

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Oscar Fabricio Zuleta Inch

**Elementos Finitos com Funções “Spline” para
Instabilidade e Dinâmica de Estruturas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2008



Oscar Fabricio Zuleta Inch

**Elementos Finitos com Funções “Spline” para
Instabilidade e Dinâmica de Estruturas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. João Luis Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil - UFPA

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil - UFAL

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de Fevereiro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Oscar Fabricio Zuleta Inch

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidad Mayor de San Andrés, em abril de 2003. Durante a graduação atuou na área de estruturas na análise de placas pré-fabricadas e protendidas.

Ficha Catalográfica

Zuleta Inch, Oscar Fabricio

Elementos Finitos com Funções “Spline” para Instabilidade e Dinâmica de Estruturas / Oscar Fabricio Zuleta Inch; orientador: Raul Rosas e Silva.– 2008.

96 f.:il.; 29,7cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia civil)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Elementos finitos. 3. Funções spline. 4. Instabilidade. 5. Dinâmica. 6. Vigas de paredes finas. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Oscar e Carmen;
Meus irmãos, Mónica, Fátima e Cristian.

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidades que colocou na minha vida, aos meus pais, Oscar Zuleta e Carmen Inch e ao meu avô Alberto Inch, pelo amor, educação e exemplo que me oferecem todos os dias.

A minhas irmãs Mónica e Fátima pelo amor, apoio e força que me deram, a meu irmão Cristian Guerra pela amizade incondicional.

A Gricel por me incentivar e ser minha parceira no desafio do mestrado, preenchendo de muita felicidade e amor esses dois anos de estudo.

Ao Professor Raul Rosas e Silva pela orientação e esclarecimento de muitas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento da dissertação. Ao Professor João Luis Pascal Roehl pela amizade e ensino que vai além dos temas de engenharia. A todos os professores do departamento de engenharia civil da PUC-RIO.

A meu grande amigo Carlos Aguilar pelas muitas conversas, conselhos e principalmente porque me apoio nos momentos difíceis, as minhas amigas Carmen Ayquipa e Jackeline Castañeda pela amizade sincera, aos meus colegas e amigos da turma Hyllttonn Bazan, Roberto Machado dos Santos, Gilberto Lopes, Daniel Huamán, Tarciso, aos amigos da pós graduação Lucas, Amanda Jarek, Wagner Nahas, André Pinto, Gladys Hurtado, Roberto Quevedo, Rafael de Sousa, Elaine Ponte, Elvidio Gavassoni, Jean Aguilera e Rafael Castro.

A CAPES, e a PUC-RIO pela oportunidade de cursar a pós-graduação.

Resumo

Zuleta Inch, Oscar Fabricio.; Silva, Raul Rosas e.
Elementos Finitos com Funções “Spline” para Instabilidade e Dinâmica de Estruturas. Rio de Janeiro, 2008. 94p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No presente trabalho se estuda um elemento finito subparamétrico que aproxima o campo de deslocamentos com funções “spline”, implementando um programa que pode ser utilizado para cálculo estático, dinâmico e de instabilidade de estruturas compostas de placas, vigas de paredes finas, vigas caixão e em geral em elementos alongados (pontes e perfis metálicos). O grau de liberdade de rotação perpendicular ao plano do elemento é introduzido na formulação para possibilitar uma análise tridimensional. Apresenta-se um método que serve como base para determinar a constante de rigidez correspondente. Nos exemplos apresentados avalia-se a precisão obtida utilizando pouco número de divisões longitudinais do contínuo, vantagem que justifica o uso desses elementos em estudos de pré-projeto ou otimização de estruturas. Comparam-se os resultados com soluções teóricas ou resultados de outros programas estruturais, permitindo apreciar as possibilidades e limitações da modelagem usando elementos finitos com funções “spline”. As diferenças observadas, que surgem principalmente em placas espessas, são explicadas pela aproximação da deformação de cisalhamento encontrada na literatura para os elementos utilizados na comparação. Mostra-se também exemplos de instabilidade analisados em três dimensões que permitem considerar diferentes condições de apoio e discutir os resultados de fórmulas conhecidas.

Palavras-chave

Elementos finitos, funções spline, instabilidade, dinâmica, vigas de paredes finas.

Abstract

Zuleta Inch, Oscar Fabricio.; Silva, Raul Rosas e.

Finite elements with spline functions applied to Structural Dynamics and Instability. Rio de Janeiro, 2008. 94p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present work presents a subparametric finite element model with spline displacement functions, implemented for static, dynamic and instability analysis of folded plates, thin-walled beams, box girders, and elongated structures such as bridges and structural shapes. A drilling degree of freedom (rotation about an axis perpendicular to the plane of the element) is introduced in the formulation to allow for three-dimensional analysis. A method for determining the corresponding contribution to the stiffness matrix is presented. The examples presented evaluate the accuracy obtained using a small number of longitudinal subdivisions of the continuum, convenient in the case of analyses for preliminary design and optimization. The results obtained are compared to theoretical solutions or results of standard structural analysis programs, allowing for an appraisal of the advantages and limitations of modeling with use of spline functions. The differences in the results, observed specially in the case of thick plates, are explained by the approximations for the shear strain in the elements used for comparison. From the examples it is possible to comment results of three-dimensional modeling of instability problems with different boundary conditions.

Keywords

Finite elements, spline functions, instability, dynamics, thin-walled beams.

Sumário

| | |
|---|----|
| 1. Introdução | 15 |
| 1.1. Revisão bibliográfica | 16 |
| 1.2. Objetivos | 17 |
| 1.3. Organização do texto | 18 |
| 2. Base Teórica | 19 |
| 2.1. Funções spline | 19 |
| 2.2. Campo de deslocamentos | 23 |
| 2.3. Matriz de rigidez e vetor de forças | 25 |
| 2.4. Matrizes de massa e geométrica | 27 |
| 3. Implementação do elemento finito | 28 |
| 3.1. Hipóteses cinemáticas | 28 |
| 3.2. Tipo de elemento e funções de deslocamento | 28 |
| 3.3. Esforços e deformações | 31 |
| 3.3.1. Vetor de deformações generalizadas | 31 |
| 3.3.2. Vetor de tensões generalizadas | 32 |
| 3.3.3. Relações esforço-deformação | 32 |
| 3.4. Grau de liberdade “drilling” | 33 |
| 3.4.1. Rigidez artificial | 33 |
| 3.4.2. Formulação variacional | 34 |
| 3.4.3. Redução por condensação cinemática | 35 |
| 3.5. Vetor de forças | 38 |
| 3.6. Condições de contorno | 39 |
| 3.7. Matriz de massa e geométrica | 39 |
| 3.8. Freqüências naturais e cargas críticas | 40 |
| 4. Exemplos | 42 |
| 4.1. Viga simplesmente apoiada | 42 |
| 4.2. Viga em balanço (teste de Cook) | 44 |
| 4.3. Placa simplesmente apoiada | 45 |
| 4.4. Freqüências naturais de placa em balanço | 50 |

| | |
|--|----|
| 4.5. Freqüências Naturais de viga caixão | 54 |
| 4.6. Carga crítica de placa em balanço | 58 |
| 4.7. Carga crítica de viga em balanço | 59 |
| 5. Conclusões e sugestões | 64 |
| 5.1. Conclusões | 64 |
| 5.2. Sugestões para trabalhos futuros | 66 |
| 6. Referências bibliográficas | 67 |
| A. Entrada e saída de dados | 69 |
| B. Listagem do programa | 74 |
| B.1. Programa principal | 74 |
| B.2. Definições | 91 |
| B.3. Rotinas Gerais | 91 |
| B.4. Entrada de dados | 93 |
| B.5. Saída de dados | 95 |

Lista de figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - (a) Modelagem tridimensional reduzida a uma serie de soluções de elemento finito bidimensional. (b) Redução a serie de soluções de elemento finito unidimensional [3] | 16 |
| Figura 2.1 - (a) funções spline periódicas, (b) funções spline não periódicas | 20 |
| Figura 2.2 - Função-base para funções periódicas de 3° grau (B3-spline) | 21 |
| Figura 2.3 - (a) Funções-base e parâmetros de controle arbitrários (b) Função para os valores dados em (a) | 21 |
| Figura 2.4 - (a) Valor constante (b) Variação linear da função | 22 |
| Figura 2.5 - Interpolação dos deslocamentos u e v para esforço plano | 24 |
| Figura 2.6 - Funções de Lagrange (a) segunda ordem, (b) terceira ordem | 24 |
| Figura 2.7 - Graus de liberdade para deslocamento de placa na teoria de Kirchhoff | 25 |
| Figura 2.8 - Intervalo de integração para a submatriz $[\phi_0 \phi_2]$ | 26 |
| Figura 3.1 - Coordenadas locais do elemento | 28 |
| Figura 3.2 - Parâmetros de deslocamento | 30 |
| Figura 3.3 - Elemento diferencial de placa depois do carregamento [1] | 31 |
| Figura 3.4 - Sentidos positivos dos esforços. A direção de Q_{xz} e Q_{yz} nas faces positivas é do eixo z [8] | 32 |
| Figura 3.5 - Momentos resultantes para uma rotação unitária no nó 1 e zero para os demais nós | 34 |
| Figura 3.6 - Componente do tensor de pequenas rotações | 35 |
| Figura 3.7 - Elemento quadrilateral com rotações normais [2] | 35 |
| Figura 3.8 - Lado de um elemento quadrilateral [2] | 36 |
| Figura 3.9 - Modo de deslocamento com zero energia [2] | 37 |

| | |
|---|----|
| Figura 4.1 - (a) Momento unitário aplicado por um par de forças. (b) Momento unitário aplicado como carregamento consistente nos três nós do elemento | 43 |
| Figura 4.2 - Variação da rotação com o valor de ϕ e m | 44 |
| Figura 4.3 - Teste de Cook | 44 |
| Figura 4.4 - (a) Placa de espessura fina. (b) Placa de maior espessura | 46 |
| Figura 4.5 - Elemento quadrilateral de placa [2] | 47 |
| Figura 4.6 - Lado genérico de um elemento [2] | 48 |
| Figura 4.7 - Deslocamento vertical na placa fina | 50 |
| Figura 4.8 - (a) Placa fina em balanço. (b) Placa de concreto em balanço | 51 |
| Figura 4.9 - Modos de vibração da placa fina | 52 |
| Figura 4.10 - Modos de vibração da placa espessa | 53 |
| Figura 4.11 - Freqüências naturais do primeiro e quarto modos | 54 |
| Figura 4.12 - Viga caixão de ponte | 55 |
| Figura 4.13 - Dimensões da viga caixão | 55 |
| Figura 4.14 - Modelagem da viga caixão | 55 |
| Figura 4.15 - Modos de vibração da viga caixão | 57 |
| Figura 4.16 - Carga crítica de placa em balanço | 58 |
| Figura 4.17 - Modos de flambagem de placa engastada-livre | 59 |
| Figura 4.18 - Carga crítica de viga estreita em balanço. (a) Planta. (b) Elevação. (c) Seção [6] | 60 |
| Figura 4.19 - Viga em balanço com o grau de liberdade θ_z livre | 61 |
| Figura 4.20 - Viga em balanço totalmente engastada | 61 |
| Figura 4.21 - Distribuição de momentos no engaste | 62 |
| Figura 4.22 - Modos de flambagem da viga em balanço | 62 |
| Figura 4.23 - Cargas críticas do primeiro e segundo modos | 63 |
| Figura A.1 - Arquivo de texto DADOS1 | 69 |
| Figura A.2 - Arquivo de texto DADOS2 | 70 |
| Figura A.3 - Arquivo de texto RESEST | 71 |
| Figura A.4 - Arquivo de texto RESDIN | 72 |
| Figura A.5 - Arquivo de texto RESINS | 73 |

Lista de tabelas

| | |
|---|----|
| Tabela 4.1 - Deslocamentos e rotações na viga simplesmente apoiada | 43 |
| Tabela 4.2 - Relação de deslocamentos em C para vários tipos de elementos | 45 |
| Tabela 4.3 - Deslocamentos e rotações na placa fina | 45 |
| Tabela 4.4 - Deslocamentos e rotações na placa espessa | 46 |
| Tabela 4.5 - Freqüências naturais da placa fina em balanço | 51 |
| Tabela 4.6 - Freqüências naturais da placa espessa | 52 |
| Tabela 4.7 - Freqüências naturais da viga caixão | 56 |
| Tabela 4.8 - Cargas críticas da placa em balanço | 58 |
| Tabela 4.9 - Cargas críticas da viga em balanço parcialmente engastada | 61 |
| Tabela 4.10 - Cargas críticas da viga em balanço totalmente engastada | 62 |

Lista de símbolos

| | |
|--------------------------------|---|
| B | matriz de deformação-deslocamento. |
| b_f | carga distribuída de corpo. |
| E | módulo de elasticidade. |
| f | vetor de forças. |
| K | matriz de rigidez. |
| K_G | matriz geométrica. |
| L | comprimento do elemento. |
| L_f | matriz com funções de forma. |
| M | matriz de massa consistente. |
| m | número de divisões ao longo do eixo x . |
| N | matriz com funções de forma transversais. |
| P_c | carga pontual que atua sobre parâmetros de deslocamento. |
| P_{cr} | carga crítica. |
| p | número de funções de forma transversais. |
| q_A | carga distribuída de superfície. |
| q_L | carga distribuída em uma linha nodal. |
| t | espessura da placa. |
| u, v, w | deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente. |
| $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ | deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente. |
| η | coordenada normalizada paralela a x . |
| ξ | coordenada normalizada paralela a y . |
| ϕ | função “spline”. |
| δ | vetor de deslocamentos. |
| δ_{ij} | vetor de parâmetros de deslocamentos. |
| ε | deformação unitária normal. |

| | |
|-----------|------------------------------|
| γ | deformação de cisalhamento. |
| σ | tensão normal. |
| τ | tensão cisalhante. |
| μ | coeficiente de poisson. |
| ρ | densidade do material. |
| ω | freqüência natural circular. |
| λ | parâmetro de carga crítica. |
| Π | energia potencial total. |