

## 7

### Simulação Numérica das Equações de Navier-Stokes usando SPH

Os escoamentos de fluidos podem ser descritos, matematicamente, por um conjunto de equações baseadas em princípios físicos. A esse conjunto de equações dá-se o nome de *equações de Navier-Stokes*. Diferentes formas dessas equações podem ser empregadas para determinar o escoamento de um fluido, dependendo especificamente do problema físico.

Recorre-se, freqüentemente, a métodos experimentais para uma melhor compreensão desses fenômenos.<sup>1</sup> Devido às limitações de custo, tempo e equipamento, porém, é comum a realização de medidas no escoamento em apenas alguns pontos da região em que ocorrem os fenômenos de interesse.

Portanto, nem sempre os tratamentos teóricos e/ou experimentais são satisfatórios. São duas as principais razões para isso: (a) a equação que modela o fenômeno pode ser complexa; e (b) nem sempre o fenômeno é passível de reprodução em laboratório, mesmo em escala reduzida, devido às limitações de custo, tempo e equipamentos.

Com o advento do computador nos últimos anos, surgiu uma terceira alternativa para o estudo do movimento de fluidos: a simulação numérica. A *dinâmica dos fluidos computacional* (DFC) é a área da computação científica que estuda métodos computacionais para a simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento. A DFC complementa estudos em que análises teóricas ou experimentos em laboratório não são suficientes, por razões de complexidade, custo e tempo, possibilitando um maior entendimento dos fenômenos físicos envolvidos.

Apesar de toda a flexibilidade encontrada em DFC, ela ainda não pode resolver todos problemas reais que envolvem escoamentos de fluidos. Existem situações extremamente difíceis de serem modeladas e transformadas em equações para tratamento numérico. Em geral, a DFC apresenta um conjunto versátil de algoritmos para a solução numérica de problemas que envolvem escoamentos de fluidos. A aplicabilidade de cada algoritmo depende da situação

<sup>1</sup>Historicamente, a mecânica dos fluidos preocupou-se em estudar o comportamento desses elementos de forma experimental, muito antes do que de forma matemática. Isso explica o surgimento da hidráulica antes da hidrodinâmica.

tratada, sendo importante que o usuário conheça, tanto os aspectos físicos do problema, quanto os aspectos numéricos da metodologia de solução adotada.

Pode-se dividir os métodos numéricos de simulações de escoamentos de fluidos em duas classes: métodos eulerianos e métodos lagrangeanos.

Em métodos eulerianos, tais como o método das diferenças finitas (MDF), a discretização do fluido é definida no interior das células de uma malha retangular uniforme, definida em todo o domínio da simulação. A discretização em métodos eulerianos é fixa no espaço e, portanto, tal classe de métodos tem algumas dificuldades, dentre elas: representar domínios complexos, difusão numérica e captura de superfícies livres.

Os métodos lagrangeanos dividem-se em duas categorias: métodos com malhas e métodos sem malha. Ao contrário dos métodos eulerianos, em métodos lagrangeanos que utilizam malhas, estas são utilizadas para representar somente o fluido, possuindo células irregulares que movimentam-se dinamicamente com o fluido. Conseqüentemente, grandes deformações no fluido resultam em grandes deformações nas células da malha. O principal representante dessa sub-classe de métodos é o método dos elementos finitos (MEF).

Os métodos numéricos convencionais, tais como os métodos das diferenças finitas (MDF) e dos elementos finitos (MEF), têm sido vastamente aplicados em DF e, portanto, ainda predominam em simulações numéricas de escoamentos de fluidos. Mesmo sendo a classe de métodos dominantes, métodos que se baseiam em malhas para obter a discretização dos operadores diferenciais envolvidos nas equações, têm algumas dificuldades inerentes à sua formulação, já citadas anteriormente, o que impossibilita a sua aplicação para muitos problemas.

Essas dificuldades ficam bastantes evidentes quando esses métodos são utilizados para simular fenômenos hidrodinâmicos, tais como explosão e impacto em alta velocidade. Nesses problemas, grandes distorções nos elementos da malha são inevitáveis em MEF, causando erros numéricos na solução do sistema, enquanto em MDF a captura da superfície livre do fluido não é uma tarefa simples.

O método SPH apresentado nesta tese faz parte de uma classe de métodos lagrangeanos que, ao invés de uma malha, utilizam uma discretização material do fluido. Um excelente trabalho de revisão sobre métodos sem malhas foi feito por Li e Liu (56).

Em particular, o método SPH é utilizado em várias simulações de escoamentos de fluidos bifásicos. Tartakovsky e Meakin (102) discretizam as duas fases com SPH, onde, para evitar tensões superficiais artificiais, eles

utilizam uma versão modificada do método SPH. Colagrossi e Landrini (19) utilizam uma variante do método SPH para corrigir a velocidade, chamada de XSPH (70), para simular escoamentos bifásicos.

Muitos dos métodos propostos para simular escoamentos bifásicos usam malhas eulerianas sobre todo o domínio onde as equações são resolvidas. Para capturar a interface entre as duas fases utiliza-se alguma técnica de captura (26).

Por último, Liu, Koshizuka e Oka (59) desenvolveram um método híbrido de partículas-malha para simular escoamentos multifásicos. A fase mais densa é representada por partículas (método Moving Particle Semi-Implicit (52)), enquanto uma malha discretiza o fluido menos denso (método Volume-of-fluid (47)).

Nesta tese, a representação de ambas as fases é feita usando o método SPH. Além disso, a pressão é implicitamente calculada evitando uma equação do estado (73).

## **7.1**

### **SPH Navier-Stokes**

Nos trabalhos originais de Lucy (65) e Gingold e Monaghan (39), fluidos compressíveis são simulados pelo método SPH, onde a pressão é obtida através de uma equação termodinâmica, isto é, uma equação que relaciona a pressão às grandezas termodinâmicas do escoamento. Posteriormente, Monaghan (70) representou um fluido incompressível através de um fluido quasi-compressível com alta velocidade do som, onde a pressão é calculada através de uma equação de estado (9). Os resultados utilizando essa abordagem são aceitáveis em algumas aplicações, como por exemplo para simulações de superfície livre (Figura 7.1) com baixos números de Reynolds (77). Em escoamentos confinados e com altos números de Reynolds, porém, essa abordagem requer um passo de tempo de integração muito pequeno (21).

No método apresentado, a incompressibilidade do escoamento é obtida através do cálculo da pressão por uma equação de Poisson. Ao contrário de outros métodos, onde a pressão é obtida em uma malha (29, 25, 83, 95), na discretização da equação de Poisson apresentada nesta tese, utilizam-se as partículas da discretização como estrutura, isto é, a equação de Poisson é resolvida diretamente nas partículas, ao invés de a pressão ser obtida em uma malha e da necessidade de interpolações partícula-malha-partícula.

Cada passo no tempo é simulado em duas etapas. A primeira delas obtém um campo intermediário de velocidades, sem garantir a incompressibilidade do escoamento. Na segunda etapa, o campo de velocidade é projetado em um

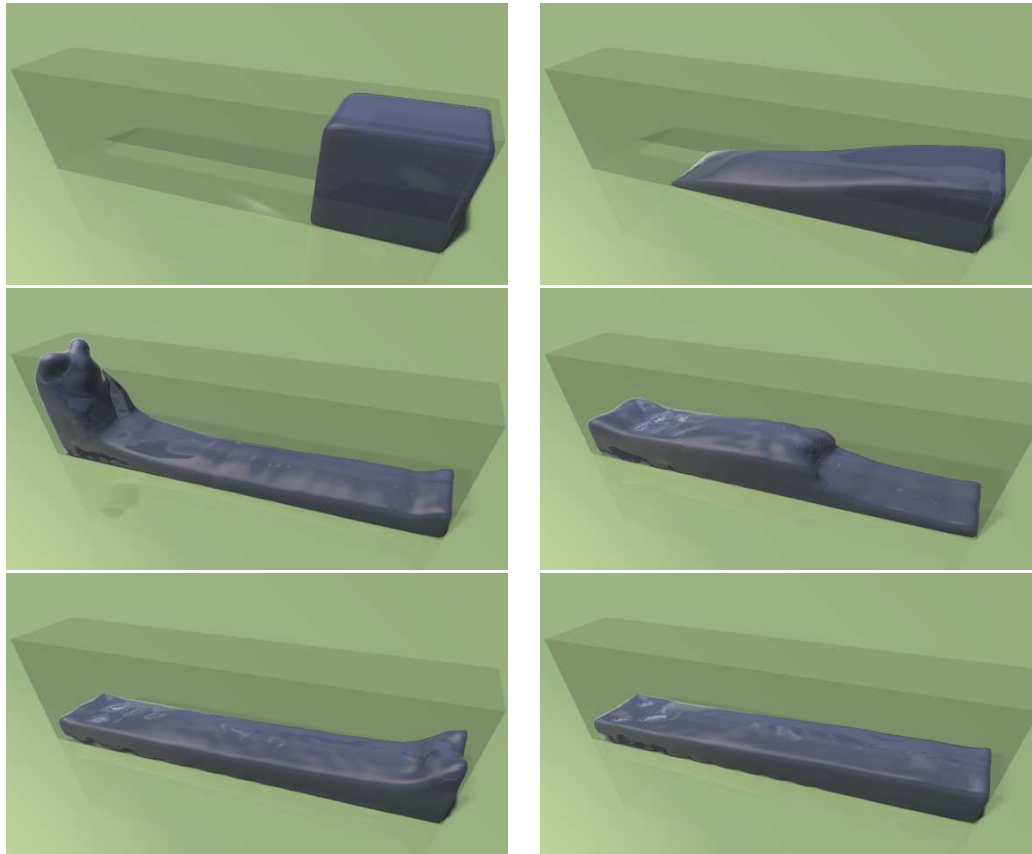


Figura 7.1: Simulação numérica usando SPH com a pressão sendo calculada por uma equação do estado.

espaço de divergência livre. O campo projetado garante a incompressibilidade do escoamento.

### Campo de velocidade intermediário

No primeiro sistema, utilizado para obter um campo de velocidade sem a restrição de incompressibilidade

$$S_1 \begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nu \Delta^n \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \\ \mathbf{v} = 0 \quad \text{em } \delta\Omega \end{cases}$$

o termo viscoso  $\nu \Delta^n \mathbf{v}$  precisa ser discretizado utilizando algum operador SPH.

Em algumas implementações do método SPH a viscosidade artificial, introduzida para modelar frente de choques (72), é utilizada para modelar a força viscosa real, dada pelo termo

$$\nu \Delta^n \mathbf{v},$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido (66, 21, 22, 5). Morris, Fox e Zhu (77) afirmam que a viscosidade artificial utilizada como a viscosidade real gera perfis de velocidades indesejados na simulação. Outras expressões têm sido utilizadas para calcular a força viscosa real, algumas utilizando somas de somas (105) (e, portanto, dobrando o esforço computacional), e outras utilizam a derivada segunda do núcleo para aproximar a viscosidade (79, 101), tornando o método susceptível a erros numéricos (77).

Em nossa implementação, a aproximação para o termo viscoso proposto por Morris et al (77) é utilizada

$$(\nu \Delta^n \mathbf{v})_i = \sum_j \frac{m_j (\mu_i + \mu_j) \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \nabla_i W_{ij}}{\rho_i \rho_j |\mathbf{r}_{ij}|^2},$$

onde  $\nu = \mu/\rho$ , e as diferenças entre as posições e as velocidades das partículas  $i$  e  $j$  são denotadas por  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  e  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$ , respectivamente. Esta expressão é similar àquela utilizada por Monaghan (71) para modelar condução do calor.

A integração numérica, em função do tempo nas equações de Navier-Stokes, é calculada utilizando um método de integração numérica temporal explícito. Embora outros métodos explícitos de ordens maiores possam ser utilizados, o método de Euler de primeira ordem foi utilizado nesta tese.

Portanto, o campo  $\mathbf{v}^*$  é obtido pela seguinte expressão

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \Delta t \sum_j \frac{m_j (\mu_i + \mu_j) \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \nabla_i W_{ij}}{\rho_i \rho_j |\mathbf{r}_{ij}|^2}, \quad (7-1)$$

onde  $\Delta t$  é a discretização temporal.

A restrição

$$\mathbf{v}^* = 0 \quad \text{em } \delta\Omega$$

é aplicada ao campo obtido em 7-1 utilizando o conceito de camada-limite. Na camada-limite, a velocidade varia de zero, na superfície sólida, até a velocidade  $\mathbf{v}_\infty$ , na fronteira da camada-limite. A velocidade  $\mathbf{v}_\infty$  é a velocidade do escoamento livre em relação à fronteira do domínio.

A Figura 7.2 ilustra o efeito causado pela camada-limite em um campo de velocidade. No lado esquerdo, a figura 7.2(a) ilustra um campo obtido pela aproximação 7-1. Após a aplicação da camada-limite o campo de velocidade  $\mathbf{v}^*$  obedece à restrição  $\mathbf{v}^* = 0$  na fronteira do domínio, a figura 7.2(b) ilustra o campo resultante do sistema  $S_1$ .

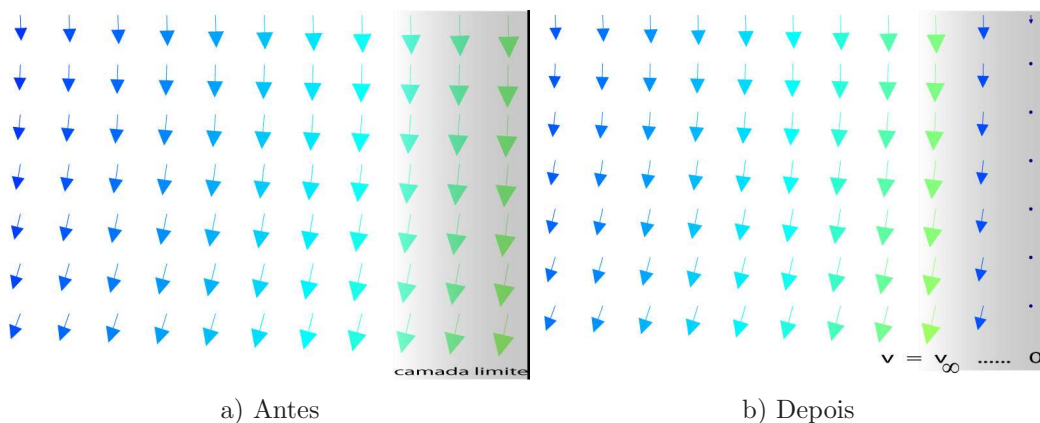


Figura 7.2: O campo de velocidade  $\mathbf{v}^*$  obtido através do sistema  $S_1$  é ilustrado na figura da direita. Na figura da esquerda é ilustrado o campo de velocidade obtido pela equação (7-1), junto com a camada-limite, onde é aplicada a condição de fronteira  $\mathbf{v}^* = 0$ . A escala de cor na camada-limite representa a variação da velocidade. De zero, na superfície sólida, até a velocidade  $\mathbf{v}_\infty$ , na fronteira da camada-limite.

### Projeção no espaço de divergência livre

A segunda etapa no método é dada pela solução do segundo sistema

$$S_2 \begin{cases} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ em } \delta\Omega \end{cases}$$

Utilizando o campo de velocidade  $\mathbf{v}^*$  obtido no primeiro sistema  $S_1$ , objetiva-se obter um novo campo de velocidade  $\mathbf{v}$  tal que a condição de incompressibilidade seja satisfeita. Para isso, discretizamos a derivada material da seguinte forma:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^*}{\Delta t},$$

donde, devido à condição de incompressibilidade desejada  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho}\nabla p \right) &= \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \end{aligned} \tag{7-2}$$

A equação obtida em 7-2 é uma equação de Poisson, onde a solução a ser obtida é a pressão do escoamento. A discretização dessa equação de Poisson,

é dada pelo operador divergente SPH diferença (capítulo 3)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}^*)_i = \sum_{j \in \mathbf{V}_i} m_j (\mathbf{v}_j^* - \mathbf{v}_i^*) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$$

e pelo operador laplaciano SPH Taylor (capítulo 3) aplicado aos termos da seguinte identidade:

$$\nabla \cdot (k \nabla p) = \frac{1}{2} (\Delta(kp) - p \Delta k + k \Delta p)$$

com  $k = \frac{1}{\rho}$ . Tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(kp) &= 2 \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(k_i p_i - k_j p_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ p \Delta k &= 2 \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(k_i p_i - k_j p_i)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ k \Delta p &= 2 \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(k_i p_i - k_i p_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (7-3)$$

donde, a aproximação é obtida para o termo

$$\nabla \cdot (k \nabla p) = \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(k_i + k_j)(p_i - p_j)}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j).$$

Cleary e Monaghan (18) propõem substituir

$$k_i + k_j \longrightarrow \frac{4k_i k_j}{k_i + k_j}$$

no caso da variável  $k$  ter uma descontinuidade. Em nosso problema a variável  $k = \frac{1}{\rho}$  pode ser descontínua, como, por exemplo, em escoamentos bifásicos, onde na interface entre os dois fluidos a densidade é descontínua. Portanto, reescrevemos o laplaciano como

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \sum_{j \in \mathbf{V}_i} \frac{m_j}{\rho_j} \left( \frac{4}{\rho_i + \rho_j} \right) p_{ij} \frac{\mathbf{x}_{ij}}{|\mathbf{x}_{ij}|} \nabla_i W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

onde  $p_{ij} = p_i - p_j$  e  $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$

No sistema  $S_2$  a condição de fronteira a ser imposta é dada pelo gradiente da pressão na direção normal a fronteira  $S = \delta\Omega$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Nesse método a condição de fronteira acima é imposta usando partículas

fantasmas, cujas posições são dinamicamente definidas de acordo com as partículas da discretização. O efeito dessas partículas é implicitamente incluído nas aproximações SPH da seguinte maneira: dada uma partícula  $i$  próxima à fronteira  $S$ , cada iteração com uma partícula vizinha  $j$  pode gerar uma nova iteração com uma partícula-fantasma  $j_{ghost}$ . Sendo que a partícula fantasma tem as seguintes propriedades:

- *posição*: a posição da partícula-fantasma  $j_{ghost}$  é encontrada pela reflexão da partícula  $j$  sobre a superfície  $S$ ;
- *velocidade*: a velocidade da partícula-fantasma  $j_{ghost}$  é dada pela velocidade do escoamento prescrita na fronteira; por exemplo, em nossas simulações a condição no-slip é imposta. Portanto, uma partícula-fantasma tem velocidade nula  $\mathbf{v} = 0$ ;
- *pressão*: a pressão da partícula-fantasma  $j_{ghost}$  é definida igual à pressão da partícula  $j$ .

Por último, obtém-se o novo campo com divergência livre, fazendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (7-4)$$

onde a pressão  $p$  é obtida pela solução da equação de Poisson (7-2).

O seguinte pseudocódigo, destaca as principais etapas durante a simulação das equações de Navier-Stokes, na qual utiliza-se o método de descoplamento pressão-velocidade.



---

**Algorithm 1** Desacoplamento Pressão-Velocidade

---

**Require:**  $n$  partículas

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$$\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i^t + \Delta t \mathbf{v}_i^t$$

**end for**

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i^t + \Delta t \left( \frac{1}{\rho} \Delta^n \mathbf{v} \right)_i^{h,t}$$

**end for**

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

CondiçãoFronteiraDirichlet( $\mathbf{v}_i^*$ )

**end for**

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$$\text{MontaMatriz} \left( \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}^*)_i^h}{\Delta t} = \left( \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) \right)_i^{h,t} \right)$$

**end for**

ResolveSistema()

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^* - \Delta t \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right)_i^{h,t+1}$$

**end for**

**for**  $i = 1$  to  $n$  **do**

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \Delta t \left( \frac{\mathbf{v}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1}}{2} \right)$$

**end for**

---

## 7.2 Resultados

### Vortex spin-down

A seção de resultados inicia-se com o escoamento monofásico conhecido como *vortex spin-down*. Um fluido confinado no domínio  $\Omega = [0, 1]^2$  é discretizado por 14.273 partículas. A velocidade inicial  $\mathbf{v} = (u, v)$  em cada partícula é dada por

$$u(x, y) = 0.25(y - 0.5)$$

$$v(x, y) = 0.25(0.5 - x)$$

onde  $(x, y)$  é a posição da partícula. O campo de velocidades inicial é ilustrado na Figura 7.3 em um reticulado uniforme.

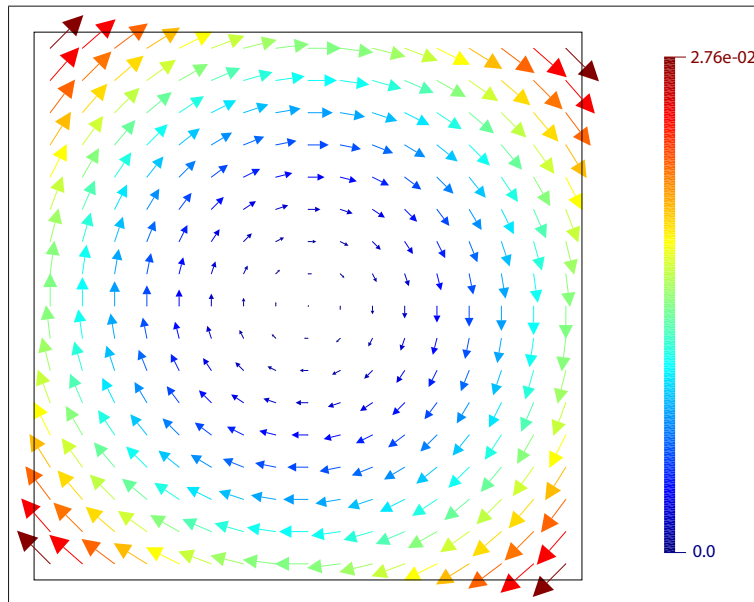


Figura 7.3: Campo de velocidades inicial do escoamento monofásico conhecido como vortex spin-down.

Outros parâmetros da simulação são dados pela seguinte tabela (7.1).

Vortex spin-down	
gravidade	0,0
viscosidade	0,00118
$\Delta t$	0,001

Tabela 7.1: Parâmetros da simulação.

O perfil de velocidade do escoamento é mostrado na Figura 7.4. Os mapas de cores estão associados à magnitude da velocidade na partícula, variando da mais alta velocidade na cor vermelha, para a mais baixa na cor azul.

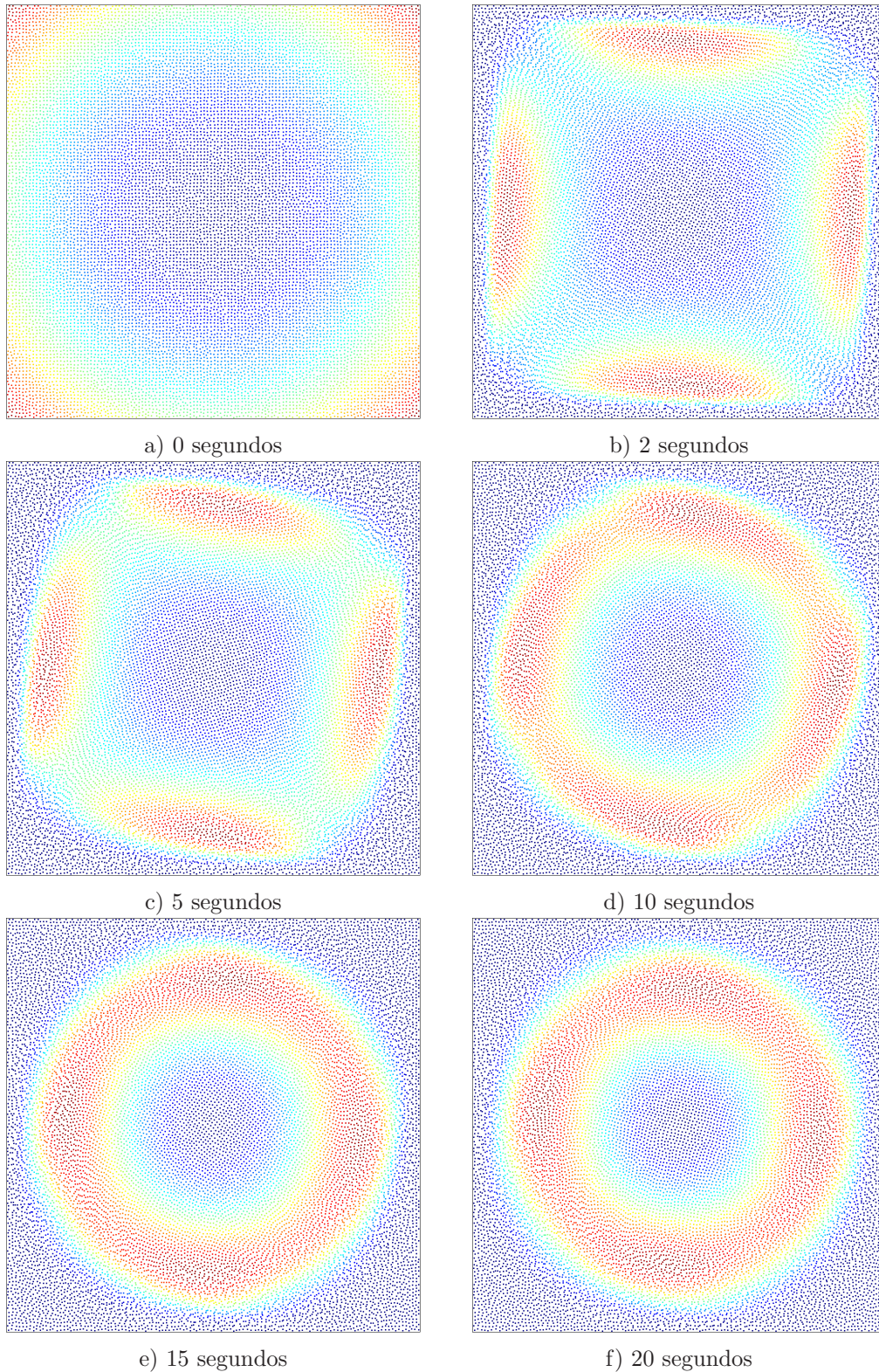


Figura 7.4: Problema vortex spin-down: o domínio  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  é discretizado com 14.273 partículas. A velocidade inicial em cada partícula é dada por  $\mathbf{v} = (0.25(y - 0.5), 0.25(0.5 - x))$ . O perfil de velocidade do escoamento é ilustrado, onde os mapas de cores associam à cada partícula a magnitude da velocidade da mesma, variando da mais alta velocidade na cor vermelha, para a mais baixa na cor azul. Tempos: 0, 2, 5, 10, 15 e 20 segundos.

Ao longo dessa simulação, para manter a incompressibilidade do escoamento, o surgimento de pequenos vórtices nos quatro cantos do domínio, além do vórtice central, são esperados. A Figura 7.5 destaca o canto inferior direito do domínio  $\Omega$  no instante de tempo dez segundos. Na Figura 7.5(a) o campo de velocidade normalizado é ilustrado em algumas partículas da simulação, onde o mapa de cores associa a cada vetor a magnitude do mesmo. Na figura 7.5(b) algumas linhas integrais são ilustradas sobre o mapa de cores da magnitude da velocidade do escoamento. Observa-se o vórtice criado durante a simulação para manter a incompressibilidade da mesma.

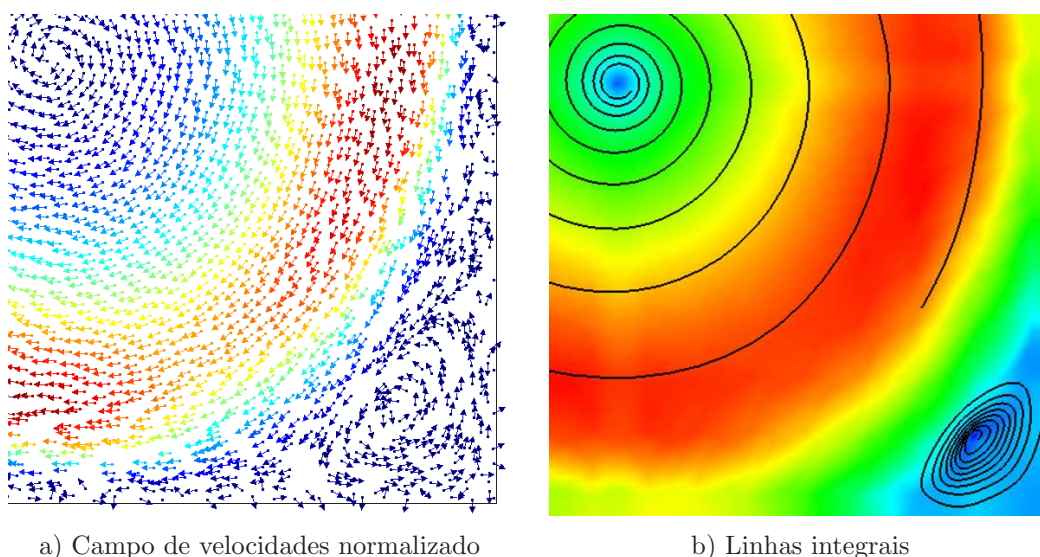


Figura 7.5: Problema vortex spin-down. Uma região do domínio  $\Omega$  é destacada. Em 7.5(a) o campo de velocidade normalizado é ilustrado, onde o mapa de cores associa a cada vetor a magnitude do mesmo. Em 7.5(b) algumas linhas integrais são ilustradas sobre o mapa de cores da magnitude da velocidade do escoamento. O instante de tempo da simulação é de dez segundos.

A Figura 7.6 ilustra o mesmo problema, com a viscosidade, porém, maior. A mesma configuração inicial para o escoamento ilustrado nas Figuras 7.4 e 7.5 é utilizada, exceto para o coeficiente de viscosidade, que agora é igual a 0,0118. Esse coeficiente está relacionado à difusão do momento, ou seja, a difusão da velocidade do escoamento. Portanto, quanto maior o coeficiente de viscosidade  $\mu$ , maior a difusão do momento e conseqüentemente maior a perda de velocidade no escoamento.

A Figura 7.7 ilustra o decaimento da velocidade máxima durante as simulações para ambas as viscosidades. Para o fluido com maior viscosidade a velocidade do escoamento cai bruscamente. Enquanto a difusão da velocidade para o fluido de menor viscosidade ocorre de maneira mais lenta.

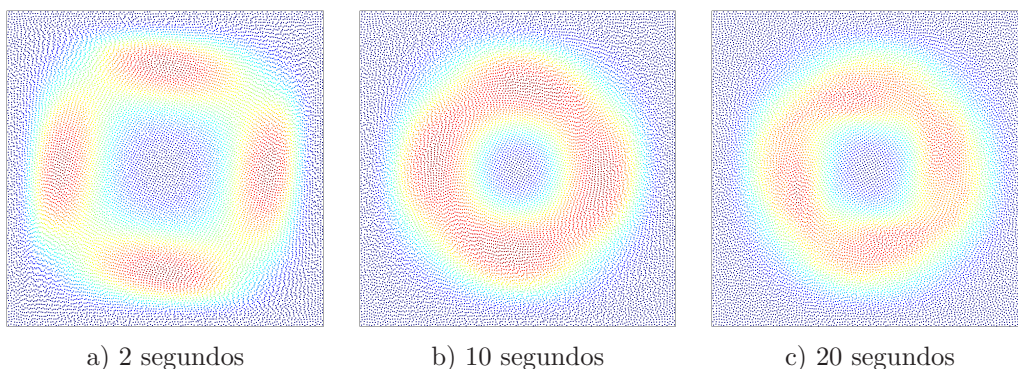


Figura 7.6: Problema vortex spin-down. O perfil de velocidade do escoamento é ilustrado, onde cada mapa de cores associa à cada partícula a magnitude da velocidade da mesma, variando da mais alta velocidade na cor vermelha, para a mais baixa na cor azul. Tempos: 0, 10 e 20 segundos. A mesma configuração inicial para o escoamento ilustrado nas Figuras 7.4 e 7.5 é utilizada, exceto para o coeficiente de viscosidade, que agora é igual a 0,0118. Quanto maior o coeficiente de viscosidade  $\mu$ , maior a difusão do momento e conseqüentemente maior a perda de velocidade no escoamento.

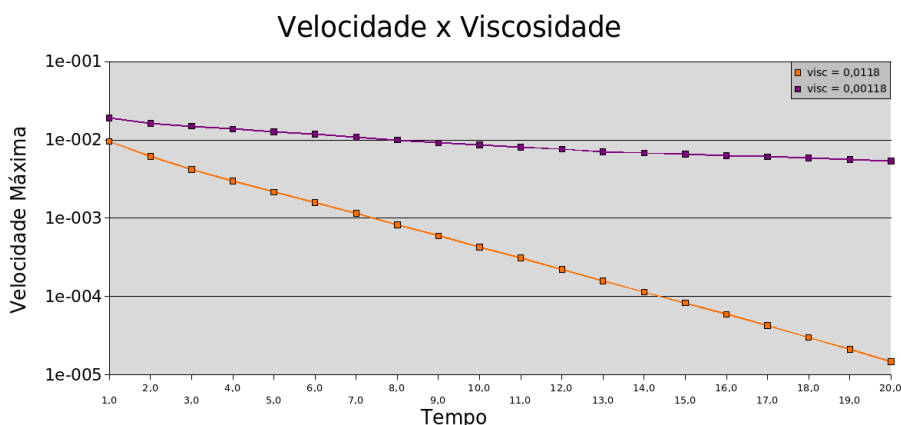


Figura 7.7: Ilustra-se a velocidade máxima nos escoamentos do problema vortex spin-down para ambas as viscosidades: alta 0,0118 e baixa 0,00118.

### Instabilidades de Rayleigh-Taylor

Nesse exemplo, a *instabilidade de Rayleigh-Taylor* é simulada pelo método proposto nesta tese. A instabilidade de Rayleigh-Taylor ocorre quando um fluido é acelerado dentro de outro fluido menos denso. Em nossa simulação isso ocorre quando um fluido de maior densidade é colocado sobre um fluido menos denso e um campo gravitacional é criado.

Uma das grandes vantagens do método SPH sobre os demais métodos com malhas é vista nesse exemplo. A interface entre dois diferentes fluidos é facilmente captada pelo método e pode ser visualizada durante toda a simulação, sem nenhum esforço adicional.

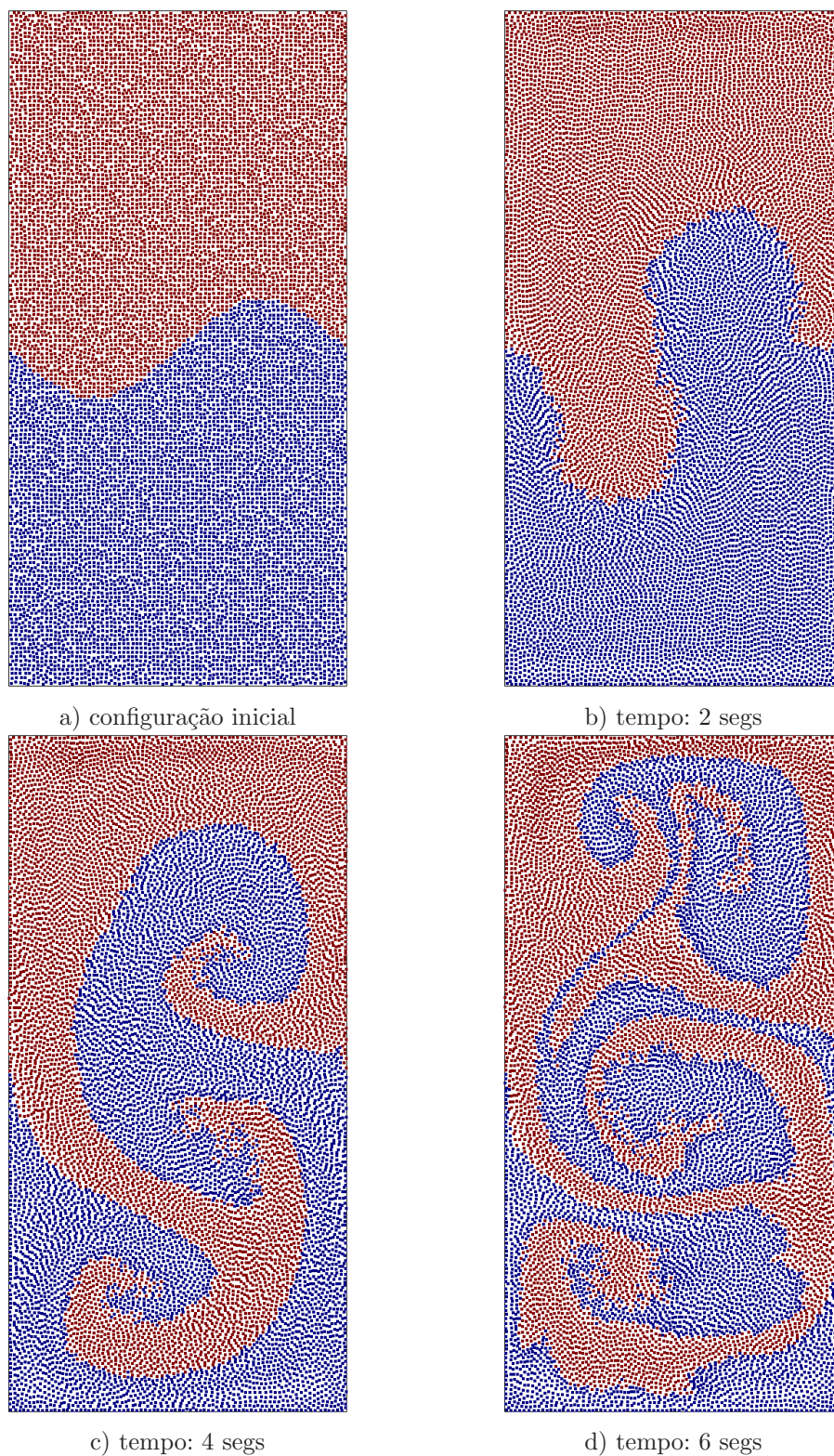


Figura 7.8: Instabilidade de Rayleigh-Taylor. Essa instabilidade ocorre quando um fluido é acelerado dentro de outro fluido menos denso. No método SPH, a dinâmica da instabilidade é facilmente acompanhada devido a visualização da interface entre os dois fluidos. As imagens da simulação nos instantes de tempos 0, 2, 4 e 6 segundos ilustram a instabilidade.

A dinâmica da instabilidade é vista na Figura 7.8, onde um fluido mais denso, em vermelho, tem densidade duas vezes maior do que o fluido menos denso, em azul.

O domínio  $\Omega = [-0,5; 0,5] \times [-1; 1]$  é representado por 12.400 partículas, cujas posições iniciais foram definidas pela distribuição do disco de Poisson. A interface entre os dois fluidos é inicialmente dada pela função

$$y = -0,15\text{sen}(2\pi x). \tag{7-5}$$

O fluido menos denso (densidade igual a 1,0) é representado por 6.200 partículas com massa 0,000385, enquanto que o fluido com a densidade duas vezes maior é representado por 6.200 partículas com massa 0,00077. Outros parâmetros definidos para a simulação dessa instabilidade são listados na tabela 7.2.

Instabilidade de Rayleigh-Taylor	
gravidade	1,0
viscosidade	0,0118
$\Delta t$	0,001

Tabela 7.2: Parâmetros da simulação.

No método proposto, um campo de pressões é calculado através de uma equação de Poisson, em cada instante de tempo. Daí, um campo de velocidades é obtido durante toda a simulação tendo divergência nula, garantindo a incompressibilidade do escoamento.

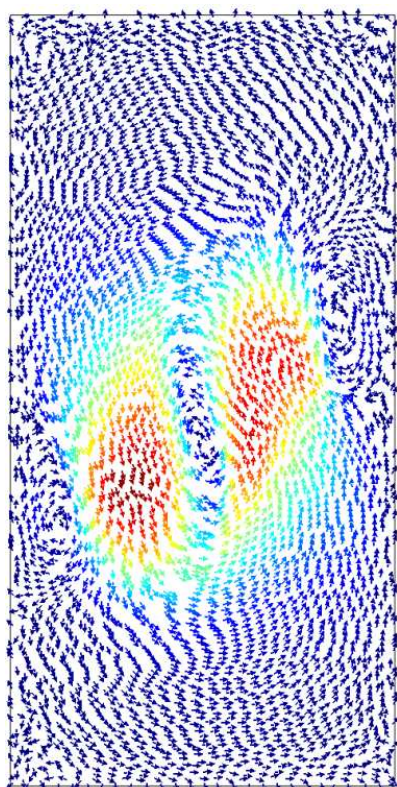
O campo de velocidades definido durante o escoamento é ilustrado na Figura 7.9 nos instantes de tempo dois e seis segundos (tempo real de simulação). O campo de velocidades é ilustrado em algumas partículas nas Figuras 7.9(a) e 7.9(c) e algumas linhas integrais, obtidas pela integração de um ponto ao longo de um campo aproximado (54), são desenhadas nas Figuras 7.9(b) e 7.9(d)

A mesma instabilidade é ilustrada na Figura 7.10. A interface entre os dois fluidos, porém, é inicialmente definida pela função

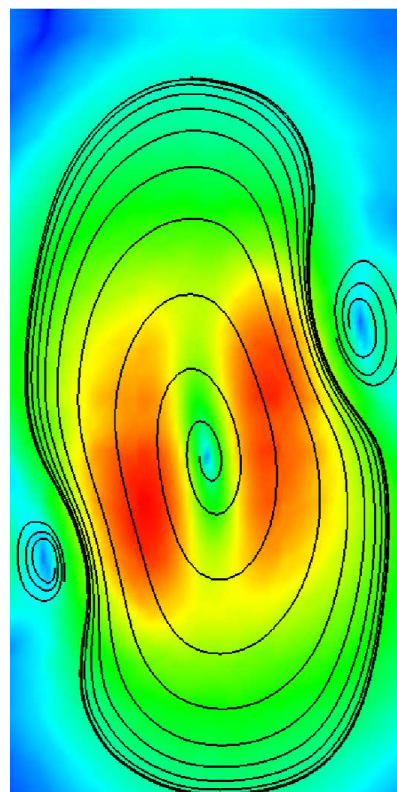
$$y = -0,15\text{sen}(\pi x), \tag{7-6}$$

onde o período é a metade do período da função (7-5) da simulação anterior.

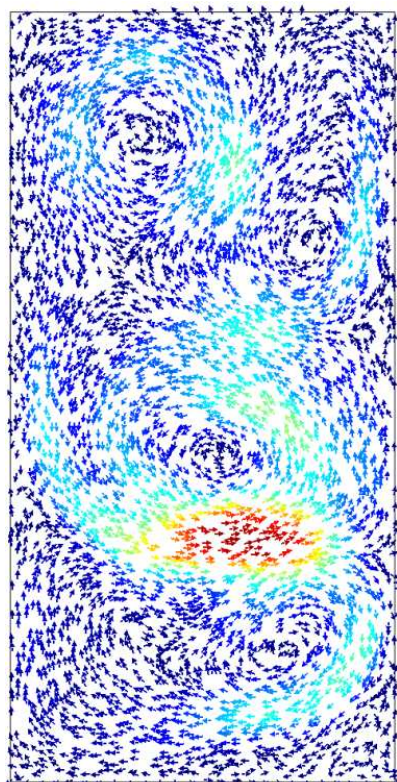
Novamente, cada fluido é representado por 6.200 partículas. Os outros parâmetros dessa simulação são os mesmos da simulação anterior e são listados na tabela (7.2).



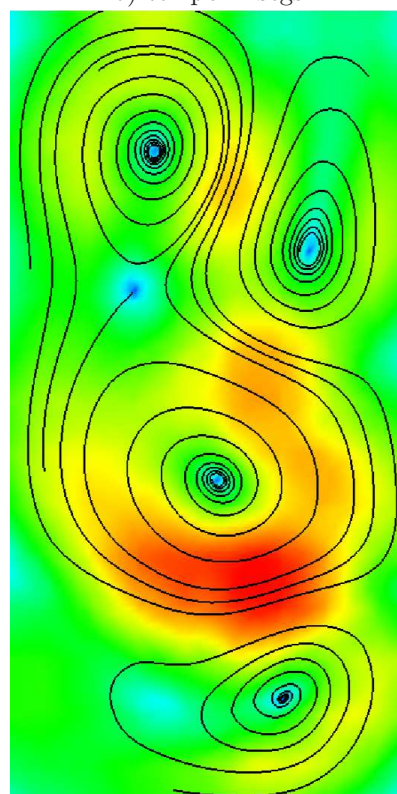
a) tempo: 2 segs



b) tempo: 2 segs



c) tempo: 6 segs



d) tempo: 6 segs

Figura 7.9: Os campos de velocidades do escoamento nos instantes de tempo dois e seis segundos são ilustrados em algumas partículas nas Figuras 7.9(a) e 7.9(c), respectivamente. Ao lado de cada campo, algumas linhas integrais do mesmo são mostradas.



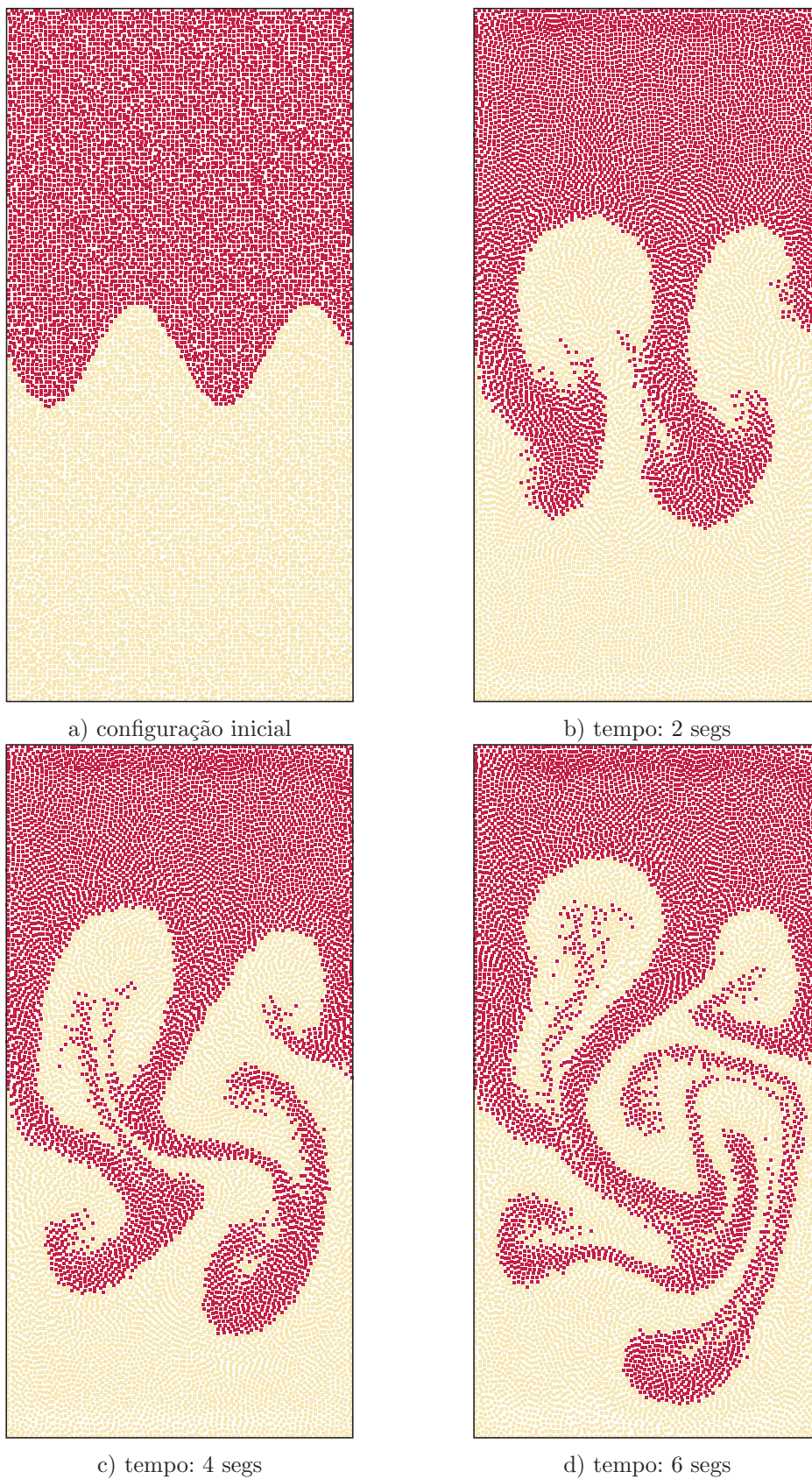
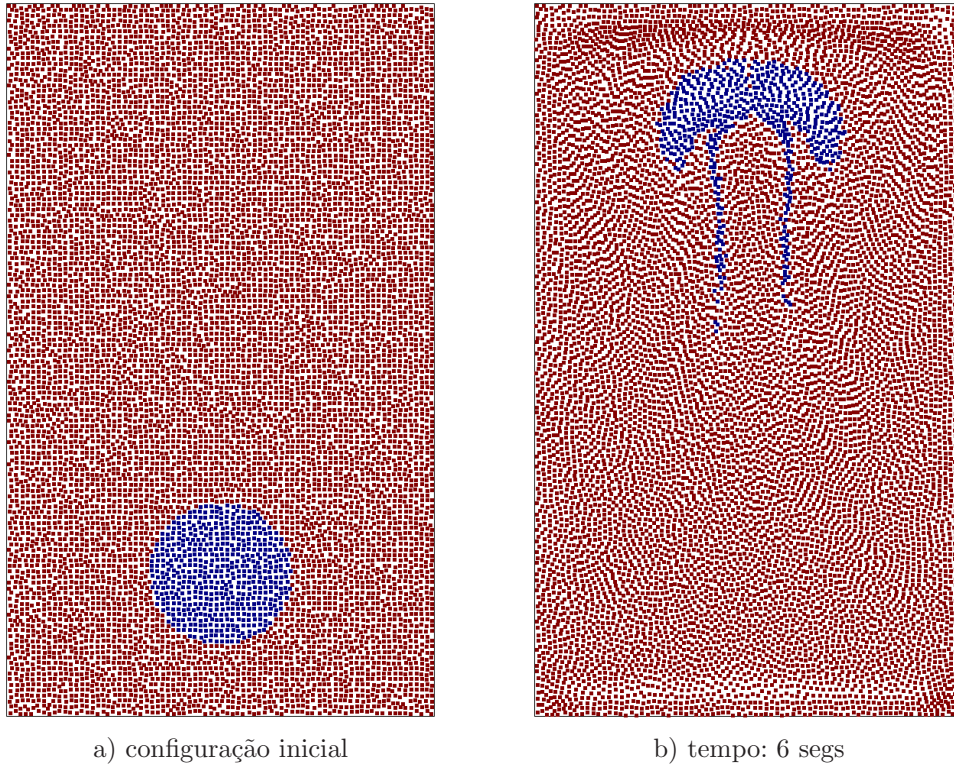


Figura 7.10: Instabilidades de Rayleigh-Taylor são criadas quando o fluido mais denso é acelerado para dentro do fluido menos denso. As imagens da simulação nos instantes de tempos 0, 2, 4 e 6 segundos ilustram a dinâmica das instabilidades.

### Gota

O próximo exemplo simula a *dinâmica de uma gota* fluindo em direção ao topo de um fluido mais denso. Quando um fluido contém em seu interior uma gota de um fluido menos denso, a gota fica sujeita a uma força de empuxo, fazendo com que ela suba até a superfície.



a) configuração inicial

b) tempo: 6 segs

Figura 7.11: A dinâmica de uma gota: um fluido mais denso contém em seu interior uma gota de um fluido mais leve. O empuxo agindo na gota gera um movimento da mesma em direção ao topo do fluido mais denso. A configuração inicial e o resultado após 6 segundos de simulação (tempo real) são ilustrados.

Na simulação, a densidade do fluido mais pesado é duas vezes a densidade do fluido mais leve (gota). A gota é discretizada por 547 partículas e o fluido mais denso por 9.873 partículas. A viscosidade do fluido e outros parâmetros da simulação são listados na tabela (7.3).

Dinâmica de uma bolha	
gravidade	1,0
viscosidade	0,0118
$\Delta t$	0,001

Tabela 7.3: Parâmetros da simulação.

Quando uma gota de um fluido é mergulhada em um fluido mais pesado, devido a diferença de densidade, a pressão calculada pelo método proposto

resulta em uma força de empuxo que age sobre a gota criando um movimento em direção ao topo do fluido mais denso (Figura 7.11). A forma esférica da gota é alterada para a forma de ferradura (Figura 7.12). Essa deformação também é observada em experimentos reais.

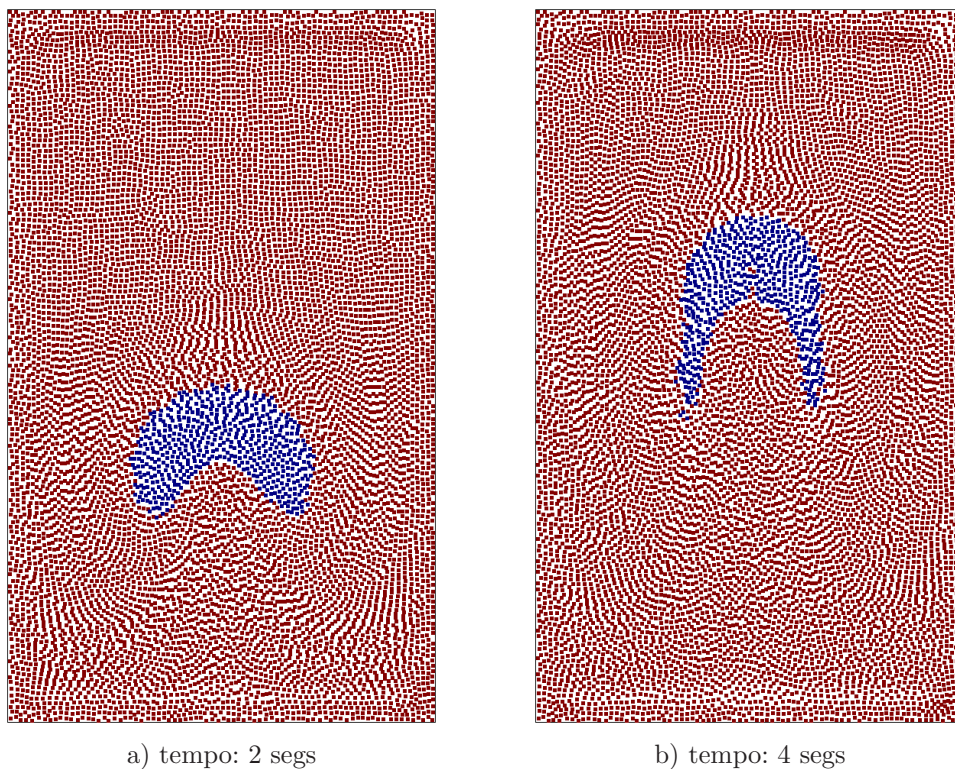
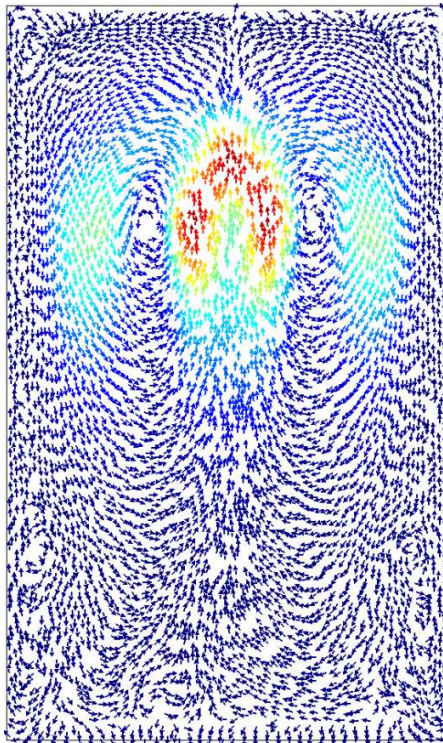


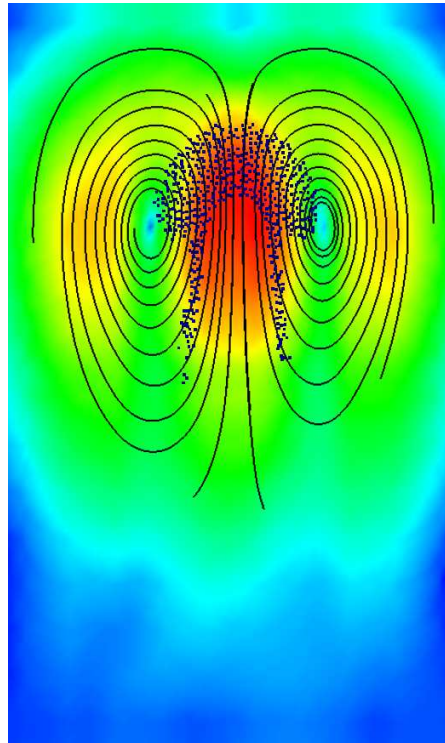
Figura 7.12: A dinâmica de uma gota: um fluido mais denso contém em seu interior uma gota de um fluido mais leve. A forma esférica da gota é alterada para a forma de ferradura; essa deformação também é observada em experimentos reais. A dinâmica da bolha com 2 e 4 segundos de simulação (tempos reais) são ilustradas.

Mais uma vez, pelo método proposto nesta tese, um campo de velocidades é obtido durante toda a simulação tendo divergência nula, através do cálculo da pressão por uma equação de Poisson. Garantindo, portanto, a incompressibilidade do escoamento.

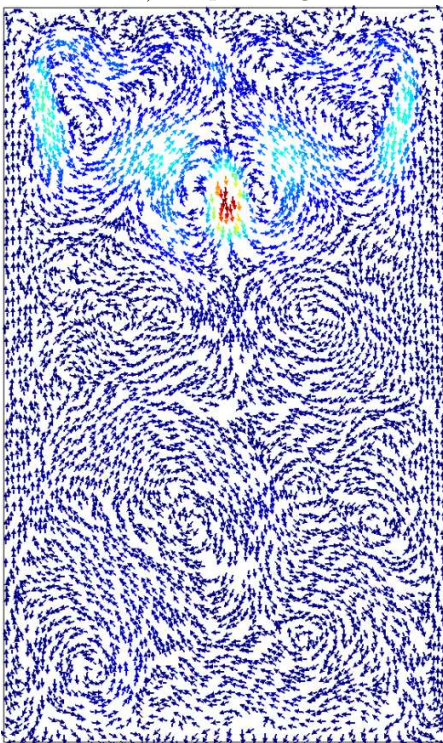
Na Figura 7.13 o campo de velocidades do escoamento é ilustrado. Na coluna da esquerda o vetor velocidade do escoamento é ilustrado em algumas partículas da discretização. Na coluna da direita, algumas linhas integrais, obtidas pela integração de um ponto inicial em um campo aproximado (54), são ilustradas. As partículas que representam a gota nessa simulação também são visualizadas na coluna da direita. Os mapas de cores em ambas as imagens representam a magnitude do campo de velocidade.



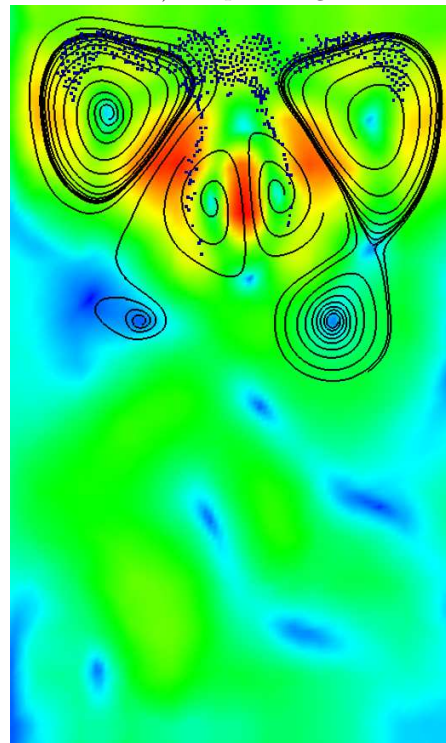
a) tempo: 5 segs



b) tempo: 5 segs



c) tempo: 10 segs



d) tempo: 10 segs

Figura 7.13: Na coluna da esquerda, o campo de velocidades do escoamento, nos instantes de tempo 5 e 10 segundos, é ilustrado em algumas partículas da discretização. As partículas que representam a gota nessa simulação também são visualizadas na coluna da direita, junto com algumas linhas integrais. Os mapas de cores em ambas as imagens representam a magnitude do campo de velocidade.

### Instabilidades de Kelvin-Helmholtz

O último problema simulado com o método proposto nesta tese é conhecido como a *instabilidade de Kelvin-Helmholtz*. A instabilidade de Kelvin-Helmholtz ocorre quando há uma diferença de velocidades na interface entre duas camadas de fluidos, não necessariamente de densidades diferentes.

Em nossa simulação, a instabilidade de Kelvin-Helmholtz é criada pela seguinte situação: em um longo reservatório, um fluido menos denso é sobreposto a um fluido mais denso definindo uma interface plana entre os dois fluidos. A instabilidade é criada quando o reservatório é inclinado, fazendo com que o fluido mais denso se movimente para o fundo do reservatório, enquanto o fluido menos denso se movimente para o topo do reservatório. A diferença das velocidades nas camadas dos fluidos cria, na interface dos fluidos, a instabilidade de Kelvin-Helmholtz.

A Figura 7.14 ilustra o reservatório e a configuração inicial do problema. Cada fluido é discretizado por 20.000 partículas. O fluido menos denso (representado por partículas em azul) tem densidade igual a 1 e o fluido mais denso (representado por partículas em vermelho) tem densidade duas vezes maior.

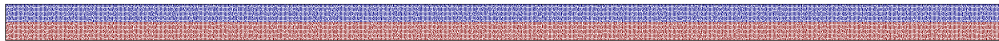


Figura 7.14: Instabilidade de Kelvin-Helmholtz: a instabilidade é criada quando um fluido menos denso (partículas em azul) é sobreposto a um fluido mais denso (partículas em vermelho) e o reservatório é inclinado criando uma diferença de velocidades na interface entre os dois fluidos. Cada fluido é discretizado por 20.000 partículas.

O ângulo de inclinação do reservatório e outros parâmetros dessa simulação são listados na tabela (7.4).

Instabilidade de Kelvin-Helmholtz	
gravidade	1, 0
inclinação	30°
viscosidade	0, 0118
$\Delta t$	0, 001

Tabela 7.4: Parâmetros da simulação.

Inclinando o reservatório em um ângulo de 30°, quando a diferença de velocidades na interface entre os dois fluidos excede um valor, a instabilidade é criada. A Figura 7.15 ilustra a evolução da instabilidade de Kelvin-Helmholtz nos instantes de tempo 2, 6, 8, 10, 12 e 14 segundos (tempo real).

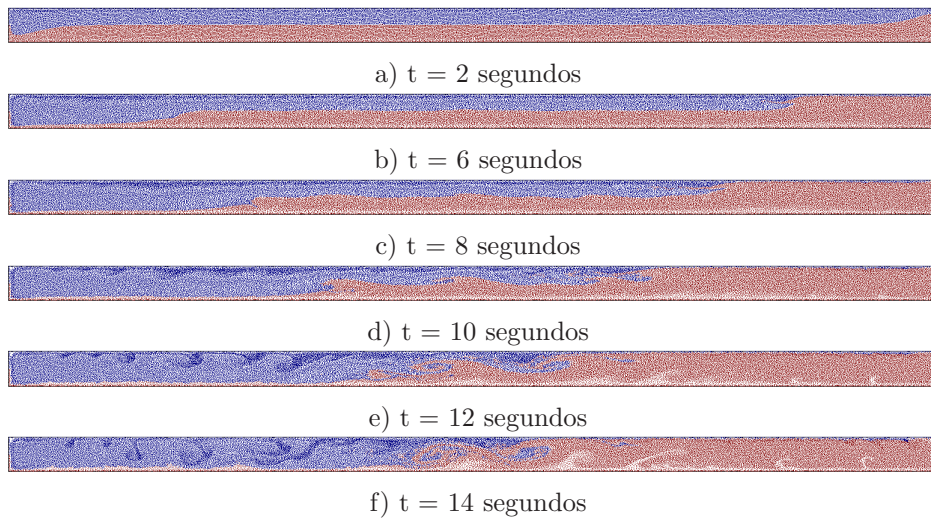


Figura 7.15: As instabilidades de Kelvin-Helmholtz ocorrem quando camadas de fluidos, não necessariamente de densidades diferentes, possuem velocidades diferentes.

A mesma simulação é novamente ilustrada na Figura 7.16. O fluido menos denso, porém, não é visualizado. Além disso, apenas a parte central do reservatório é ilustrada para uma melhor visualização das instabilidades.

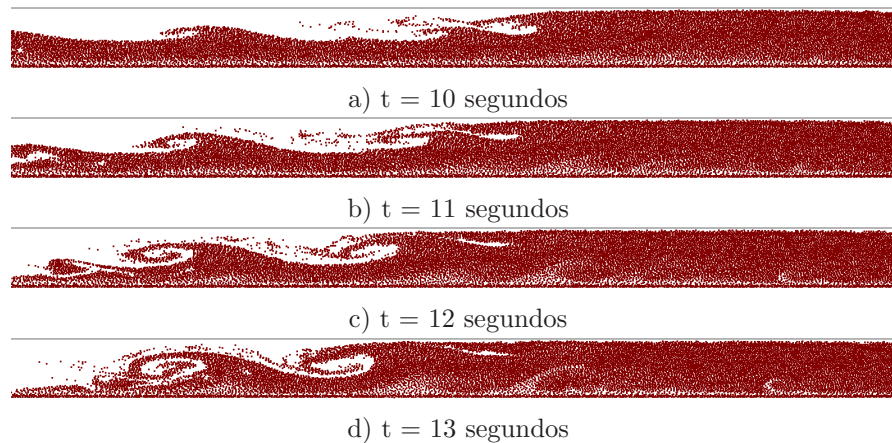


Figura 7.16: Quando a diferença de velocidades na interface entre os dois fluidos excede um valor, a instabilidade é criada. Somente o fluido mais denso é ilustrado.