

## 4

# ANÁLISE DETERMINÍSTICA E PROBABILÍSTICA DA ESTABILIDADE DE TALUDES

### 4.1.

#### Introdução

As análises tradicionais de estabilidade de taludes são baseadas no método de equilíbrio limite obtendo-se um fator de segurança (FS). Geralmente o FS deve ser igual ou maior que 1,5 para garantir a segurança. Os dados utilizados na análise são geralmente os valores médios, mas nem sempre estes dados são os mais representativos, devido às incertezas existentes, e principalmente às diferentes condições de composição dos solos. É, portanto, preciso o bom julgamento do engenheiro na determinação destes dados.

Como foi exposto nos Capítulos 2 e 3, os solos mostram uma incerteza inerente em suas propriedades devido principalmente às condições geológicas. Ferramentas adicionais como análise probabilística deveriam ser implementados, pois permitem quantificar as incertezas dos parâmetros de análise.

Os parâmetros de entrada na análise probabilística são tratados como variáveis aleatórias. Cada variável pode ter qualquer valor dentro de um intervalo determinado, com uma probabilidade de ocorrência especificada. Segundo El-Ramly (2001), uma análise probabilística é uma reflexão de nosso conhecimento imperfeito.

Em geral a análise probabilística é baseada na obtenção do índice de confiabilidade  $\beta$ , que permite quantificar a probabilidade de ruptura.

## 4.2. Análise Determinística de Estabilidade de Taludes

As análises determinísticas de estabilidade de taludes, usadas comumente na geotecnia, são baseadas em métodos de equilíbrio limite (Bishop, 1955; Spencer, 1967; Morgenstern-Price, 1965; Janbu, 1973). Estes métodos consideram as melhores quantificações dos parâmetros de entrada (valores médios). O fator de segurança (FS), obtido geralmente deve ser suficiente para garantir a segurança.

Este tipo de análise não leva em consideração as incertezas devido a pequenas quantidades de amostras ou observações feitas para se definir o valor médio. Desconsideram-se também os erros nos procedimentos de ensaios, como descrito nos Capítulos 2 e 3.

Muitos autores discutiram o uso de análises de estabilidade determinísticas já que sempre estão influenciadas pelo julgamento do engenheiro e não fornecem nada além do valor de FS. Este valor não indica nada sobre o funcionamento do talude ou os parâmetros com mais influência na estabilidade.

Lacasse e Nadim (1996) mostraram na Figura 4.1, que não sempre um fator de segurança maior a 1,5, fornece um adequado parâmetro para quantificar a segurança.

Segundo a Figura 4.1, um fator de segurança (FS) igual a 1,79 tem uma probabilidade de ruptura de  $5 \times 10^{-3}$  enquanto que um fator de segurança (FS) igual a 1,4 tem uma probabilidade de ruptura de  $10^{-4}$ . Esta última análise mostra, entretanto menos incerteza no cálculo do fator de segurança e é mais confiável que a análise com FS de 1,79.

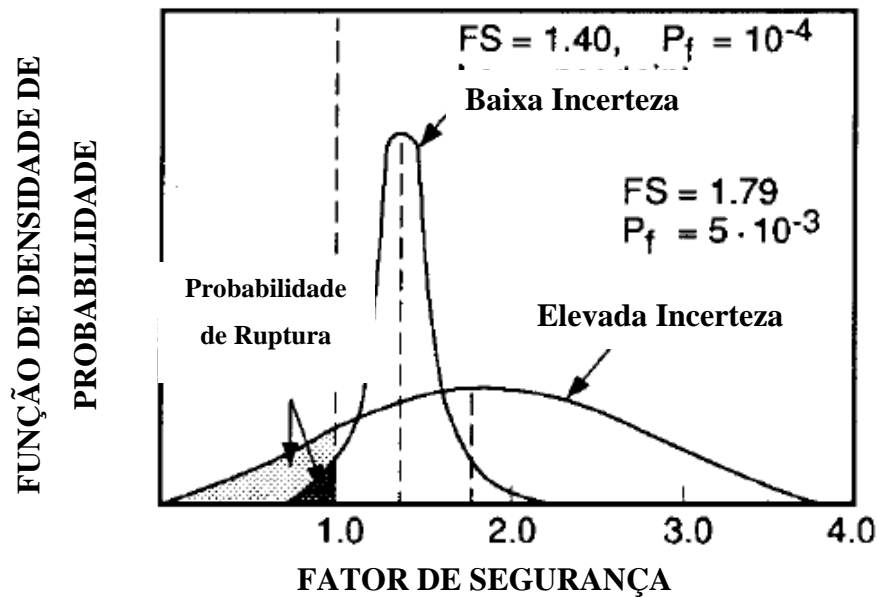


Figura 4.1 – Probabilidade de ruptura de estacas, Lacasse e Nadim (1996).

#### 4.3. Análise Probabilística de Estabilidade de Taludes

Este tipo de análise é baseado em alguns princípios dos métodos determinísticos (equilíbrio limite), mas sua maior vantagem é que podem ser quantificadas as incertezas inerentes. Como resultado a análise probabilística fornece informação sobre os parâmetros que influenciam mais significativamente o problema.

Duncan (2001) fez um resumo das principais vantagens de análise de probabilidade aplicadas à geotecnia, segundo várias fontes (Tabela 4.1).

Em geral as análises de probabilidade de ruptura de taludes consistem primeiro em definir os dados para obter uma função de probabilidade representativa (Normal, Log Normal) de cada parâmetro que represente uma incerteza na análise, ou aqueles que influam muito no resultado final. Logo, as distribuições de probabilidade dos parâmetros são integradas na análise de estabilidade para estimar a distribuição de probabilidade do fator de segurança.

A Figura 4.2 mostra esquematicamente este conceito.

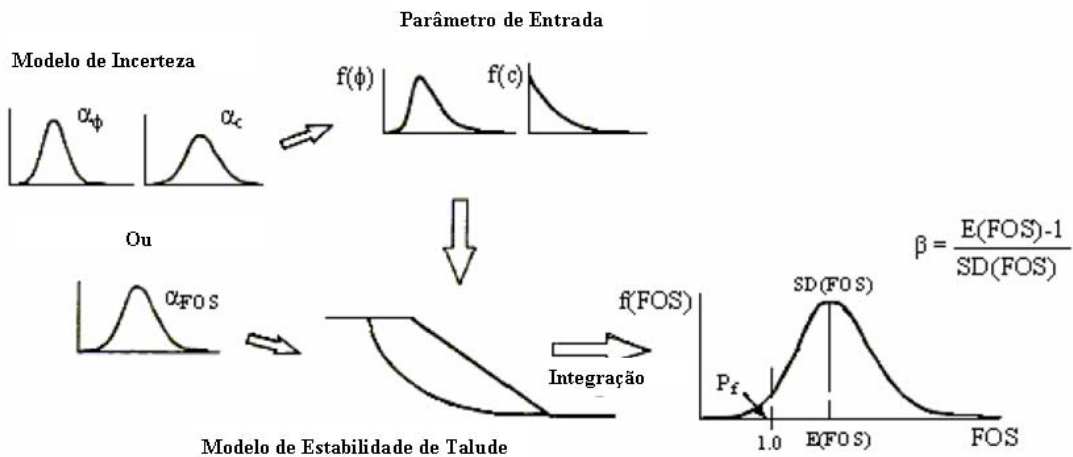


Figura 4.2 – Conceito de análise probabilísticas de estabilidade de taludes.

Tabela 4.1 – Importância da análise probabilística de estabilidade de taludes, Duncan (2001).

Autor	Benefícios da Análise de Probabilidade, Confiabilidade
Christian e Baecher	Fornece uma estrutura para estabelecer apropriados fatores de segurança e dirige melhor a um entendimento da relativa importância das incertezas.
Ladd e Da Re	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Fornece um método sistemático para avaliar combinadas influências de incertezas dos parâmetros que afetam o fator de segurança.</li> <li>- Fornece um sistemático método de determinação do grau de segurança, ao menos em termos relativos.</li> </ul>
Moriwaki e Barneich	- Quantifica a contribuição de todas as incertezas de cada parâmetro.
Koutsoftas	- Fornece uma ferramenta útil para avaliar o risco associado com recomendações de desenho.

### 4.3.1. Quantificação da Probabilidade de Ruptura

O termo probabilidade de ruptura não significa necessariamente que a estrutura possa ter uma falha catastrófica. É geralmente mal compreendido por pessoal não técnico ou não especialista no tema.

O corpo de engenheiros dos EUA (U.S. Army Corps of Engineers, 1995) usa o termo de “probabilidade de uma performance insatisfatória ( $P_u$ )” no lugar de “probabilidade de ruptura ou falha”. É definido como a probabilidade de um valor da função de performance ou desempenho (fator de segurança) ultrapassar o limite de estado. Em análise de estabilidade de taludes, o limite de estado é tipicamente associado à  $FS=1,0$ .

Em geral a probabilidade de ruptura ( $Pr$ ) pode ser obtida através do cálculo do índice de confiabilidade ( $\beta$ ). O índice de confiabilidade pode ser definido como:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} \quad (4.1)$$

Onde  $M$  é a margem de segurança,  $\mu_M$  é o valor médio, e  $\sigma_M$  é o desvio padrão da margem de segurança.

A margem de segurança ( $M$ ) geralmente é igual à diferença entre a resistência disponível ( $R$ ) e a carga ou tensão à qual o sistema é exposto ( $Q$ ).

$$M = R - Q \quad (4.2)$$

No caso em que  $R$  e  $Q$  sejam normalmente distribuídos, a margem de segurança  $M$  também será normalmente distribuída e, na equação 4.1, o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) pode ser obtido como:

$$\beta = \frac{E[FS]-1}{\sigma_{FS}} \quad (4.3)$$

Note que a equação 4.3 só é válida no caso em que o fator de segurança pode ser considerado como normalmente distribuído.

No caso em que R e Q tenham distribuições log-normais, a margem de segurança M também será log-normal. Na equação 4.1, o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) pode ser obtido como:

$$\beta = \frac{E[\ln FS]}{\sigma_{\ln FS}} \quad (4.4)$$

Onde:

$$E[\ln FS] = \ln(E[FS]) - \frac{\sigma_{\ln FS}^2}{2} \quad (4.5)$$

$$\sigma_{\ln FS} = \sqrt{\ln(1 + Cov_{FS}^2)} \quad (4.6)$$

Onde  $Cov_{FS}$  é o coeficiente de variação do fator de segurança, que pode ser obtido como:

$$Cov(FS) = \frac{\sigma_{FS}}{E[FS]} \quad (4.7)$$

A probabilidade de ruptura em qualquer caso pode ser obtida como:

$$P(u) = \Phi(-\beta) \quad (4.8)$$

Onde  $\Phi(-\beta)$  é obtido de funções de densidade de probabilidade normal  $N(0,1)$ , com média nula e um desvio padrão de 1,0.

A Figura 4.3 mostra a probabilidade de ruptura contra o índice de confiabilidade. Pode-se observar claramente que, para um índice de confiabilidade ( $\beta$ ) menor ou igual a 2, existem pequenas diferenças entre os resultados de probabilidade de ruptura obtidas, para as diferentes funções de probabilidade mostradas.

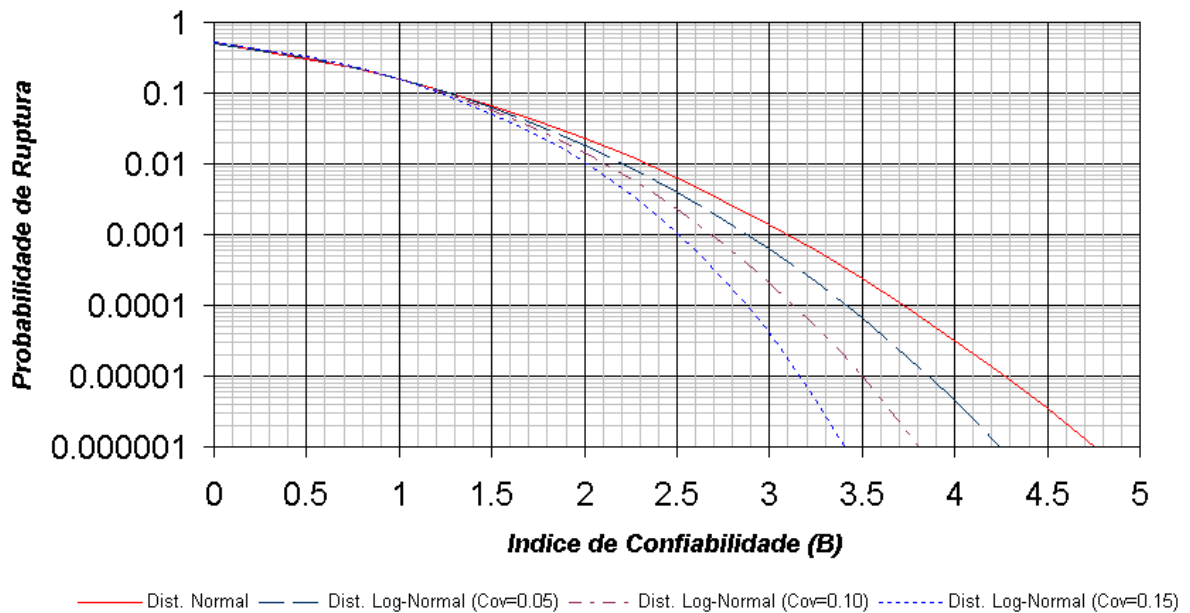


Figura 4.3 – Probabilidade de ruptura vs Índice de confiabilidade ( $\beta$ ).

Da Figura 4.3 também pode-se observar que, para pequenos valores de índice ( $\beta$ ), a probabilidade de ruptura é ligeiramente maior quando se tem uma distribuição de probabilidade normal. Assim assumir distribuições de probabilidade normais na ausência de dados é um procedimento a favor da segurança, pois a probabilidade de ruptura estará ligeiramente superestimada.

### 4.3.2. Probabilidades de Ruptura Aceitáveis

Uma vez calculada a probabilidade de ruptura, as perguntas a fazer são: (i) será esta probabilidade de ruptura aceitável?, (ii) Quais são os intervalos de probabilidade aceitáveis para um determinado problema?

Antes de se responder estas perguntas, é preciso antes responder a uma terceira pergunta: Qual é o risco que pode ser admitido?

O risco por definição é:

$$\text{Risco} = (\text{Probabilidade} \times \text{Conseqüência}) = (pc) \quad (4.9)$$

Na equação 4.9 o risco é função da probabilidade de ocorrência (ou de ruptura) e das conseqüências associadas à ocorrência.

Portanto, a probabilidade de ruptura admissível deve ser função do risco que se queira assumir e das conseqüências associadas a estes.

Vários autores e instituições desenvolveram gráficos (“*F-N Charts*”) para o gerenciamento do risco, em função da probabilidade de ruptura (ou performance insatisfatória) e das conseqüências (vidas humanas, construções afetadas, prejuízos, etc.), como se pode observar nas Figuras 4.4 a 4.7, para diferentes tipos de construções.

Baecher 1982b (Figura 4.4) mostra diferentes probabilidades de ruptura admissíveis, de acordo com o tipo de estrutura a ser construída. No caso de barragens uma probabilidade de ruptura de  $10^{-4}$  pode ser aceitável e recomendada, segundo o autor.



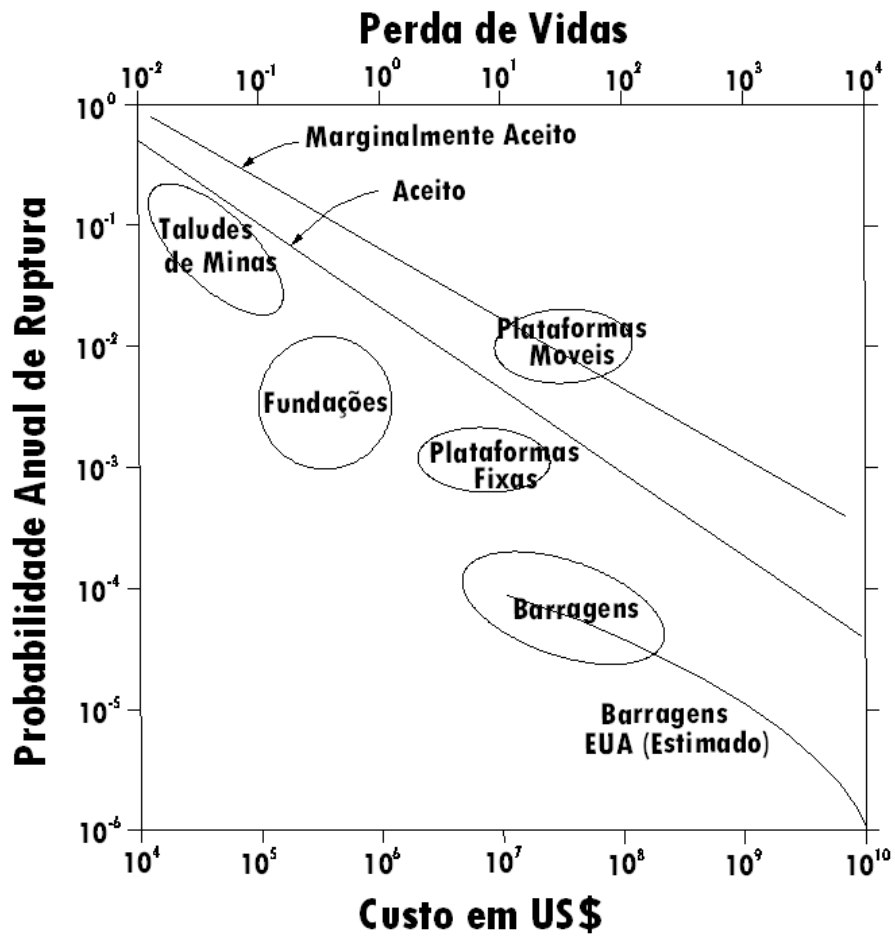


Figura 4.4 – Probabilidades de ruptura admissíveis, Baecher (1982b).

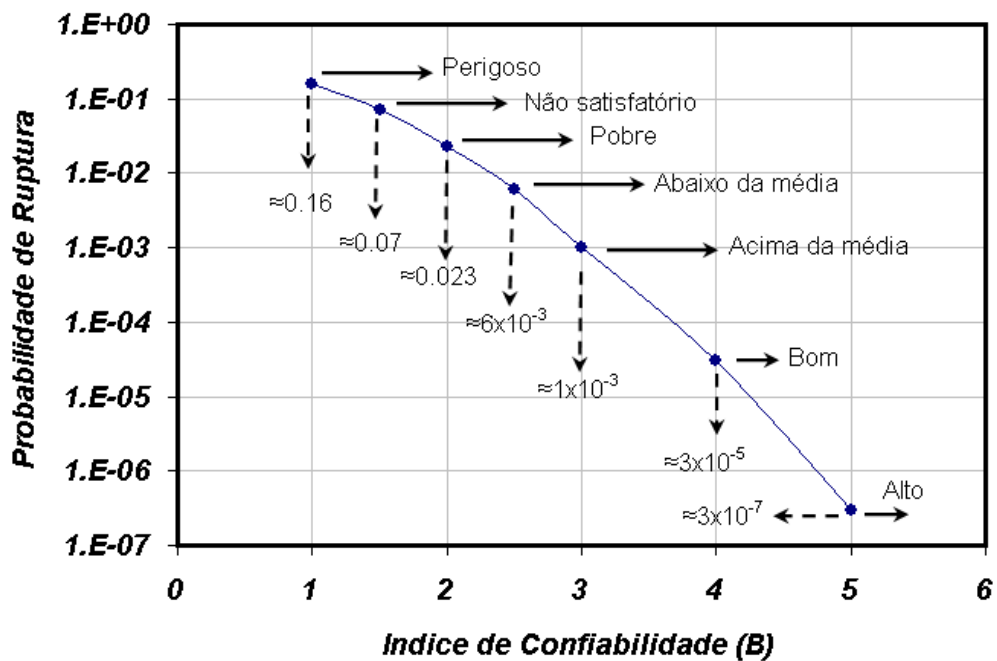


Figura 4.5 - Probabilidades de ruptura, US Army Corps of Engineers (1995).

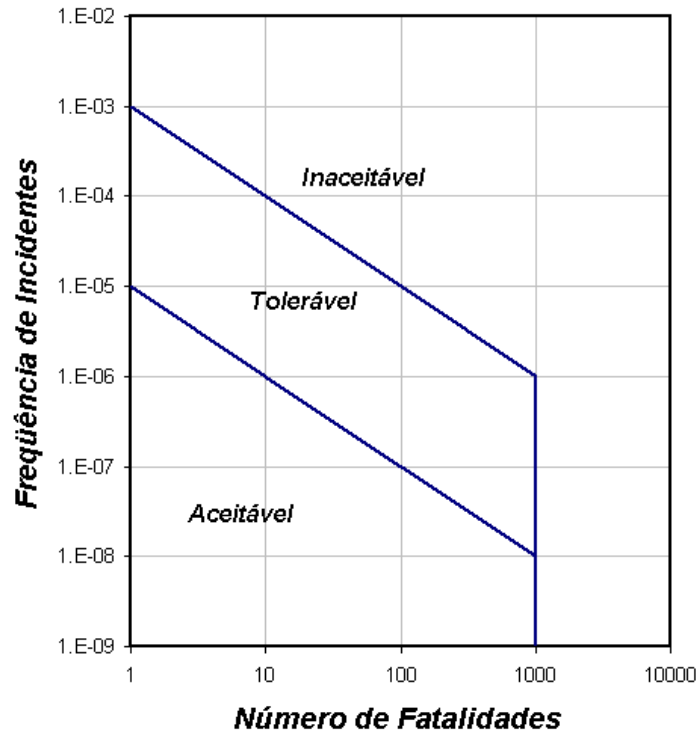


Figura 4.6 - Risco social aceitável proposto pelo departamento de planejamento de Hong Kong para deslizamentos, Baecher e Christian (2003).

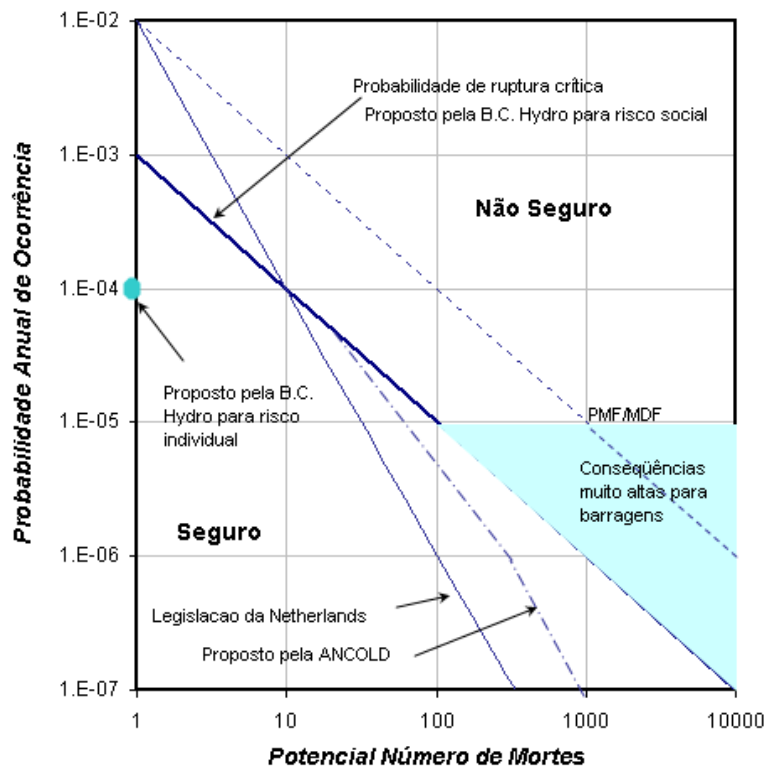


Figura 4.7 - Probabilidade de ruptura crítica para barragens, proposta pela British Columbia Hydro, Canadá, Nielsen et al (1994).

Wolff (1996) propôs que, em análises de estabilidade de taludes comuns, seja designada uma probabilidade de ruptura de  $10^{-3}$  (índice de confiabilidade de 3), como aceitável. No caso de taludes críticos, como os das barragens, sugere uma probabilidade de ruptura de  $3 \times 10^{-5}$  (índice de confiabilidade de 4), como aceitável.

O “*US Army Corps of Engineers (1995)*” recomenda valores de probabilidade de ruptura de  $3 \times 10^{-5}$  como níveis aceitáveis de performance para taludes. A Figura 4.5 mostra os diferentes níveis propostos.

A “*British Columbia Hydro*” (Nielsen et al, 1994) propôs probabilidades de ruptura de  $10^{-4}$  como aceitáveis para barragens (Figura 4.7).

Sandroni e Sayão (1992), baseados em retro-análises de taludes estáveis e rompidos de mineração de ferro, concluem pela adoção de uma probabilidade de ruptura de  $2.3 \times 10^{-2}$ , como valor mínimo de projeto.

Segundo El-Ramly (2001) a maior desvantagem destes gráficos é que nenhum considera as condições particulares de geometrias, instrumentação, fontes e níveis de incertezas (variabilidade dos solos, profundidades de investigação, exatidão do modelo de projeto, qualidade da construção, etc.), pelo que tais critérios podem não valer em qualquer talude.

O mesmo autor conclui que probabilidades de ruptura críticas reportadas na literatura geotécnica são conservativas. Uma probabilidade de ruptura crítica de  $2 \times 10^{-2}$  (ou seja, 2%), ou um índice de confiabilidade de 2,0, podem ser considerados como um limite para uma performance satisfatória de taludes.

Esta probabilidade de ruptura crítica (2%) não considera todos os casos de performance, quando se requeira estruturas que não possam suportar excessivas deformações ou fissuras (“*cracking*”) têm que ser adotados critérios de projeto mais rigorosos.

Em resumo, a adoção de um valor máximo de probabilidade de ruptura para um projeto, não está bem esclarecida. Na realidade, depende muito do tipo de projeto a ser executado e da quantidade de informação disponível para a análise.

Num projeto que disponha de muita informação de boa qualidade e cujo risco não seja muito grande (perda de vidas), podem ser adotados maiores valores de probabilidade de ruptura como aceitáveis.

A execução de análises probabilísticas de estabilidade de taludes para determinar a probabilidade de ruptura, e posteriormente o risco associado, não deve substituir a análise determinística, onde se obtém o fator de segurança. As duas análises devem ser feitas e usadas em conjunto para fornecer uma melhor aceitabilidade do projeto. Por exemplo, nos casos onde probabilidades de ruptura reduzidas sejam obtidas, pode ser justificada a adoção de menores fatores de segurança no projeto.

### **4.3.3. Métodos de Análises Probabilísticas**

Existem muitos tipos de análise de probabilidade desenvolvidos nestes últimos anos, mas em geral podem ser reunidos em três grupos: métodos analíticos, métodos aproximados e simulação de Monte Carlo.

#### **4.3.3.1. Métodos Analíticos**

Neste tipo de análise, a função de densidade de probabilidade das variáveis de entrada na análise são expressas matematicamente. Logo, é integrado analiticamente num modelo de estabilidade de talude para poder desenvolver uma expressão matemática da função de densidade do fator de segurança.

Este método tem uma matemática complexa, e não é prático na maioria dos problemas. Este método está descrito em McMahon (1975), Marek e Savely (1978), Tobutt e Richards (1979).

### 4.3.3.2. Métodos Aproximados

Em geral estes métodos são baseados em versões modificadas de Método do Segundo Momento de Primeiro Ordem (FOSM), e Método das Estimativas Pontuais (EP). Estas duas técnicas estarão consideradas neste estudo, onde só é preciso o conhecimento do valor médio e desvio padrão de todas as variáveis de entrada, além da função de performance  $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ , que define o fator de segurança (método de Bishop etc.), onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são as variáveis de entrada (propriedades dos solos etc.).

Estes tipos de análise não precisam do conhecimento das funções de densidade de probabilidade das variáveis de entrada. Na função de performance, é considerada uma função de densidade de probabilidade do fator de segurança com distribuição Normal ou Log Normal.

A maior desvantagem é a não consideração da variabilidade espacial, pois assumem distâncias de autocorrelação infinitas para as propriedades dos solos.

#### 4.3.3.2.1. Método do Segundo Momento de 1ª Ordem

Segundo Harr (1987), a idéia básica do método do Segundo Momento de 1ª Ordem (chamado a partir de agora como Segundo Momento) é expressar a função de performance (fator de segurança) como uma função de diferentes variáveis aleatórias consideradas na análise estatística.

Seja a função de performance definida como:

$$g = g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (4.8)$$

Onde os valores médios da função e do vetor  $x$  são dados por:

$$\mu_x = (\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \mu_{x_3}, \dots, \mu_{x_n}) \quad (4.9)$$

Se esta função de performance é expandida ao redor de seus valores médios das variáveis aleatórias, mediante as series de Taylor, obtém-se:

$$g(x) = g(\mu_x) + \frac{1}{1_i}(x - \mu_x) \frac{dg}{dx} + \frac{1}{2_i}(x - \mu_x)^2 \frac{d^2g}{dx^2} \dots \quad (4.10)$$

Mantendo-se somente a primeira derivada (linear), obtém-se:

$$g(x) - g(\mu_x) = \frac{1}{1_i}(x - \mu_x) \frac{dg}{dx} \quad (4.11)$$

Elevando-se ao quadrado a equação 4.11, e fazendo-se manipulações algébricas, obtém-se a variância da função de performance (fator de segurança) como:

$$V[FS] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{x_i, x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \frac{dFS}{dx_i} \frac{dFS}{dx_j} \quad (4.12)$$

A equação 4.12 pode ser expandida como:

$$V[FS] = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{dFS}{dx_i} \sigma_{x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \left( \frac{dFS}{dx_i} \frac{dFS}{dx_j} \right) \rho_{x_i, x_j} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad (4.13)$$

A equação 4.13 é usada quando as variáveis  $x_i$ ,  $x_j$  são correlacionadas. No caso em que estas variáveis sejam independentes, a equação 4.13 se transforma em:

$$V[FS] = \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{dFS}{dx_i} \sigma_{x_i} \right)^2 \quad (4.14)$$

O valor médio ou esperado do fator de segurança é obtido com todos os dados médios de cada variável aleatória, definida como:

$$E(FS) = f(\mu_{x_1}, \mu_{x_1}, \mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n}) \quad (4.15)$$

A equação 4.15, junto com a equação 4.13 ou 4.14, pode fornecer o índice de confiabilidade ( $\beta$ ), definido nas equações 4.3 ou 4.4, dependendo da função de densidade de probabilidade a ser considerada para o fator de segurança.

O método é chamado de Segundo Momento porque usa a variância (segundo momento da função de performance). É também referido como sendo de 1ª ordem porque usa só a primeira derivada da série de Taylor (Linear). As equações 4.12 e 4.15 são válidas somente se a função de performance for linear.

No caso de estabilidade de taludes, esta condição não é satisfeita. Entretanto, é considerada como uma aproximação aceitável. Em geral, quanto maior é a não linearidade da função de performance, menor é a precisão do método de Segundo Momento.

Como se observa nas equações 4.13 ou 4.14, é preciso obter as derivadas parciais da função de performance, em relação aos parâmetros  $x_i$   $\left( \frac{dFS}{dx_i} \right)$ . Christian et al (1992, 1994) e Sandroni e Sayão (1992) utilizaram o método das diferenças divididas (ascendentes ou descendentes) como aproximação matemática para a obtenção dos valores das derivadas parciais. O procedimento consiste em variar separadamente cada parâmetro, observando-se a variação correspondente do valor da função de performance ou desempenho FS. A aproximação da derivada parcial de cada parâmetro é então obtida através da razão entre a variação observada de FS e a variação estipulada para cada parâmetro. A aproximação da derivada parcial é expressa por:

$$\frac{dFS}{dx} = \frac{FS(\mu_{x_i} \pm \delta x_i) - E(FS)}{dx_i} \quad (4.16)$$

Segundo Baecher e Christian (2003), para uma melhor estimativa das derivadas, a variação dos parâmetros deve ser suficientemente pequena para que a razão  $\frac{dFS}{dx_i}$  seja considerada constante, ou seja, independente do valor de  $dx_i$ .

Dell'avanzi (1995) concluiu que, para variações dos parâmetros em torno de 10% do seu valor médio (acrécimo ou decréscimo), esta condição é satisfeita.

Mostyn e Li (1993), U.S. Army Corps of Engineers (1995), Wolff et al (1996), Hassan e Wolff (1999, 2000), Duncan (2000) recomendam que a avaliação de  $dFS/dx_i$  seja feita por diferenças finitas central, com a variação de cada parâmetro sendo igual ao respectivo desvio padrão  $\sigma_i$ . A equação 4.16 é reescrita como:

$$\frac{dFS}{dx} = \frac{FS[E(X_i) + \sigma_{x_i}] - FS[E(X_i) - \sigma_{x_i}]}{2\sigma_{x_i}} \quad (4.17)$$

Segundo estes autores, apesar das derivadas parciais ficarem mais precisas quando a avaliação é com pequenos incrementos, avaliar as derivadas sobre um intervalo de mais ou menos um desvio padrão poderia capturar melhor algo da conduta não linear da função sobre um intervalo de valores prováveis.

Baecher e Christian (2003) resumiram o método de Segundo Momento nas seguintes sete etapas:

1. Identificar as variáveis significativas que contribuem nas incertezas.
2. Encontrar os valores médios, desvios padrão, coeficientes de correlação e distâncias de autocorrelação das variáveis.
3. Determinar como as variâncias são distribuídas entre incertezas espaciais e sistemáticas e minimizar os erros no possível.
4. Calcular o valor esperado da função de performance (FS) com os valores médios das variáveis.
5. Calcular as derivadas parciais da função FS com respeito às variáveis.
6. Calcular a variância total da função FS (equações 4.13 ou 4.14).
7. Calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  e a probabilidade de ruptura.



Uma das maiores vantagens desta técnica é sua simplicidade, especialmente quando se consideram várias fontes de incerteza. Não é preciso o conhecimento da função de densidade das variáveis aleatórias, nem da função de performance, que geralmente é assumida com distribuição Normal.

Outro aspecto importante do método é que se pode obter a contribuição de cada variável aleatória na variância de FS, fazendo uma inspeção da equação 4.13 ou 4.14.

Usando a equação 4.17 como aproximação das derivadas parciais, são necessárias só  $2n+1$  análises determinísticas para se obter a probabilidade de ruptura, onde  $n$  é o número de variáveis aleatórias. Se for usada a equação 4.16, o número de análises determinísticas cai para  $n+1$ .

Entretanto, a exatidão desta técnica pode ser questionada quando se lida com relações não lineares e variabilidades acentuadas do solo, devido ao truncamento da primeira derivada na série de Taylor.

A variabilidade espacial dos parâmetros dos solos não é considerada diretamente na análise, segundo Duncan, Navin e Wolff (2003), a redução na variância que resulta da variabilidade espacial (médias espaciais) pode ser agregada na análise, usando fatores de correção, como mostrado na equação 3.27, do Capítulo 3.

Segundo El-Ramly, Morgenstern e Cruden (2003b), o método de Segundo Momento é aplicado primeiramente a problemas onde não existam correlações. Com um esforço extra, o método pode ser aplicado quando existir correlação entre dois parâmetros. Porém quanto maior for a quantidade de parâmetros correlacionados, mais difícil ou trabalhosa passa a ser a análise.

#### 4.3.3.2.2. Método das Estimativas Pontuais

Este método é uma aproximação numérica de técnicas de integração, desenvolvido por Rosenblueth (1975). Neste método, a distribuição de probabilidade de cada variável aleatória contínua é representada por dois pontos  $x_+$  e  $x_-$ , com concentrações de probabilidade  $P_+$  e  $P_-$ . A Figura 4.8 ilustra este conceito.

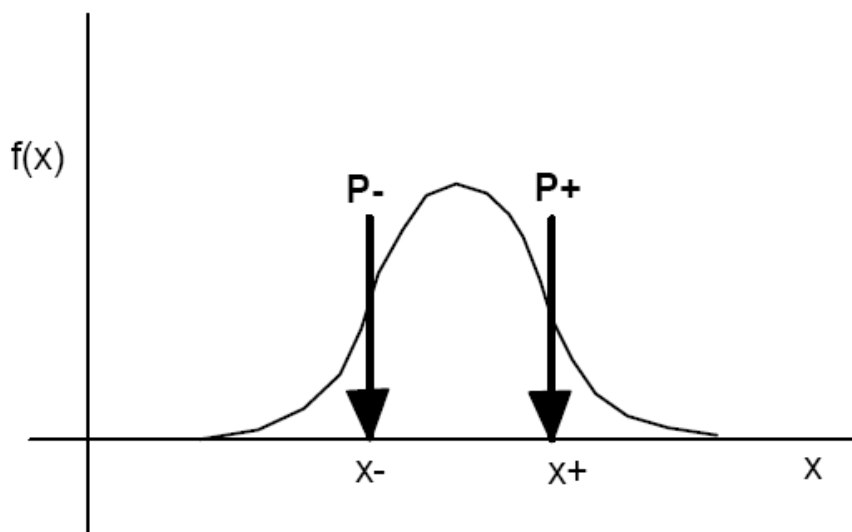


Figura 4.8 – Estimativas pontuais da função  $f(x)$ .

Na realidade, o método consiste em transformar uma variável contínua  $x$  em uma variável discreta, considerando apenas dois pontos  $x_+$  e  $x_-$  com concentrações de probabilidade  $P_+$  e  $P_-$  formando uma equivalente distribuição de probabilidade da variável aleatória. Os pontos e concentrações de probabilidade são selecionados de tal forma que o primeiro e segundo momentos (média e variância) da distribuição discreta são os mesmos que os da função original.

O método usa uma função geradora de momentos para poder obter os primeiros momentos probabilísticos da distribuição. Esta função geradora é obtida através da subdivisão do processo determinístico em  $2^n$  análises determinísticas, onde  $n$  indica o número de variáveis aleatórias consideradas.

As 2<sup>n</sup> análises são obtidas através da combinação dos pontos  $x_+$  e  $x_-$ , obtidos como:

$$\begin{aligned}x_{i_+} &= E[x_i] + \sigma_{x_i} \\x_{i_-} &= E[x_i] - \sigma_{x_i}\end{aligned}\quad (4.18)$$

O valor de  $E[x]$  é o valor médio do parâmetro  $x$  e o valor de  $\sigma(x)$  é o correspondente desvio padrão.

Após obtidos os pontos (equação 4.18), a função de performance (fator de segurança) é calculada nestes dois pontos ( $FS_+$ ,  $FS_-$ ).

As concentrações de probabilidade são obtidas como:

$$P_{\pm} = \frac{1}{2^n} \left( 1 \pm \sum \rho_{ij} \right) \quad (4.19)$$

Onde  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação. A função geradora de momentos pode ser definida como:

$$E(FS^m) = P_+ FS_+^m + P_- FS_-^m \quad (4.20)$$

Onde  $m$  é a ordem do momento probabilístico de interesse. No caso de  $m=1$ , obtém-se o valor médio da função FS. A variância do fator de segurança pode ser obtida como:

$$V(FS) = E[FS^2] - (E[FS])^2 \quad (4.21)$$

A parte inicial desta equação pode ser obtida na equação 4.20 com  $m=2$ . O índice de confiabilidade ( $\beta$ ) pode ser obtido segundo as equações 4.3 ou 4.4.

Como exemplo, quando se tem um talude com duas variáveis aleatórias  $(c, \phi)$ , são necessárias quatro análises, executadas conforme a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Representação esquemática do método de estimativas pontuais.

Análise	Valor de $c$	Valor de $\phi$	Fator de Segurança
1	$c + \sigma_c$	$\phi + \sigma_\phi$	$FS_{++}$
2	$c + \sigma_c$	$\phi - \sigma_\phi$	$FS_{+-}$
3	$c - \sigma_c$	$\phi + \sigma_\phi$	$FS_{-+}$
4	$c - \sigma_c$	$\phi - \sigma_\phi$	$FS_{--}$

Segundo a equação 4.20, o valor médio do fator de segurança é obtido como:

$$E(FS) = P_{++}FS_{++} + P_{+-}FS_{+-} + P_{-+}FS_{-+} + P_{--}FS_{--} \quad (4.22)$$

Logo, para  $m=2$ , é obtido:

$$E(FS^2) = P_{++}FS_{++}^2 + P_{+-}FS_{+-}^2 + P_{-+}FS_{-+}^2 + P_{--}FS_{--}^2 \quad (4.23)$$

A variância é obtida através da equação 4.21. Neste caso, as concentrações de probabilidade são:

$$P_{++} = P_{+-} = P_{-+} = P_{--} = \frac{1}{2^2} \quad (4.24)$$

No caso que se tenha um coeficiente de correlação  $(\rho_{c\phi})$  entre as duas variáveis aleatórias  $(c, \phi)$ , as concentrações de probabilidade são:

$$\begin{aligned}
 P_{++} &= P_{--} = \frac{1}{2^2}(1 + \rho_{c\phi}) \\
 P_{-+} &= P_{+-} = \frac{1}{2^2}(1 - \rho_{c\phi})
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

Quando se tem duas camadas de solo, cada uma com dois parâmetros de resistência  $[(c_1, \phi_1), (c_2, \phi_2)]$ , os procedimentos para obter a média e variância do fator de segurança são os mesmos que os indicados na Tabela 4.2 e nas equações 4.22, 4.23. A diferença está na obtenção adequada das concentrações de probabilidade. Neste caso, para variáveis não correlacionadas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 P_{++++} &= P_{+---} = P_{-+++} = P_{-+--} = P_{-+-+} = P_{-+--} = \\
 P_{+--+} &= P_{-+++} = P_{+---} = P_{-+--} = P_{-+-+} = P_{-+--} = \\
 P_{-+-+} &= P_{+--+} = P_{+---} = P_{-+--} = \frac{1}{2^4}
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

No caso de existência de correlação entre os parâmetros de resistência  $(\rho_{c_1\phi_1}, \rho_{c_2\phi_2})$ , o cálculo das concentrações de probabilidade pode ser obtido como:

$$\begin{aligned}
 P_{++++} &= P_{+---} = P_{-+++} = P_{-+--} = \frac{(1 + \rho_{c_1\phi_1} + \rho_{c_2\phi_2})}{2^4} \\
 P_{+--+} &= P_{-+++} = P_{+---} = P_{-+--} = \frac{(1 + \rho_{c_1\phi_1} - \rho_{c_2\phi_2})}{2^4} \\
 P_{+---} &= P_{-+++} = P_{+---} = P_{-+--} = \frac{(1 - \rho_{c_1\phi_1} + \rho_{c_2\phi_2})}{2^4} \\
 P_{-+-+} &= P_{+--+} = P_{+---} = P_{-+--} = \frac{(1 - \rho_{c_1\phi_1} - \rho_{c_2\phi_2})}{2^4}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Como pode ser observado, este método tem como desvantagem o fato de requer um número muito elevado de análises quando a quantidade de variáveis aumenta.

Rosenblueth (1975) propõe uma técnica para reduzir o número de cálculos (de  $2^n$  para  $2n+1$ ), quando as variáveis são não correlacionadas e quando sua assimetria (Quarto momento da função de densidade) pode ser ignorada.

Harr (1989) propõe um método que pode ser usado quando as variáveis são correlacionadas, mas o quarto momento da função tem que ser zero. Neste método que é baseado no cálculo dos autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação, são necessários  $2n$  cálculos.

Hong (1996, 1998) propõe um método que é usado para o caso de variáveis não correlacionadas com assimetria significativa, reduzindo a quantidade de cálculos para  $2n+1$ .

De igual maneira ao método de Segundo Momento este método (Estimativas Pontuais) não requer o conhecimento da forma da distribuição das variáveis aleatórias (Normal, Log normal). A função de performance (FS) também é geralmente assumida como Normal.

O método de estimativas pontuais pode dar valores adequados dos dois primeiros momentos da função de performance, com somente dois pontos e suas respectivas concentrações de probabilidade. Segundo Rosenblueth (1975), para casos práticos, o método fornece resultados satisfatórios.

Segundo Harr (1987) e Baecher e Christian (2003), o método (EP) não pode ser usado para obter momentos maiores da função (FS) do que o segundo. É recomendável também que o coeficientes de variação, seja pequeno ( $Cov \leq 0,2$ ), e que a função FS a ser integrada possa ser aproximada por um polinômio de terceira ordem. Se estas três condições são satisfeitas, o método é muito adequado.

Segundo Baecher e Christian (2003), o método de estimativas pontuais é mais preciso que o método de Segundo Momento, devido a que este método é baseado em uma baixa ordem de expansão. Harr (1989) comenta que o método de estimativas pontuais evita alguns dos defeitos dos outros métodos (serie de Taylor e Monte Carlo).

Discussões detalhadas sobre a exatidão e limitações do método de estimativas pontuais podem ser encontradas em Christian e Baecher (1999).

#### **4.3.3.3. Método de Simulação de Monte Carlo**

Como mencionado anteriormente, os métodos de Estimativa Pontual e do Segundo Momento não precisam do conhecimento da forma da função de densidade de probabilidade da variável aleatória (Normal, Log Normal), tampouco da função de performance que geralmente é assumida Normal.

No método de Monte Carlo, é preciso o prévio conhecimento das funções de densidade de probabilidade só das variáveis aleatórias. Em cada análise ou simulação, o método atribui um valor a cada variável aleatória desde sua distribuição de probabilidade, e obtém um resultado da função de performance que é armazenado. Depois de muitas simulações (tipicamente mais que 10 000), é construído um histograma com todos os dados armazenados de cada análise, obtendo-se o tipo de função de probabilidade da função FS, para então calcular a probabilidade de ruptura.

A seleção dos valores usados para solucionar a função de performance é aleatória. Este método pode ser representado pela Figura 4.2

Uma das maiores vantagens deste método é que fornece a forma da distribuição de probabilidade do fator de segurança e, conseqüentemente, a probabilidade de ruptura. Este método elimina a necessidade de assumir a forma da distribuição. Outra diferença para os métodos aproximados é que a complexidade da análise não é amplificada pelo incremento do número de variáveis aleatórias.

O número de iterações necessárias é muito influenciado pela quantidade de variáveis e suas variâncias. No caso de eventos de baixa probabilidade de

ocorrência, esta influência é maior. Quanto maior é a quantidade de iterações, menor é o erro obtido na análise.

#### 4.3.3.4.

#### **Método de Simulação de Monte Carlo com Variabilidade Espacial dos Solos**

Até agora, só foram mostrados métodos que não consideram a variabilidade espacial dos solos dentro de sua estrutura. No caso de métodos aproximados, pode-se considerar a variabilidade espacial apenas mediante fatores de correção. El-Ramly (2001) desenvolveu um método de análise de estabilidade de taludes considerando a variabilidade espacial dos solos proposta por Vanmarcke (1983), usando a simulação de Monte Carlo e o “*software*” de estatística @Risk, que é apresentado em uma planilha eletrônica (Excel).

Este método tem os mesmos princípios descritos no item 4.3.3.3, mas são agregadas as considerações feitas no Capítulo 3. O método usa a equação 3.24 que representa melhor as incertezas nas variáveis, que é reescrita como:

$$x_i = B(t_i + \varepsilon_{vi} + \varepsilon_{ei}) \quad (4.28)$$

Onde  $x_i$  é a variável aleatória corrigida por desvios (“*bias*”, B), na localização  $i$ ,  $t_i$  é a tendência e pode ser calculada pelo método de mínimos quadrados. No caso de tendência linear, a inclinação e intercepto são calculados usando a equação 3.5. As variâncias da inclinação e intercepto, devido à insuficiência de dados (erro estatístico), podem ser calculadas através da equação 3.18.

No caso de média constante, a variância da média é estimada usando a equação 3.21, nos dois casos, tendência linear e média constante, a variância estimada é baseada na hipótese de que os residuais são independentes e constantes em qualquer localização.



A tendência é admitida como uma variável determinística, pelo que a variabilidade espacial do parâmetro só é representada pela estrutura de correlação das componentes residuais.

Como apresentado no Capítulo 3, a variabilidade espacial das propriedades dos solos desde um ponto a outro é de pouca importância em geotecnia, pois o comportamento da estrutura é função das propriedades médias.

Usando os conceitos descritos no Capítulo 3, El-Ramly (2001) propôs que a superfície de deslizamento seja dividida em segmentos não maiores que a escala de flutuação  $\delta$ . Desta maneira, o fator de redução da variância é igual a 1, ( $\Gamma_{(\Delta z)}^2 = 1$ ), pelo que a porção de superfície de deslizamento dentro de uma camada de solo é dividida em segmentos  $l$  iguais à escala de flutuações ( $l = \delta$ ), mais um segmento residual, como mostrado na Figura 4.9.

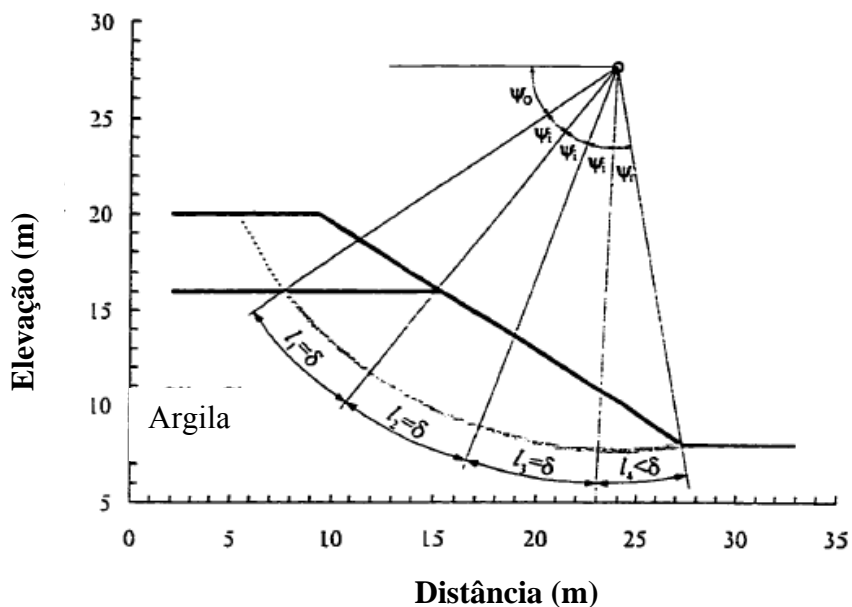


Figura 4.9 – Subdivisão da superfície de deslizamento dentro de uma camada, El-Ramly (2001).

A média dos parâmetros  $x(l)$  sobre qualquer destes segmentos pode ser representada por uma função de distribuição acumulativa  $F_x(x)$ . O coeficiente de correlação entre qualquer destas medias locais pode ser calculado utilizando a equação 3.28. Para segmentos adjacentes de igual longitude ( $l = \delta$ ), os

coeficientes de correlação são iguais a zero, o que simplifica a análise. A Figura 4.10 ilustra estes conceitos.

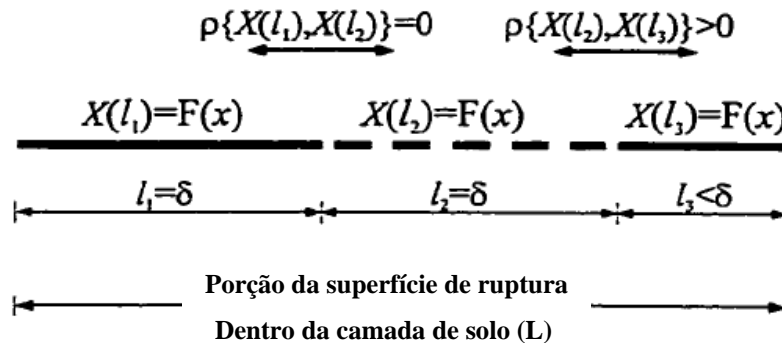


Figura 4.10 – Modelagem da variabilidade espacial de um parâmetro de entrada sobre uma superfície de deslizamento, El-Ramly (2001).

Em resumo, a incerteza devida à variabilidade espacial de um parâmetro ao longo da superfície de deslizamento é quantificada por um número de variáveis correlacionadas, que representam a média local do parâmetro sobre um segmento da superfície de deslizamento.

Uma das maiores vantagens deste método é sua facilidade de ser programado numa planilha, sem maiores conhecimentos de probabilidade e estatística. Ademais, os conceitos de variabilidade espacial podem ser considerados em sua estrutura e não por um fator de correção.

O método pode ser usado em diferentes tipos de superfície de deslizamento, superfícies complexas e uma quantidade maior de variáveis aleatórias, sem complicar a análise.

Sua principal limitação é que o método é baseado numa aproximação da função da variância proposta por Vanmarcke (1977a). A função implica uma perfeita correlação  $\rho(r) = 1.0$  das propriedades do solo, para distâncias de separação  $r$ , menores que a escala de flutuações. E nenhuma correlação  $\rho(r) = 0$ , para valores de  $r$  maiores que  $\delta$ . O qual não é totalmente verdadeiro, a correlação

entre propriedades de solos em dois diferentes localizações, decresce gradualmente com o incremento da distância de separação  $r$ .

Ademais, o método trata a variabilidade espacial da poropressão na superfície de deslizamento similar as propriedades dos solos. Na realidade esta hipótese não é totalmente verdadeira, mas não existem suficientes investigações acerca da relação entre a variabilidade espacial dos solos e da poropressão.

Em geral a variabilidade espacial da poropressão é muito influenciada por várias variáveis e fenômenos de interação, tais como: intensidade das chuvas, padrão de fluxo, variabilidade espacial da condutividade hidráulica e estado de tensão.

A variabilidade espacial das poropressões é considerada similar à dos parâmetros do solo em todos os métodos aproximados, devido principalmente à falta de estudos detalhados.

Mais informações acerca das limitações do método podem ser encontradas em El-Ramly (2001) e em Duncan, Navin e Wolff (2003).

#### 4.4. Superfície de Deslizamento Crítica

A superfície de deslizamento correspondente ao valor mínimo de FS, obtida com uma análise determinística, nem sempre coincide com a superfície de deslizamento que corresponde ao valor mínimo do índice de confiabilidade ( $\beta$ ). Comumente as análises probabilísticas são realizadas na superfície de deslizamento crítica indicada pela análise determinística.

Numa análise de simulação de Monte Carlo, seria melhor impor um sistema de superfícies. Desta maneira, a incerteza na localização da superfície de deslizamento crítica estaria incorporada na análise, mas esta consumiria muito tempo e seria pouco prática.

Segundo El-Ramly (2001) nos casos em que as incertezas dos parâmetros de entrada contribuem igualmente para o valor de FS, as duas superfícies de deslizamento críticas (determinísticas e probabilísticas) tendem a coincidir. Porém, quando uma variável é mais importante, as duas superfícies de deslizamento podem ser significativamente diferentes.

Hassan e Wolff (1999) e mais recentemente Bhattacharya, Jana, Ojha and Chakraborty (2003) propuseram algoritmos de busca, para localizar a superfície de deslizamento com mínimo índice de confiabilidade. Em geral estes métodos utilizam uma formulação similar àquela usada para encontrar a superfície de deslizamento crítica com métodos determinísticos convencionais.

Segundo Vanmarcke (1977b), Alonso (1976), Yucemen e Al-Homoud (1990), usar a superfície de deslizamento crítica da análise determinística para quantificar a probabilidade de ruptura é razoável. Conclusão similar foi também reportada por Sandroni e Sayão (1992) e Dell'avanzi (1995) para o caso de taludes de grande altura.