2
Modelos de Otimização sob Incerteza

2.1.
Introdução

Modelos de programação matemática são comumente utilizados para solução de problemas de programação da produção, de logística, de scheduling e de planejamento estratégico de projetos. Muitos destes modelos partem do princípio que os dados de entrada são conhecidos, ou seja, são modelos determinísticos. Porém, frequentemente esses modelos possuem dados que são sujeitos a incertezas.

Para os casos em que a resposta do modelo não é muito sensível aos dados sujeitos a incertezas ou o grau de precisão dos parâmetros incertos é alto, um modelo determinístico pode ser utilizado sem causar grande prejuízo a qualidade da informação gerada. Por outro lado, principalmente para modelos com visão de longo prazo, o resultado de uma análise determinística pode não ser realista e trazer prejuízos. Daí surge a motivação em desenvolver modelos de otimização sob incerteza. Para Sahinidis (2004), a grande dificuldade na otimização sob incerteza é lidar com um enorme intervalo de incerteza que freqüentemente conduz a modelos de otimização de grande porte. Várias abordagens de métodos de otimização sob incerteza são encontradas na literatura. Algumas delas serão descritas brevemente neste capítulo.

Serão descritos os modelos de otimização sob incerteza que não consideram risco e posteriormente os modelos com restrição de risco. As medidas de risco têm um papel crucial na otimização sob a incerteza, especialmente ao lidar com as perdas que podem ser incorridas na área financeira (Rockafeller e Uryasev, 2002). Ao avaliar um portfólio de ativos financeiros, por exemplo, é importante maximizar o retorno esperado, mas ao mesmo tempo avaliar também o risco ao qual o investidor está exposto. O mesmo raciocínio é válido para o caso da avaliação da carteira de investimento da cadeia integrada de petróleo e derivados, na qual se deseja maximizar o resultado esperado no longo prazo dado um nível de risco aceitável.

Neste capítulo serão apresentados também os modelos que utilizam técnicas de gerenciamento de riscos, os modelos de otimização de portfólio. Estes modelos têm origem na área econômico-financeira e são utilizados para apoiar na determinação de uma carteira de ativos financeiros que maximize o retorno do investidor, sujeito ao atendimento de um limite de risco, ou de forma alternativa, minimize a exposição ao risco, sujeito ao atendimento de um retorno mínimo requerido pelo investidor. Ou seja, dada uma lista de ativos candidatos, os modelos de otimização de portfólio indicam para o investidor aqueles que devem ser adquiridos, de modo que a carteira resultante forneça a melhor relação risco versus retorno (Marzano 2004).

2.2. Otimização sob Incerteza

Para Kallrath (2005), a otimização sob incerteza tem como objetivo a exploração dos dados futuros incertos e informações incompletas, de forma a melhorar a qualidade final do desempenho global, isto é, a qualidade de decisões através do horizonte de tempo, ou aumentar a robustez do modelo. Em seu artigo, é feita uma revisão de várias abordagens de técnicas que foram usadas em problemas reais ou que foram citadas na literatura. A partir destas abordagens, o autor pôde suportar o argumento que as dificuldades em modelar problemas de otimização sob a incerteza são muito maiores do que aqueles de otimização determinística.

Sahinidis (2004) também faz uma revisão da teoria e metodologias que foram desenvolvidas para lidar com a complexidade de problemas de otimização sob incerteza. As principais abordagens neste campo podem ser divididas em programação estocástica e programação não estocástica (otimização fuzzy).

Programação estocástica

Segundo Kallrath (2005), a primeira etapa para modelar o problema do mundo real envolvendo dados de entrada incertos é analisar com cuidado a natureza da incerteza. Apesar das dificuldades conceituais, recomenda-se fortemente que se alguns dados, como por exemplo, previsão de demanda em modelos de planejamento e/ou dados da produção em sheduling, forem sujeitos às incertezas, estas devem ser consideradas. É crucial que as suposições sejam verificadas, pois são a base de várias abordagens de solução. Programação estocástica é uma técnica utilizada para modelar as incertezas e é uma das abordagens contemplada em seu artigo.

Kallrath (2005) afirma que programação estocástica, particularmente, modelos estocásticos multi-estágios, chamados também modelos recursivos, têm sido reportados há algum tempo. Alguns trabalhos neste sentido são citados em seu artigo (como por exemplo Dantzig (1955), Kall (1976), Schultz (1995), Birge e Louveaux (1997)). Na programação estocástica os modelos contêm a informação da probabilidade da incerteza estocástica e a distribuição não depende da decisão na maioria dos casos. Ultimamente, a maioria das linguagens de modelagem usadas na otimização matemática usa programação estocástica baseada em cenário para problemas de programação linear (LP) (Kallrath, 2005).

Khor (2006) cita duas características essenciais de problemas típicos de programação estocástica: a incerteza nos dados do problema e a seqüência de decisões, em que alguns dos parâmetros do modelo são considerados variáveis aleatórias que assumem valores a partir de determinada distribuição de probabilidade discreta ou contínua. A decisão deve ser feita antes dos valores reais destes parâmetros aleatórios se realizarem.

Na programação estocástica de dois estágios, as variáveis da decisão de um problema de otimização sob incerteza são divididas em dois grupos. As variáveis do primeiro estágio são aquelas que têm que ser decididas antes da realização real dos parâmetros incertos. Subseqüentemente, uma vez que os eventos aleatórios se apresentaram, melhorias de projeto ou políticas operacionais podem ser feitas, selecionando a certo custo, os valores do segundo estágio. Tradicionalmente, as variáveis de segundo estágio são interpretadas como medidas corretivas ou recurso contra alguma inviabilidade devido a alguma particular realização de incerteza. Entretanto, o problema de segundo estágio pode também ser um problema de decisão no nível operacional, seguindo o planejamento do primeiro estágio e realizações de incertezas. Devido às incertezas, o custo do segundo estágio é uma variável aleatória. (Sahinidis, 2004).

Sahinidis (2004) mostra uma formulação padrão de programação estocástica linear de dois estágios, onde o parâmetro incerto do segundo estágio é uma variável aleatória que possui uma distribuição de probabilidade contínua. O autor afirma ainda que, face à suposição de distribuições discretas dos parâmetros incertos, o problema pode ser equivalentemente formulado como um problema de programação linear de grande porte, que possa ser resolvido usando a tecnologia padrão de programação linear. Adicionalmente, o autor descreve métodos presentes na literatura para formulação de programação estocástica inteira, onde as variáveis de decisão possuem natureza inteira. É mostrada também uma formulação para programação estocástica não linear, que pode ser aplicada especialmente em projetos de engenharia, assim como em planejamento e scheduling.

Programação fuzzy

Como a programação estocástica, a programação fuzzy também se dirige a problemas de otimização sob a incerteza. Uma diferença principal entre as abordagens de otimização estocástica e fuzzy está na maneira que a incerteza é modelada. No caso de programação estocástica, a incerteza é modelada com as funções discretas ou contínuas da probabilidade. Por outro lado, a programação fuzzy considera parâmetros aleatórios como números fuzzy e as restrições são tratadas como conjuntos fuzzy. Alguma violação à restrição é permitida e o grau de satisfação de uma restrição é definido como uma associação de funções de restrições (Sahinidis, 2004). Esta metodologia é muito mais nova do que a programação estocástica e é usada quando, do ponto de vista da programação estocástica, a informação for incompleta. Se as distribuições de probabilidade para os dados de entrada incertos puderem ser fornecidas, a programação estocástica é a melhor escolha (Kallrath 2005).

2.3. Otimização de Portfólio

2.3.1. Introdução

O problema de otimização de portfólio é de interesse prático e teórico. Dessa forma, estes problemas têm sido abordados na literatura desde a proposição de modelo média-variância de Markowitz em 1952.

Modelos de otimização de portfólio são desenvolvidos para reduzir o risco associado ao valor esperado do retorno do portfólio através da diversificação da carteira de investimentos. O retorno de um investimento, geralmente, é representado pelo valor esperado da distribuição dos retornos. Já a modelagem do risco do portfólio possui diferentes abordagens propostas.

Nesta seção serão apresentadas algumas destas abordagens. Inicialmente, a proposta de Markowitz é mostrada. O modelo Minimax, o Value-at-risk (VaR) e o Conditional Value-at-Risk (CVaR) são apresentados em seguida. Por último, outras medidas de risco encontradas na literatura serão descritas.

2.3.2. Média Variância – Markowitz

Em seu trabalho "Portfolio Selection" Harry Markowitz (1952) propõe um modelo que analisa a relação risco-retorno para a escolha do melhor portfólio. Tal modelo, conhecido como média-variância de Markowitz utiliza parâmetros estatísticos para solução do problema de otimização de portfólio: valor esperado do retorno para representar o retorno previsto e variância dos retornos para medir o risco. O modelo média-variância de Markowitz é um clássico na área de otimização de portfólio. Seu trabalho foi pioneiro na criação de um método de análise da relação risco-retorno para seleção de portfólio.

O modelo média-variância de Markowitz (1952) pode ser descrito pela formulação abaixo:

$$Minimizar \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} X_i X_j \quad (2.1)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \mu_i = E \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \quad (2.3)$$

$$X_i \geq 0 \qquad \text{i = 1,...,N} \quad (2.4)$$

Onde:

N – número de ativos candidatos a compor o portfólio

X_i – fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

σ_{ij} – covariância entre os retornos dos ativos i e j (σ_{ii} é a variância do retorno dos ativos i)

μ_i – valor esperado dos retornos do ativo i

E – valor esperado do retorno do portfólio (valor requerido pelo investidor)

A equação (2.1) é a função objetivo que tem como meta a minimização do risco do portfólio. A restrição (2.2) diz que o retorno esperado do portfólio, que é a média ponderada dos retornos individuais, deve ser igual a um dado E que é o valor requerido pelo investidor. A restrição (2.3) garante que todo capital disponível seja investido e a restrição (2.4) não permite que seja investido um percentual negativo em qualquer ativo.

Neste modelo, o risco do portfólio é representado pela variância da carteira que depende da covariância entre os pares de ativos. Então, com esta medida, uma carteira de investimentos composta por dois ou mais ativos pouco correlacionados pode resultar em um risco menor que a média ponderada dos riscos individuais, podendo até resultar em um nível de risco menor que o do ativo de menor risco com um retorno maior que o deste ativo (Gonçalves Jr. et al., 2002).

O modelo indica como portfólio ótimo aquele que minimiza a variância sujeito à restrição de um retorno requerido pelo investidor. Através de várias simulações do modelo, variando o retorno requerido, é possível registrar para cada nível de retorno um nível de risco com uma composição ótima do portfólio. Estes registros podem ser plotados em uma curva que representa a fronteira eficiente do portfólio (Fig. 2.1).

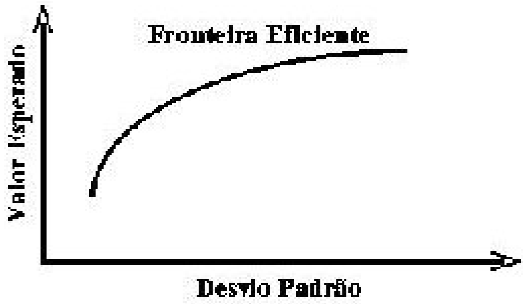

Figura 2.1 – Fronteira Eficiente

O modelo de Markowitz, apesar de ser uma referência teórica, não tem sido usado frequentemente em sua forma original para construção de portfólios de larga escala. A principal razão para isto é a dificuldade computacional associada ao alcance de uma solução ótima para problemas de otimização quadrática com uma extensa matriz de covariância (Konno e Yamazaki, 1991).

Outras críticas foram feitas ao modelo de Markowitz. Uma delas é a instabilidade dos portfólios ótimos obtidos neste modelo devido à obtenção de resultados completamente diferentes relacionados a pequenas variações dos parâmetros de entrada (Mitra et al., 2003). Além disso, a minimização da variância pode não ser adequada para medir o risco do portfólio, pois ela penaliza tanto desvios positivos quanto os negativos em relação à média (Mansini et al., 2001; Cheng et al., 2004).

Os inconvenientes detectados no modelo média-variância de Markowitz motivaram o desenvolvimento de modelos alternativos para otimização de portfólio.

2.3.3. Modelo MiniMax

Um modelo de seleção de portfólio que utiliza o retorno mínimo como medida de risco foi apresentado por Young (1998). O portfólio ótimo encontrado neste modelo é a solução de um problema simples de programação linear, e é definido como aquele que maximiza o retorno do pior cenário, sujeito a um nível de retorno esperado.

Considerando i ativos candidatos, sujeitos a incertezas representadas através de C cenários, a formulação matemática para o modelo Minimax é apresentada abaixo:

$$Maximizar\, M_p \qquad (2.5)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{ic} - M_p \geq 0 \qquad c = 1,...,C \qquad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \geq \rho \qquad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (2.8)$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,...,N \qquad (2.9)$$

Onde:

M_p – retorno esperado do pior cenário

N – número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital alocado ao ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

r_{ic} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário c ρ – nível mínimo requerido pelo investidor para o valor esperado do retorno do portfólio

A equação (2.5) é a função objetivo e maximiza Mp, que, de acordo com a restrição (2.6), representa o retorno esperado do pior cenário. A restrição (2.7) garante que o valor esperado do retorno do portfólio seja maior ou igual a um dado nível definido pelo investidor (ρ). A restrição (2.8) garante que todo capital disponível seja investido e a restrição (2.9) impede que seja investido um percentual negativo em qualquer ativo.

Young (1998) apresenta ainda uma formulação equivalente para o modelo Minimax, na qual o retorno esperado é maximizado, sujeito ao atendimento de um retorno mínimo em cada um dos cenários:

$$Maximizar \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \qquad (2.10)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{ic} \geq H \qquad c = 1,...,C \qquad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (2.12)$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,...,N \qquad (2.13)$$

Onde:

N – número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital alocado ao ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

r_{ic} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário c

H – nível mínimo para o valor esperado do retorno em cada cenário c

A função objetivo (equação 2.10) representa o retorno esperado do portfólio que deve ser maximizado. A restrição (2.11) limita o retorno de cada cenário a um valor mínimo H definido pelo investidor. As demais restrições são idênticas à primeira formulação do problema MiniMax.

Young (1998) afirma que para problemas de otimização de portfólio, em que os retornos são representados por uma distribuição normal, as medidas de risco variância do retorno (proposta por Markowitz) e mínimo retorno são similares. Por outro lado, o autor mostra que para portfólios com distribuição de retorno assimétrica a utilização de mínimo retorno como medida de risco é mais apropriada.

Porém, os modelos MiniMax são extremamente conservadores, ou seja, possuem forte aversão aos piores resultados, o que faz com que sua solução possa ser afetada pela presença de valores de cenários muito pouco prováveis no conjunto de dados (Marzano 2004).

2.3.4.
Value-at-Risk (VaR)

Value-at-Risk (VaR) tornou-se uma medida de risco de larga utilização e aceitação em instituições financeiras de todo mundo. VaR é um método de mensuração de risco que utiliza técnicas estatísticas padrões e é de fácil compreensão para o controle de riscos (Jorion, 1997). O VaR mede o pior valor esperado da perda que uma instituição financeira está sujeita a sofrer ao longo de um determinado horizonte de tempo, a um dado nível de confiança.

Em outras palavras, com certa probabilidade, as perdas não excederão o VaR, ou seja, o VaR a nível de confiança 95% está associado a um nível de perda cuja probabilidade de esta perda ser excedida é igual a 5% (Marzano, 2004).

A formulação do problema de otimização de portfólio que minimiza o VaR pode ser expressa pelas seguintes equações:

$$Minimizar\,\alpha \qquad (2.14)$$

s.a.

$$-\sum_{i=1}^{N} x_i r_{ic} - My_c \leq \alpha \qquad c = 1,...,C \qquad (2.15)$$

$$\sum_{c=1}^{C} y_c = (1-\beta\%)C \qquad (2.16)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i = \rho \qquad (2.17)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (2.18)$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,...,N \qquad (2.19)$$

$$y_c \in \{0,1\} \qquad c = 1,...,C \qquad (2.20)$$

onde:

α - variável que fornece o VaR do portfólio com um nível de confiança $\beta\%$

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

β - nível de confiança para o cálculo do VaR

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

r_{ic} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário c

M – número muito grande face as grandezas da equação em questão

y_c - variável binária auxiliar para o cálculo do VaR

ρ – nível mínimo para o valor esperado do retorno do portfólio

A função objetivo (2.14) é a minimização do VaR do portfólio. A restrição (2.15) utiliza uma variável binária auxiliar y_c, que assume o valor 1 quando o cenário c apresentar perda (representada pelo termo $-\sum_{i=1}^{N} x_i r_{ic}$) maior que α (VaR) - nos demais cenários a perda pode ser no máximo α e a variável y_c fica igualada a zero. O número de cenários que pode possuir perdas maiores que VaR é dado por (1-β)%C, o que é garantido pela restrição (2.16). A restrição (2.17) assegura que o valor esperado do retorno do portfólio seja igual a um dado nível definido pelo investidor (ρ). A restrição (2.18) determina que todo capital disponível seja investido e a restrição (2.19) impede que seja investido um percentual negativo em qualquer ativo.

Marzano (2004) atenta para o fato do problema de otimização de portfólio com restrição de VaR utilizar muitas variáveis binárias, o que faz com que sua solução seja extremamente complexa.

Apesar de ser uma medida de risco popular com status elevado na indústria financeira, o VaR possui algumas deficiências. O VaR é uma medida instável e difícil de trabalhar numericamente quando as perdas não são representadas por uma distribuição normal (Rockafellar e Uryasev, 2002). Além disso, Artzner et al. (1999) mostram que o VaR não é uma medida de risco consistente, pois não possui subaditividade. Este é seu inconveniente principal. A não-subaditividade significa que o risco de um portfólio pode ser maior do que a soma individual de riscos de seus componentes.

Outra deficiência apontada é que o VaR é uma medida do risco que somente diz respeito à freqüência das perdas, mas não fornece nenhuma informação sobre a extensão das perdas maiores que VaR (Rockafellar e Uryasev, 2002).

Além disso, o uso do VaR na prática pode ser impróprio, por causa de sua não convexidade, o que pode causar a existência de muitos extremos locais, que conduzirão a um ranking instável de risco (Cheng et al., 2004).

2.3.5.
Conditional Value-at-Risk (CVaR)

A partir das críticas ao VaR em relação a sua consistência como medida de risco e as dificuldades na obtenção da solução na programação matemática, foram propostas novas medidas para representar o risco do portfólio, como o Conditional

Value-at-Risk (CVaR). O CVaR, chamado também Mean Excess Loss, Mean Shortfall, ou Tail VaR, é considerado como uma medida de risco mais consistente que o VaR. (Rockafeller e Uryasev, 2000).

CVaR é definido como a perda média excedida do Value-at-risk (VaR) (Palmquist et al., 1999), em outras palavras, o CVaR a nível de confiança β% é definido como o valor esperado condicional das perdas de um portfólio, dado que as perdas a serem contabilizadas são as maiores ou iguais ao VaR (Marzano 2004). Por exemplo, para $\beta = 95\%$, o CVaR é dado pela média das 5% maiores perdas. A definição assegura que o VaR a nível de confiança β nunca é maior do que o CVaR a nível de confiança β, assim os portfólios com baixo CVaR devem ter também baixo VaR (Rockafeller e Uryasev, 2000).

Rockafeller e Uryasev (1999) apresentam uma abordagem para o otimização de portfólio que calcula o VaR e otimiza o CVaR simultaneamente. Baseado nas perdas associadas a um vetor de decisão que representa o portfólio e um vetor aleatório que representa as incertezas, como por exemplo, parâmetros de mercado que podem afetar a perda, os autores demonstram que o CVaR pode ser minimizado a partir de uma expressão com boas propriedades matemáticas, ou seja, o CVaR pode ser eficientemente minimizado via técnicas de programação linear, o que permite o tratamento de portfólios com grande número de ativos e incertezas representadas por um grande número de cenários. Esta abordagem considera minimização de CVaR enquanto requer um mínimo de retorno esperado. Este método, além de minimizar o CVaR, diminui também o VaR do portfólio, uma vez que o CVaR é maior ou igual ao VaR.

Porém, em muitos casos é preferível maximizar retornos com restrição de risco, isto é, especificar um nível máximo de risco. Assim, Palmquist et al. (1999) estendem a abordagem proposta por Rockafeller e Uryasev (2000) para problemas de otimização com restrição de CVaR, particularmente otimização de portfólio de ativos financeiros.

Seguindo esta abordagem, a formulação matemática do problema de otimização de portfólio com restrição de CVaR, considerando as incertezas de forma discreta através de C cenários equiprováveis é dada por:

$$Maximizar \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \tag{2.21}$$

s.a.

$$\alpha + \frac{1}{(1-\beta)C} \sum_{c=1}^{C} u_c \leq K \tag{2.22}$$

$$u_c \geq 0 \qquad c = 1,...,C \tag{2.23}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_{ic} + \alpha + u_c \geq 0 \qquad c = 1,...,C \tag{2.24}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \tag{2.25}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,...,N \tag{2.26}$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

α - variável que fornece o VaR do portfólio a nível de confiança β%

β - nível de confiança para o cálculo do VaR e do CVaR

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

u_c - variável auxiliar para o cálculo do CVaR

K - limite no CVaR do portfólio (valor requerido pelo investidor)

r_{ic} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário c

A função objetivo (2.21) representa o retorno esperado do portfólio ou, em outras palavras, a média ponderada dos retornos individuais. As restrições (2.22), (2.23) e (2.24) modelam o CVaR do portfólio que deve ser menor ou igual a um limite K especificado pelo investidor. O parâmetro u_c é utilizado como uma variável auxiliar para o cálculo do CVaR. Pode ser verificado que para os cenários com perdas que excedam o VaR do portfólio (representado pela variável α), a variável u_c assume um valor maior que zero. Este valor é contabilizado na equação do lado esquerdo da primeira restrição que é limitada por um valor máximo, K. Quanto maior o risco assumido (maior o valor de K), maior poderá ser a média dos (1-β)% piores retornos. A restrição (2.25) garante que todo capital disponível seja investido e a restrição (2.26) impede que seja investido um percentual negativo em qualquer ativo.

A formulação apresentada é baseada na distribuição de perdas. Marzano (2004) faz uma adaptação a esta formulação para o caso onde se trabalha com distribuição de retornos.

$$Maximizar \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \qquad (2.27)$$

s.a.

$$\alpha + \frac{1}{(1-\beta)C} \sum_{c=1}^{C} u_c \geq K \qquad (2.28)$$

$$u_c \leq 0 \qquad c = 1,...,C \qquad (2.29)$$

$$u_c \leq g_c - \alpha \qquad c = 1,...,C \qquad (2.30)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (2.31)$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,...,N \qquad (2.32)$$

onde:

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

α - variável que fornece o VaR do portfólio a nível de confiança β%

β - nível de confiança para o cálculo do VaR e do CVaR

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

u_c - variável auxiliar para o cálculo do CVaR

K - limite no CVaR do portfólio (valor requerido pelo investidor)

g_c - retorno do portfólio no cenário c

Neste caso, como está se trabalhando com retornos, os sinais de inequação das três primeiras restrições foram invertidos. Assim, a variável auxiliar u_c assumirá valores menores que zero quando o retorno do portfólio no cenário for menor que α (VaR do portfólio). Dessa forma, estes valores negativos serão contabilizados na equação do lado esquerdo da primeira restrição que é limitada por um valor mínimo de K. Quanto maior o risco assumido (menor valor de K), menor deverá ser a média dos (1-β) % piores retornos (CVaR).

Vale ressaltar que o CVaR é representado a partir de uma função convexa, permitindo a construção de algoritmos de otimização eficientes. Além disso, o cálculo numérico do algoritmo é eficiente e estável (Cheng et al., 2004).

2.3.6.
Outras Medidas de Risco

Na literatura são encontrados modelos que utilizam outras medidas de risco, além daquelas já citadas, para avaliação de investimento.

Kono e Yamazaki (1991) propuseram uma medida de risco para formulação de problemas de otimização de portfólio de grande porte. O modelo do desvio absoluto médio (MAD) é uma alternativa à média-variância de Markowitz, cujo modelo de risco lida com problemas de programação linear quadrática. O desvio absoluto médio é definido como:

$$MAD = \frac{1}{C}\sum_{c=1}^{C}\left|\sum_{i=1}^{N}(r_{ic} - \mu_i)x_i\right| \tag{2.33}$$

onde:

C - número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio

N - número de ativos candidatos a compor o portfólio

r_{ic} - retorno do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio no cenário c

μ_i - valor esperado dos retornos do i-ésimo ativo candidato a compor o portfólio

x_i - fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i

Aseeri e Bagajewicz (2004) apresentaram alguns novos conceitos e procedimentos para a gestão de riscos financeiros. Para complementar o uso do Value at Risk (VaR), os autores propuseram uma medida semelhante, o Upside Potential (UP) ou Opportunity Value (OV) como meio de medir a perda de oportunidade versus redução de risco. Com o argumento de que o VaR e o UP são pontos de medidas e não representam o comportamento de toda a curva de risco, apenas os seus valores em determinados pontos, Aseeri e Bagajewicz (2004) propuseram um método que compara as áreas entre duas curvas. A razão proposta, o Risk Area Ratio (RAR), pode ser calculado como razão entre o Opportunity Area (O_Area), área fechada pelas duas curvas acima de suas interseções, com o Risk Area (R_Area), área fechada pelas duas curvas abaixo de suas interseções. A equação (2.34) mostra a definição do RAR. Na Figura (2.2), pode ser visto um gráfico do Valor Presente Líquido (VPL) – ou *Net Present Value* (NPV) - pelo Risco onde estão representadas as curvas de dois portfólios a serem comparados.

$$RAR = \frac{O\_Area}{R\_Area} \qquad (2.34)$$

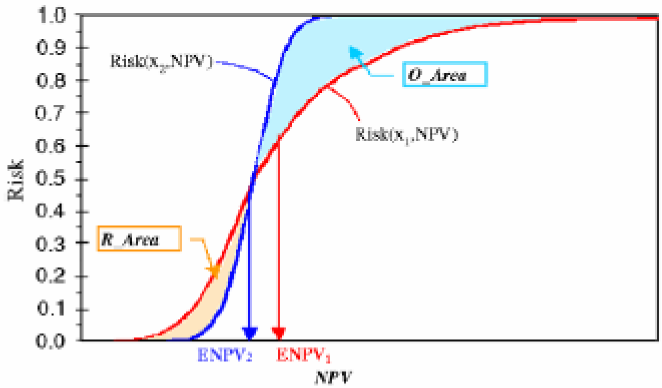

Figura 2.2 – Risk Area Ratio (Aseeri and Bagajewicz, 2004)

Shadwick e Keating (2002) apresentaram uma nova abordagem para analisar as distribuições de retorno de um investimento, a função Omega. De acordo com os autores, Omega foi desenvolvida para superar as inadequações de muitas medidas tradicionais quando aplicadas a investimentos que não possuem distribuição normal de retornos. Esta medida considera todos os momentos da distribuição, além da média e variância, e também leva em conta o nível de retorno contra o qual um determinado resultado será visto como um ganho ou perda. Ela reflete a chance de ganho em relação ao risco de perda dado um certo nível L que representa o resultado mínimo exigido.Omega é definido como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)dx]}{\int_a^L F(x)dx} \qquad (2.35)$$

Onde x é a taxa retorno aleatória de um período do investimento, F(x) = Pr {x<=y} é a distribuição acumulada do retorno de um período, L é o limiar selecionado pelo investidor, e (a,b) representam os valores inferior e superior da distribuição, respectivamente.

Kazemi et al. (2003) mostraram a medida Omega de forma mais intuitiva, ou seja, a medida Omega de forma mais intuitiva, ou seja, Omega pode ser escrita como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b (x-L) f(x)dx}{\int_a^L (L-x) f(x)dx} = \frac{E\left[\max(x-L;0)\right]}{E\left[\max(L-x;0)\right]} = \frac{Call(L)}{Put(L)} \qquad (2.36)$$

Fazendo referência à teoria de opções, o numerador seria o payoff de uma opção de compra sem desconto e o denominador seria o payoff de uma opção de venda sem desconto.

Os autores também apresentam uma nova versão de Omega chamada Sharpe-Omega. Essa medida fornece exatamente a mesma informação que Omega, mas com formulação diferente. Em particular, Sharpe-Omega de um investimento é dado por:

$$\text{Sharpe Omega} = \frac{\text{Retorno Esperado} - \text{Limiar}}{\text{Put Option Price}}$$

2.4. Conclusões

Neste capítulo foram apresentados modelos de otimização sob incerteza, isto é, modelos que consideram dados de entrada probabilísticos. Várias técnicas de modelagem foram desenvolvidas na literatura para solucionar estes problemas. Essas técnicas podem ser divididas em programação estocática e não estocáticas (programação fuzzy).

A programação estocástica trabalha com funções de distribuição de probabilidade para modelar a incerteza dos dados de entrada. Já a programação fuzzy considera parâmetros aleatórios como números fuzzy e as restrições são tratadas como conjuntos fuzzy.

Geralmente os modelos de otimização sob incerteza representam modelos de grande porte e, consequentemente, de difícil manipulação. Junto com as estruturas de modelagem propostas na literatura, uma variedade de algoritmos foi desenvolvida e usada com sucesso em muitas aplicações (Sanihidis, 2004).

Os modelos de otimização sob incerteza trabalham com dados incertos, muitas vezes relacionados com probabilidade de ocorrência de eventos no futuro. Dessa forma, podem existir riscos envolvidos em diversos casos, como por exemplo, na escolha de um portfólio de ativos financeiros.

As medidas do risco têm um papel crucial na otimização sob a incerteza, especialmente em lidar com as perdas que podem ser incorridas na área financeira ou na aquisição de ativos para indústria (Rockafellar e Uryasev, 2002). Existem várias abordagens para otimizar o risco de um portfólio de investimentos que são utilizadas para restringir os modelos de otimização de portfólio.

Algumas dessas abordagens foram detalhadas ao longo deste capítulo. Inicialmente foram mostrados o modelo média variância Markowitz e o modelo

Minimax. Em seguida, foram apresentados os modelos que utilizam o Value-at-risk (VaR) e o Conditional Value-at-Risk (CVaR) como medidas de risco.

Os problemas da gerência de risco com VaR e CVaR podem ser classificados na otimização estocástica (Rockafellar e Uryasev, 2002). Vale ressaltar que restringir o CVaR de um portfólio se caracteriza como uma estratégia de gerenciamento de riscos mais conservadora do que restringir o VaR, já que as perdas a serem contabilizadas são as maiores ou iguais ao VaR (Marzano, 2004).

Rockafellar e Uryasev (2002) afirmam que o CVaR fornece facilidades na otimização, uma vez que, com as técnicas de programação lineares, muitos cálculos de problemas de grande porte tornam-se práticos, ao contrário daqueles que utilizam outras medidas, como o VaR, por exemplo. Em seu artigo, os autores ilustram, através de exemplo, a eficiência e a estabilidade numéricas de tais cálculos.

A partir da análise das métricas de risco encontradas na literatura, observou-se que o CVaR é uma medida adequada para ser utilizada no modelo estudado nesta dissertação, devido à sua consistência e boas propriedades matemáticas. Neste trabalho serão apresentadas duas abordagens para tratamento do risco em um problema de otimização sob incerteza na área de petróleo e derivados: MiniMax e CVaR.

É importante lembrar que a aplicação dos modelos desenvolvidos para a área econômico-financeira à área de suprimento de petróleos e derivados não é direta, e sim deve haver uma adaptação considerando as restrições de oferta de petróleo, demanda de derivados, limites operacionais entre outras.