1
	2,0	Cusum-Res $r = 0{,}50$	135,8	37,1	13,5	6,4	3,7	2,6
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}15$	119,1	34,2	14,0	7,3	4,4	3,1
		MLD-CEP	**281,3**	**250,8**	**186,1**	**125,9**	**60,4**	**29,5**
		Shewhart – Obs.	176,3	56,4	21,8	9,5	4,8	2,6
		Shewhart – Res.	291,8	173,9	87,8	46,6	16,5	6,1

Tabela 8 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0,4$ **e** $\psi = 0,9$)

$\psi = 0,9$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ	δ^*	**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,4	0,5	Cusum-Obs $r = 0,20$	43,1	117,7	11,0	8,0	6,3	5,3
		EWMA–Obs $\lambda = 0,05$	44,9	16,5	10,0	7,2	5,5	4,6
		Cusum-Res $r = 0,10$	43,6	18,7	11,7	8,4	6,6	5,4
		EWMA–Res $\lambda = 0,05$	44,9	16,6	9,8	6,9	5,3	4,2
		MLD-CEP	**27,9**	**12,1**	**7,5**	**5,3**	**3,9**	**3,0**
	1,0	Cusum-Obs $r = 0,40$	49,1	16,0	9,2	6,4	4,9	4,0
		EWMA–Obs $\lambda = 0,10$	51,6	16,2	8,8	6,0	4,6	3,8
		Cusum-Res $r = 0,30$	51,3	15,8	8,6	5,8	4,3	3,5
		EWMA–Res $\lambda = 0,10$	53,2	16,3	8,7	5,8	4,3	3,4
		MLD-CEP	**83,2**	**13,3**	**6,8**	**4,6**	**3,3**	**2,6**
	2,0	Cusum-Obs $r = 1,25$	101,1	25,1	9,4	5,0	3,2	2,4
		EWMA–Obs $\lambda = 0,20$	89,8	22,3	9,2	5,1	3,5	2,6
		Cusum-Res $r = 0,40$	96,7	22,6	8,8	4,8	3,2	2,3
		EWMA–Res $\lambda = 0,10$	84,2	21,2	9,1	5,2	3,5	2,6
		MLD-CEP	**235,3**	**118,5**	**27,2**	**4,9**	**2,7**	**1,8**
		Shewhart – Obs.	162,5	48,2	17,5	7,8	4,0	2,3
		Shewhart – Res.	232,2	98,9	40,5	17,2	7,4	3,5

Tabela 9 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}8$ **e** $\psi = 0{,}9$**)**

$\psi = 0{,}9$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ	δ^*	**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,8	0,5	Cusum-Obs $r = 0{,}20$	96,3	41,3	25,7	18,4	14,2	11,7
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	108,4	38,6	20,5	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
		MLD-CEP	**63,7**	**28,4**	**16,8**	**12,2**	**10,0**	**8,3**
	1,0	Cusum-Obs $r = 0{,}40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
		MLD-CEP	**175,1**	**83,9**	**27,5**	**14,0**	**9,5**	**7,5**
	2,0	Cusum-Obs $r = 1{,}25$	152,3	49,5	21,0	10,9	6,7	4,6
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}20$	148,3	48,1	21,5	11,4	7,3	5,1
		Cusum-Res $r = 0{,}40$	162,0	51,9	20,6	9,8	5,4	3,3
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	140,6	46,2	20,7	11,3	6,9	4,5
		MLD-CEP	**254,4**	**189,8**	**132,1**	**61,4**	**21,9**	**10,5**
		Shewhart – Obs.	187,1	65,8	26,7	12,3	6,0	3,2
		Shewhart – Res.	317,2	209,4	117,0	50,4	15,1	4,1

Tabela 10 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}4$ **e** $\psi = 0{,}5$) – II

$\psi = 0{,}5$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ		**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,4	0,5	Cusum-Obs $r = 0{,}20$	36,1	14,7	9,2	6,8	5,4	4,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	37,0	14,1	8,5	6,2	4,9	4,1
		Cusum-Res $r = 0{,}20$	36,4	13,8	8,3	5,9	4,6	3,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	36,7	14,0	8,4	6,0	4,7	3,8
	1,0	Cusum-Obs $r = 0{,}40$	40,3	12,9	7,4	5,2	4,0	3,3
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}10$	40,5	13,3	7,5	5,2	4,0	3,3
		Cusum-Res $r = 0{,}30$	40,5	13,0	7,4	5,1	3,9	3,2
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	42,1	13,3	7,4	5,1	3,9	3,1
	2,0	Cusum-Obs $r = 1{,}00$	77,6	17,1	7,1	4,1	2,9	2,2
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}35$	75,7	17,6	7,3	4,2	3,0	2,4
		Cusum-Res $r = 0{,}80$	86,5	18,8	7,3	4,1	2,7	2,1
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}30$	74,7	17,7	7,5	4,3	3,0	2,3
		MLD-CEP	**86,3** $\delta^* = 0{,}5$	**10,9** $\delta^* = 0{,}5$	**5,8** $\delta^* = 0{,}5$	**3,3** $\delta^* = 1{,}0$	**2,1** $\delta^* = 1{,}0$	**1,3** $\delta^* = 1{,}0$
		Shewh.–Obs.	160,9	47,0	16,4	7,2	3,6	2,2
		Shewh.–Res.	205,4	74,4	29,2	12,0	5,5	2,8

Tabela 11 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}4$ **e** $\psi = 0{,}9$) – II

$\psi = 0{,}9$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ		**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,4	0,5	Cusum-Obs $r = 0{,}20$	43,1	117,7	11,0	8,0	6,3	5,3
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	44,9	16,5	10,0	7,2	5,5	4,6
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	43,6	18,7	11,7	8,4	6,6	5,4
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	44,9	16,6	9,8	6,9	5,3	4,2
	1,0	Cusum-Obs $r = 0{,}40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}10$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0{,}30$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
	2,0	Cusum-Obs $r = 1{,}25$	101,1	25,1	9,4	5,0	3,2	2,4
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}20$	89,8	22,3	9,2	5,1	3,5	2,6
		Cusum-Res $r = 0{,}40$	96,7	22,6	8,8	4,8	3,2	2,3
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	84,2	21,2	9,1	5,2	3,5	2,6
		MLD-CEP	27,9 $\delta^* = 0{,}5$	12,1 $\delta^* = 0{,}5$	6,8 $\delta^* = 1{,}0$	4,3 $\delta^* = 1{,}0$	2,6 $\delta^* = 2{,}0$	1,7 $\delta^* = 2{,}0$
		Shewh – Obs.	162,5	48,2	17,5	7,8	4,0	2,3
		Shewh – Res.	232,2	98,9	40,5	17,2	7,4	3,5

Tabela 12 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}8$ **e** $\psi = 0{,}5$) – II

$\psi = 0{,}5$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ		**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,8	0,5	Cusum-Obs $r = 0{,}20$	71,3	29,4	18,2	13,0	10,2	8,4
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	71,9	28,0	16,2	10,4	7,9	6,1
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
	1,0	Cusum-Obs $r = 0{,}50$	83,3	26,8	14,2	8,3	6,9	5,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	78,1	27,1	14,9	10,1	7,7	6,2
		Cusum-Res $r = 0{,}20$	81,5	26,2	13,4	8,4	5,9	4,4
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	80,3	26,9	14,0	8,8	6,2	4,6
	2,0	Cusum-Obs $r = 1{,}50$	135,3	38,6	14,7	6,8	13,9	2,5
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}35$	127,2	36,2	14,2	7,3	4,4	3,1
		Cusum-Res $r = 0{,}50$	135,8	37,1	13,5	6,4	3,7	2,6
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}15$	119,1	34,2	14,0	7,3	4,4	3,1
		MLD-CEP	**175,2** $\delta^* = 0{,}5$	**62,1** $\delta^* = 0{,}5$	**18,7** $\delta^* = 0{,}5$	**9,8** $\delta^* = 0{,}5$	**7,5** $\delta^* = 0{,}5$	**5,5** $\delta^* = 0{,}5$
		Shewh – Obs.	176,3	56,4	21,8	9,5	4,8	2,6
		Shewh – Res.	291,8	173,9	87,8	46,6	16,5	6,1

Tabela 13 - Valores obtidos pelo MLD-CEP e comparados ($\phi = 0{,}8$ **e** $\psi = 0{,}9$) – II

$\psi = 0{,}9$			$\delta = (\xi - \xi_0)/\sigma_x$					
ϕ		**Gráfico**	**0,5**	**1,0**	**1,5**	**2,0**	**2,5**	**3,0**
0,8	0,5	Cusum-Obs $r = 0{,}20$	96,3	41,3	25,7	18,4	14,2	11,7
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	108,4	38,6	20,5	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
	1,0	Cusum-Obs $r = 0{,}40$	103,4	38,0	21,8	14,6	11,2	8,9
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}05$	108,4	38,6	20,1	13,6	10,0	7,9
		Cusum-Res $r = 0{,}10$	97,7	38,2	21,6	14,4	10,3	7,8
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}05$	113,2	39,2	19,9	12,2	8,3	5,9
	2,0	Cusum-Obs $r = 1{,}25$	152,3	49,5	21,0	10,9	6,7	4,6
		EWMA–Obs $\lambda = 0{,}20$	148,3	48,1	21,5	11,4	7,3	5,1
		Cusum-Res $r = 0{,}40$	162,0	51,9	20,6	9,8	5,4	3,3
		EWMA–Res $\lambda = 0{,}10$	140,6	46,2	20,7	11,3	6,9	4,5
		MLD-CEP	**63,7** $\delta^* = 0{,}5$	**28,4** $\delta^* = 0{,}5$	**16,8** $\delta^* = 0{,}5$	**12,2** $\delta^* = 0{,}5$	**9,5** $\delta^* = 1{,}0$	**7,1** $\delta^* = 1{,}0$
		Shewh – Obs.	187,1	65,8	26,7	12,3	6,0	3,2
		Shewh – Res.	317,2	209,4	117,0	50,4	15,1	4,1

Observando os resultados obtidos, vê-se que, para processos com$(\phi,\psi)=(0{,}4/0{,}5)$, o *design* do MLD-CEP, com $\delta^*=0{,}5$, mostrou-se bastante competitivo, versus os demais esquemas analisados, na detecção de *shifts* iguais ou superiores a 1 desvio-padrão. Tal esquema conduz a $\rho=\phi\psi=0{,}20$, portanto, um nível de autocorrelação baixo.

Os melhores resultados para o MLD-CEP, considerando a mesma comparação já comentada, foram conquistados para $(\phi,\psi)=(0{,}4/0{,}9)$, com $\delta^*=0{,}5$, ou seja, $\rho=\phi\psi=0{,}36$, nível ainda relativamente baixo de autocorrelação. Para tais valores de ϕ e ψ, o desempenho foi superior a todos os outros modelos, inclusive para detectar pequenos *shifts* na média do processo.

Para um nível moderadamente alto de autocorrelação, $\rho=\phi\psi=0{,}72$, $(\phi,\psi)=(0{,}8/0{,}9)$ e $\delta^*=0{,}5$, também conduziu a bons resultados, principalmente na detecção de shifts pequenos a moderados, como poder ser observado na Tabela 9.

Os piores resultados foram para $(\phi,\psi)=(0{,}8/0{,}5)\therefore\rho=0{,}40$, tais valores conduziram a um desempenho inferior em relação a todos os outros modelos, somente tendo um resultado satisfatório quando comparado ao modelo de Shewhart com resíduos para $\delta^*=0{,}5$.

Note-se que não se pode generalizar o conjunto de situações em que o MLD-CEP é superior aos demais esquemas apenas em função de ρ, pois seus melhores resultados foram para $\rho=0{,}36$, seguidos dos resultados para $\rho=0{,}20$, depois para $\rho=0{,}72$, e seus piores resultados foram para $\rho=0{,}40$. Não há uma regularidade em termos de valores altos ou baixos para ρ, uma monotonicidade da relação, e o melhor e o pior de todos os desempenhos ocorreram para valores intermediários e muito próximos de ρ (os dois mais próximos entre si dentre os 4 valores). O fator dominante parece ser o valor de ϕ, com os melhores desempenhos ocorrendo para $\phi=0{,}4$, e os piores, para $\phi=0{,}8$.

O MLD-CEP apresentou melhor desempenho para detectar pequenas alterações na média, independente do valor de ρ, quando comparado aos modelos de Shewhart-obs. e Shewhart-res.