

2 BASE TEÓRICA

Este capítulo apresenta a formulação teórica do elemento finito utilizando funções “spline”. Com este objetivo descrevem-se primeiro as funções que definem os deslocamentos no elemento. A partir dessas funções, com uso da sistemática usual de elementos finitos, derivam-se as fórmulas das matrizes de rigidez, de massa e geométrica.

2.1. Funções Spline

As funções “spline” são funções de interpolação que se obtêm com a fórmula recursiva apresentada na Equação 2.1, onde $\phi_{j,k(\eta)}$ é o valor da função j de grau k na posição η :

$$\phi_{j,0(\eta)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta_j \leq \eta < \eta_{j+1} \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\phi_{j,k(\eta)} = \frac{\eta - \eta_j}{\eta_{j+k} - \eta_j} \phi_{j,k-1(\eta)} + \frac{\eta_{j+k+1} - \eta}{\eta_{j+k+1} - \eta_{j+1}} \phi_{j+1,k-1(\eta)}$$

O valor interpolado na posição η é obtido através da equação:

$$\delta_{(\eta)} = \sum_{j=0}^{h-k-1} \delta_j \phi_{j,k(\eta)} \quad , \eta \in [\eta_k, \eta_{h-k}] \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2, os δ_j são parâmetros de controle e h é o número de pontos dentro e fora do domínio. Em relação à disposição e separação destes pontos, as funções “spline” se classificam em periódicas e não-periódicas (Figura 2.1); e em uniformes e não-uniformes.

A função periódica tem pontos dentro e fora do domínio e usa a mesma base de funções (funções-base) para todos os intervalos, enquanto a não periódica tem todos os pontos dentro do domínio e utiliza funções-base diferentes nos extremos. Diz-se que é uniforme quando os pontos têm a mesma separação entre eles e não uniforme no caso contrario.

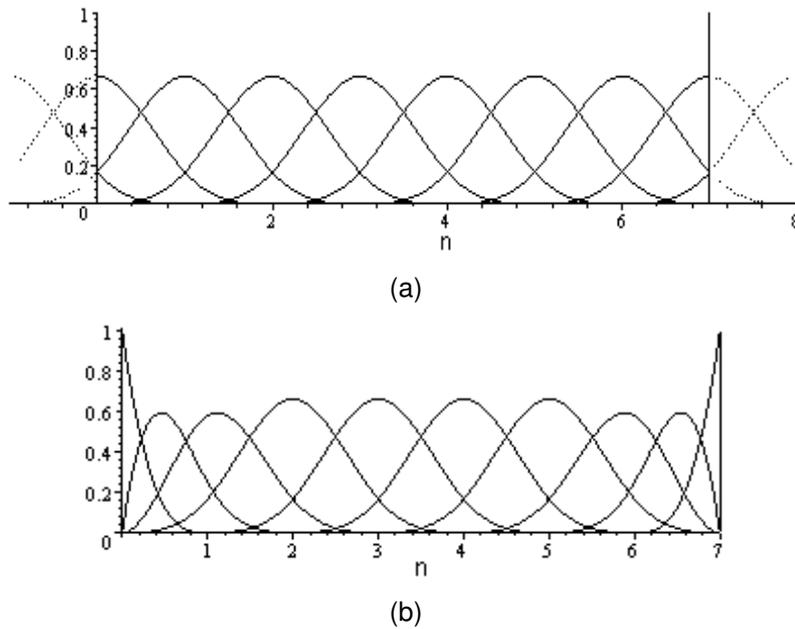


Figura 2.1 (a) funções spline periódicas, (b) funções spline não periódicas.

Neste trabalho utiliza-se a função “spline” periódica, uniforme e de terceiro grau, denominada por alguns autores “B3-spline”. As fórmulas (2.1) e (2.2) são simplificadas:

$$\begin{aligned}
 \phi_{i(\eta)} &= \begin{cases} \eta \leq i-2 & 0 \\ i-2 \leq \eta \leq i-1 & \frac{1}{6}(\eta-i+2)^3 \\ i-1 \leq \eta \leq i & \frac{2}{3} + \frac{\eta}{2} - \frac{i}{2} + \frac{(\eta-i+1)^2}{2} - \frac{(\eta-i+1)^3}{2} \\ i \leq \eta \leq i+1 & \frac{2}{3} + \frac{i}{2} - \frac{\eta}{2} + \frac{(i+1-\eta)^2}{2} - \frac{(i+1-\eta)^3}{2} \\ i+1 \leq \eta \leq i+2 & \frac{1}{6}(i+2-\eta)^3 \\ \eta \geq i+2 & 0 \end{cases} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$$\delta = \sum_{i=-1}^{m+1} \delta_i \phi_{i(\eta)} \quad (2.4)$$

Para aplicar estas fórmulas temos que dividir o domínio em um número m de intervalos supondo que cada um deles tem comprimento unitário. Fora do domínio temos um intervalo externo tanto à esquerda como a direita. O valor da

função em qualquer ponto é o somatório de quatro funções-base (Figura 2.2), cada uma delas multiplicada por um parâmetro de controle δ_i . Em outras palavras, dentro de cada intervalo o valor da função é calculado somente com as funções-base que passam por esse intervalo, multiplicadas por seus respectivos parâmetros; por todos e cada um dos intervalos passam só quatro funções base. Na Figura 2.3 vemos uma função que resulta da aplicação de parâmetros de controle arbitrários.

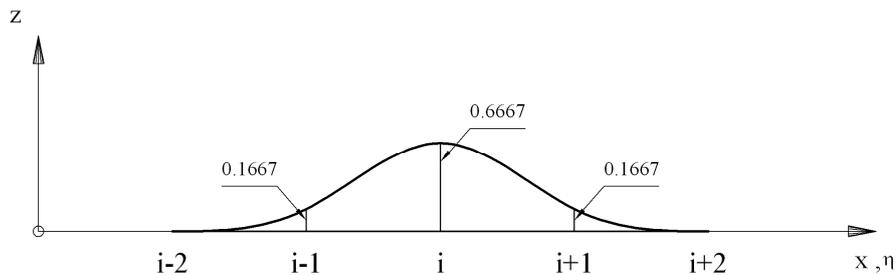
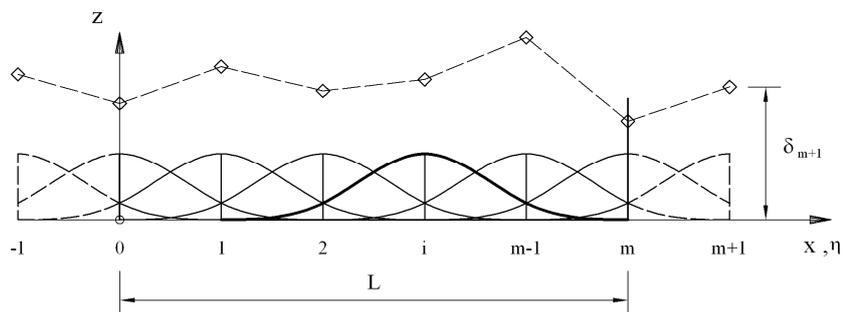
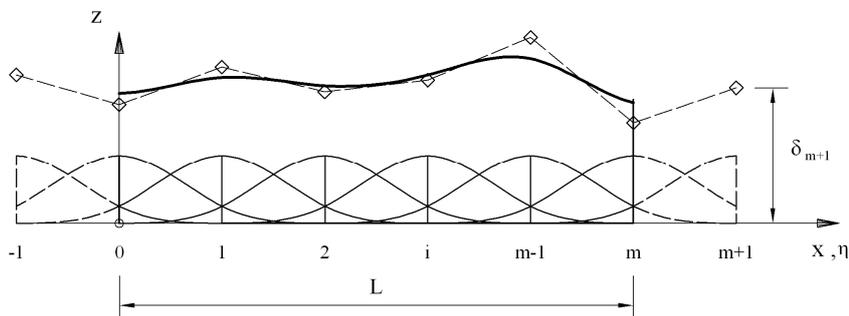


Figura 2.2. Função-base para funções periódicas de 3º grau (B3-spline).



(a)

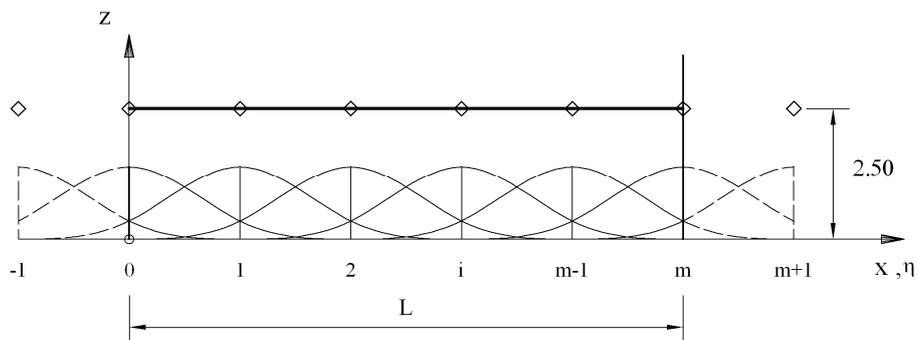


(b)

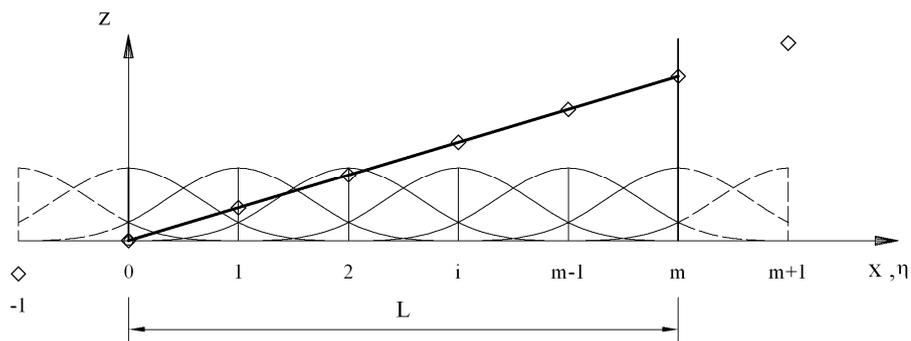
Figura 2.3. (a) Funções-base e parâmetros de controle arbitrários (b) Função para os valores dados em (a).

Entre as propriedades mais importantes das funções “spline” podem-se citar:

- Possuem continuidade até a segunda derivada em todo o domínio, ou seja, são funções de interpolação C^2 .
- Podem representar perfeitamente um valor constante ou uma função linear (Figura 2.4), o que permite que os movimentos de corpo rígido tanto de translação como de rotação sejam possíveis dentro do campo de deslocamentos.
- Quando se somam os valores das quatro funções-base que participam em um intervalo, o resultado é sempre 1 em qualquer ponto, propriedade conhecida como partição da unidade (“partition of unity”).
- A área sob uma função-base é também igual à unidade.



(a)



(b)

Figura 2.4. (a) Valor constante (b) Variação linear da função.

2.2. Campo de Deslocamentos

Os deslocamentos, três translações e três rotações, são aproximados pela multiplicação de funções de interpolação polinomiais no sentido transversal e funções “spline” no sentido longitudinal, como na fórmula seguinte:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\} \quad (2.5)$$

Aqui p é o número de funções de interpolação transversais e m o número de divisões do comprimento da peça.

As funções transversais poderiam ser tanto funções de Lagrange ou de Hermite (ou outras), mas dependendo das hipóteses simplificadoras e da geometria do elemento a eleição de uma delas é implícita.

Ao considerarmos os deslocamentos de um elemento em esforço plano e utilizarmos funções de Lagrange de primeira ordem, a Equação 2.5 resulta na Equação 2.6, o que pode ser visualizado na Figura 2.5.

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^2 N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\}$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ v_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i2} \end{Bmatrix} \phi_{i(\eta)} \quad (2.6)$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

A Figura 2.6 mostra funções de Lagrange de segunda e terceira ordem. Para utilizar estas funções deve-se adicionar uma e duas linhas nodais ao elemento, respectivamente.

Em um elemento de placa, além da translação perpendicular à superfície média, temos as rotações da seção transversal. Na hipótese de Kirchhoff as funções de Hermite poderiam ser utilizadas, enquanto para a hipótese de Mindlin, que precisa de um campo de rotações independente da translação, são mais adequadas as funções de Lagrange.

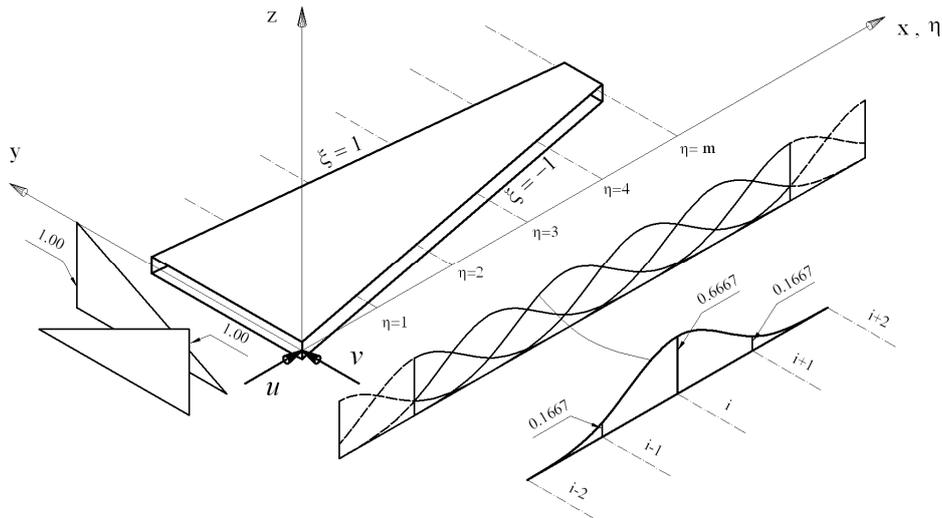


Figura 2.5. Interpolação dos deslocamentos u e v para esforço plano.

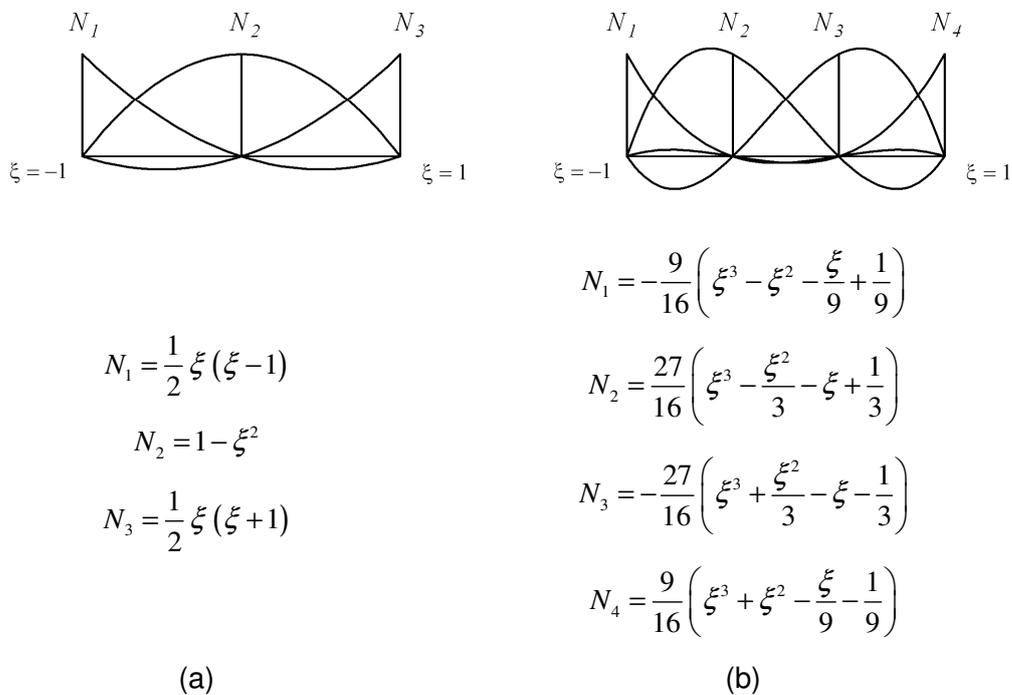


Figura 2.6. Funções de Lagrange (a) segunda ordem, (b) terceira ordem.

Geometricamente existe outra restrição para o uso da teoria de Kirchhoff junto com as funções de Hermite. Como se pode observar na Figura 2.7, somente a rotação θ_x pode ser interpolada no elemento, enquanto a rotação θ_y é diretamente calculada como a derivada do deslocamento. No caso de ter um elemento com uma ou duas linhas nodais não perpendiculares à seção transversal e conectado a outro elemento, precisaríamos de uma transformação de graus de liberdade de rotação, que é mais complexa se a rotação θ_y implica derivadas da função deslocamento. Essa dificuldade é eliminada se todas as

rotações aparecem como graus de liberdade, o que acontece com a teoria de Mindlin.

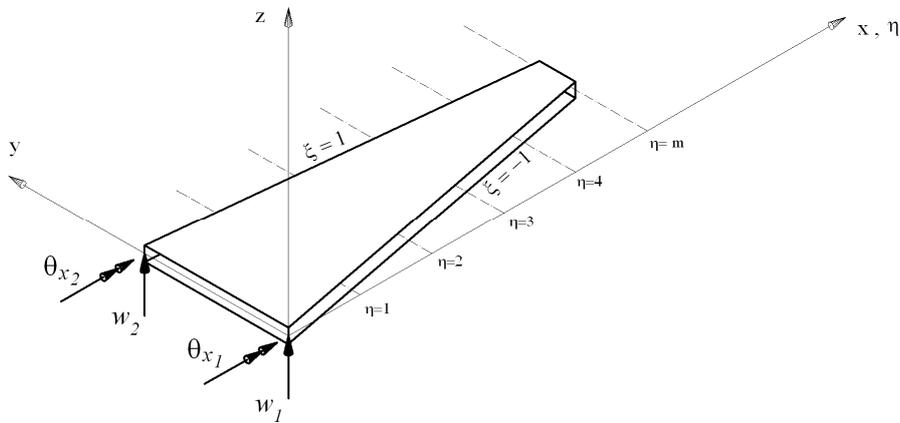


Figura 2.7. Graus de liberdade para deslocamento de placa na teoria de Kirchhoff.

2.3. Matriz de Rigidez e Vetor de Forças

Depois de definir o campo de deslocamentos os conceitos de elementos finitos são aplicados para obter a matriz de rigidez e o vetor das forças.

As deformações se determinam aplicando um operador diferencial sobre os deslocamentos, com o que se obtém:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \partial N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\} = B \{\delta_{ij}\} \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, ∂ é a matriz que contém os operadores diferenciais que devem ser aplicados aos deslocamentos, e B é a chamada matriz deformação-deslocamento [4].

A matriz de rigidez é calculada com a fórmula:

$$K = \int_v B^T E B dV \quad (2.8)$$

onde E é a matriz constitutiva do material.

Explicitamente a matriz de rigidez se pode escrever como na Equação 2.9. A submatriz $[\phi_0 \phi_2]$ obtém-se integrando a Equação 2.10 dentro do intervalo 0 até 2 como se observa na Figura 2.8. Vemos que as submatrizes que têm diferença entre subscritos maior a quatro são submatrizes iguais a zero.

$$K = \begin{bmatrix} [\phi_{-1} \phi_{-1}] & [\phi_{-1} \phi_0] & [\phi_{-1} \phi_1] & [\phi_{-1} \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_{-1} \phi_m] & [\phi_{-1} \phi_{m+1}] \\ [\phi_0 \phi_{-1}] & [\phi_0 \phi_0] & [\phi_0 \phi_1] & [\phi_0 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_0 \phi_m] & [\phi_0 \phi_{m+1}] \\ [\phi_1 \phi_{-1}] & [\phi_1 \phi_0] & [\phi_1 \phi_1] & [\phi_1 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_1 \phi_m] & [\phi_1 \phi_{m+1}] \\ [\phi_2 \phi_{-1}] & [\phi_2 \phi_0] & [\phi_2 \phi_1] & [\phi_2 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_2 \phi_m] & [\phi_2 \phi_{m+1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ [\phi_m \phi_{-1}] & [\phi_m \phi_0] & [\phi_m \phi_1] & [\phi_m \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_m \phi_m] & [\phi_m \phi_{m+1}] \\ [\phi_{m+1} \phi_{-1}] & [\phi_{m+1} \phi_0] & [\phi_{m+1} \phi_1] & [\phi_{m+1} \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_{m+1} \phi_m] & [\phi_{m+1} \phi_{m+1}] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[\phi_0 \phi_2] = \int_v B_0^T E B_2 dV \quad (2.10)$$

$$B_0 = \sum_{j=1}^p \partial N_j \phi_0 \quad B_2 = \sum_{j=1}^p \partial N_j \phi_2$$

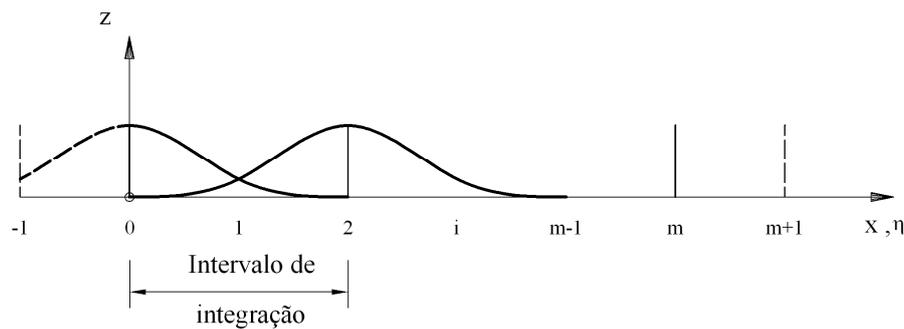


Figura 2.8. Intervalo de integração para a submatriz $[\phi_0 \phi_2]$.

Para simplificar as fórmulas seguintes definimos a matriz L_f como sendo:

$$L_f = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^p N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \quad (2.11)$$

O vetor de forças consistente f pode levar em conta forças de corpo, superficiais, de linha e pontuais, como na expressão seguinte, onde b_f são as forças de corpo, q_A a carga superficial, q_L é a carga distribuída sobre uma linha nodal e P_c a carga pontual corrigida para atuar sobre os parâmetros de deslocamentos.:

$$f = \int_V L_f^T b_f dV + \int_A L_f^T q_A dA + \int_L L_f^T q_L dL + P_c \quad (2.12)$$

A influência de tensões e deformações iniciais não está considerada no vetor de forças acima, porém poderiam também ser incluídas.

2.4. Matrizes de Massa e Geométrica

A matriz de massa consistente é calculada com a seguinte fórmula [1]:

$$M = \int_V L_f^T \rho L_f dV \quad (2.13)$$

Na Equação 2.13 ρ é a densidade de massa do material.

Para o cálculo da matriz geométrica é preciso aplicar um novo operador diferencial aos deslocamentos, chamando w ao deslocamento transversal, as deformações de membrana produzidas por pequenas quantidades deste deslocamento são [1]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} w_{,y}^2 \quad \gamma_{xy} = w_{,x} w_{,y} \quad (2.14)$$

O operador diferencial está definido pela seguinte fórmula:

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \partial_G N_j \phi_i \{\delta_{ij}\} = G \{\delta_{ij}\} \quad (2.15)$$

Disto resulta a matriz geométrica:

$$K_G = \int_A G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G dA \quad (2.16)$$

Na expressão acima, a matriz central está composta pelas forças de membrana normais N_x e N_y e tangencial N_{xy} .