

3

Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{H}^{n+1}

3.1

Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{H}^{n+1}

Lembramos que o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^n é definido por:

$$\mathbb{R}_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$$

onde

$$\langle X, Y \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

E o plano hiperbólico é:

$$\mathbb{H}^2 = \{X \in \mathbb{R}_1^3 / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Seja $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de \mathbb{H}^2 e k_η a sua curvatura. Considere a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} Y: I \times \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto Y(s, x) = (\eta_1(s)x, \eta_2(s), \eta_3(s)) \end{aligned}$$

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $Y(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ imersa em \mathbb{H}^{n+1} .

De fato temos $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$:

$$\langle Y(s, x), Y(s, x) \rangle_1 = \eta_1^2(s)\|x\|^2 + \eta_2^2(s) - \eta_3^2(s) = -1$$

pois $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\eta \in \mathbb{H}^2$.

O grupo $O(n, 1)$ é definido por:

$$O(n, 1) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / \langle a_i, a_i \rangle_1 = 1, i = 1, \dots, n; \quad \langle a_n, a_n \rangle_1 = -1; \\ \langle a_i, a_j \rangle_1 = 0, i \neq j, \text{ onde } a_i, i = 1..n, \text{ são as colunas de } A\}$$

O grupo $O(n, 1)$ é o grupo de simetria de \mathbb{H}^{n-1} , isto é, \mathbb{H}^{n-1} é invariante pela ação do grupo $O(n, 1)$.

Seja $A \in O(n)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & A & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{ onde } A \in SO(n)\}$$

Então G é um subgrupo de $SO(n + 2, 1)$. E dado $Y(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(Y(s, x)) = \bar{A}(\eta_1 x, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1 A(x), \eta_2, \eta_3) = Y(A(x), s)$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{H}^{n+1} .

Agora, vamos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de Y .

Podemos escolher uma parametrização $\Phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ em torno de x tal que o referencial adaptado $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ seja uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Sabemos que $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R} \times T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Então, identificando $\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq (0, \frac{\partial}{\partial x_i})$ e colocando $\frac{\partial}{\partial s} = (1, 0)$, temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é base ortonormal de $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Lembramos que

$$\mathbb{H}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}_1^n / \|x\|_1^2 = -1\}$$

Então

$$T_x \mathbb{H}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}_1^n / \langle v, x \rangle_1 = 0\} = x^\perp$$

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = (\eta'_1 x, \eta'_2, \eta'_3)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = (\eta_1 \frac{\partial}{\partial x_i}, 0, 0)$$

Então:

$$g_{11} = \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_s} \rangle_1 = \eta_1'^2 \|x\|^2 + \eta_2'^2 - \eta_3'^2 = \|\eta'\|_1^2 = 1$$

$$g_{1i} = \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_i} \rangle_1 = \eta_1' \eta_1 \langle x, \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle = 0$$

$$g_{ij} = \langle \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \frac{\partial Y}{\partial y_j} \rangle_1 = \eta_1^2 \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle = \eta_1^2 \delta_{ij}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$g_{00} = 1$$

$$g_{1i} = 0$$

$$g_{ij} = \eta_1^2 \delta_{ij}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{H}^{n+1} é $\vec{N}(s, x) = (n_1(s)x, n_2(s), n_3(s))$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a η em \mathbb{H}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}_1^{n+2} com a métrica canônica, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de S^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p \Sigma$, podemos estendê-los à $T_p \mathbb{S}^{n+1}$ e à $T_p \mathbb{R}_1^{n+2}$. Logo:

$$D_X Y = \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$$

Temos que:

$$\frac{\partial N}{\partial x_i} = (n_1 \frac{\partial}{\partial x_i}, 0, 0)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial s \partial s} = (\eta''_1 x, \eta''_2, \eta''_3)$$

Então:

$$h_{11} = -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial s}} N, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = \langle N, D_{\frac{\partial Y}{\partial s}} \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = \langle N, \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} \rangle = \langle n, \eta'' \rangle_1 = k_\eta$$

$$h_{1i} = -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial x_i}} N, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial s} \rangle = -n_1 \eta_1' \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \rangle = 0$$

$$h_{ij} = -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial Y}{\partial x_i}} N, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial Y}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \delta_{ij}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} h_{00} &= k_\eta \\ h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\eta_1 n_1 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média da imersão Y é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_1}{\eta_1} \right]$$

E a imersão Y tem duas curvaturas principais diferentes, que são:

$$k_1 = k_\eta \text{ com multiplicidade } 1$$

$$k_2 = -\frac{n_1}{\xi_1} \text{ com multiplicidade } (n-1)$$

Vamos introduzir coordenadas hiperbólicas em \mathbb{H}^2 :

Sejam $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $\phi \in (0, \infty)$ tais que

$$\eta(s) = (e^{i\theta(s)} \sinh \phi(s), \cosh \phi(s))$$

$$\eta' = (i\theta' e^{i\theta} \sinh \phi + \phi' e^{i\theta} \cosh \phi, \phi' \sinh \phi) = \phi' (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi) + \theta' \sinh \phi (ie^{i\theta}, 0)$$

Definindo $e_1 = \eta$, $e_2 = (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi)$ e $e_3 = (ie^{i\theta}, 0)$, notamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ forma um referencial ortogonal tal que

$$\langle e_1, e_1 \rangle_1 = -1$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle_1 = \langle e_3, e_3 \rangle_1 = 1$$

$$\langle e_i, e_j \rangle_1 = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

Isto é, a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sinh \phi & \cos \theta \cosh \phi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sinh \phi & \sin \theta \cosh \phi & \cos \theta \\ \cosh \phi & -\sin \phi & 0 \end{bmatrix}$$

pertence a $SO(2, 1)$.

Como η é parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\|\eta'\| = 1$. Logo, existe uma função $\alpha(s)$ tal que

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' \sinh \phi = \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \eta' = \cos \alpha e_2 + \sin \alpha e_3$$

Então

$$\vec{n} = -\sin \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

é um vetor normal unitário a ξ em \mathbb{H}^2 .

Observamos que $n_1 = -\sin \alpha \cos \theta \cosh \phi - \cos \alpha \sin \theta$.

A curvatura de η é:

$$k_\eta = \langle \eta'', \vec{n} \rangle_1 = \alpha' + \theta' \cosh \phi$$

Então, a curvatura média da hipersuperfície fica:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_1}{\eta_1} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\alpha' + \theta' \cosh \phi - (n-1) \left(\frac{-\sin \alpha \cos \theta \cosh \phi - \cos \alpha \sin \theta}{\cos \theta \sinh \phi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [\alpha' + \theta' \cosh \phi + (n-1)(\sin \alpha \coth \phi + \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi)] \end{aligned}$$

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cosh \phi - (n-1) \sin \alpha \coth \phi + \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

Vamos tentar simplificar esse sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - n \sin \alpha \coth \phi - (n-1) \cos \alpha \tan \theta \operatorname{csch} \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

Não foi possível eliminar a variável θ . Logo, esse sistema não pode ser simplificado como foi feito anteriormente no caso de \mathbb{S}^n . Vamos apenas achar um exemplo simples de hipersuperfície de curvatura média constante para essa imersão.

Se $\alpha' = \phi' = 0$, então $\cos \alpha = 0$. Logo $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Então $H \pm \coth \phi = 0$.

$$\Rightarrow \phi = \operatorname{arccoth} H = \phi_0$$

$$\Rightarrow \theta' = -\frac{1}{\sinh \phi_0}$$

Mas $\sinh \phi_0 = \sinh(\operatorname{arccoth} H) = \frac{1}{\sqrt{H^2-1}}$. Logo, temos que ter $H > 1$ e:

$$\theta(s) = -\sqrt{H^2-1}s + c$$

Assim, a curva η será um círculo horizontal

$$\eta(s) = (e^{i(-\sqrt{H^2-1}s+c)} \sinh \phi_0, \cosh \phi_0)$$

E a hipersuperfície associada é $\Sigma = Y(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ onde:

$$Y(s, x) = (x \cos(-\sqrt{H^2-1}s+c) \sinh \phi_0, \sin(-\sqrt{H^2-1}s+c) \sinh \phi_0, \cosh \phi_0)$$

Observe que Σ é a interseção de \mathbb{H}^{n+1} com um hiperplano horizontal de \mathbb{R}_1^{n+2} , portanto é uma esfera totalmente umbílica de \mathbb{H}^{n+1} .

Considere agora a imersão:

$$\begin{aligned} X: I \times \mathbb{H}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{H}^{n+1} \subset \mathbb{R}_1^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto X(s, x) = (\eta_1(s), \eta_2(s), \eta_3(s)x) \end{aligned}$$

Temos $X(s, x) \in \mathbb{H}^{n+1}$:

$$\langle X(s, x), X(s, x) \rangle_1 = \eta_1^2(s) + \eta_2^2(s) + \eta_3^2(s) \|x\|_1^2 = -1$$

pois $x \in \mathbb{H}^{n-1}$ e $\eta \in \mathbb{H}^2$.

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $X(I \times \mathbb{H}^{n-1})$.

Seja $A \in SO(n, 1)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{ onde } A \in SO(n, 1)\}$$

Então G é um subgrupo de $SO(n+2, 1)$. E dado $X(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(X(s, x)) = \bar{A}(\eta_1, \eta_2, \eta_3 x) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3 A(x)) = X(s, A(x))$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{H}^{n+1} .

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial s} &= (\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 x) \\ \frac{\partial Y}{\partial y_i} &= (0, 0, \eta_3 \frac{\partial}{\partial y_i}) \end{aligned}$$

Então temos:

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_s} \rangle_1 &= \eta_1'^2 + \eta_2'^2 - \eta_3'^2 \|x\|^2 = \|\eta'\|_1^2 = 1 \\ \langle \frac{\partial Y}{\partial y_s}, \frac{\partial Y}{\partial y_i} \rangle_1 &= \eta_3' \eta_3 \langle x, \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle_1 = 0 \\ \langle \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \frac{\partial Y}{\partial y_j} \rangle_1 &= \eta_3^2 \left\| \frac{\partial}{\partial y} \right\|_1 = \eta_3^2 \end{aligned}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 \\ g_{ij} &= \eta_3^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{H}^{n+1} é $\vec{N}(s, x) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)x)$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a η em \mathbb{H}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}_1^{n+2} com a métrica canônica, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de \mathbb{H}^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p\Sigma$, podemos estende-los à $T_p\mathbb{H}^{n+1}$ e à $T_p\mathbb{R}_1^{n+2}$.

Logo:

$$D_X Y = \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_i} &= (0, 0, n_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ \frac{\partial X}{\partial s \partial s} &= (\eta_1'', \eta_2'', \eta_3'' x) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial s}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = \langle N, D_{\frac{\partial X}{\partial s}} \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = \langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \rangle = \langle n, \eta'' \rangle_1 = k_\eta \\ h_{1i} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial s} \rangle = -n_1 \eta_1' \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \rangle = 0 \\ h_{ij} &= -\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial x_j} \rangle = -\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \rangle = -n_1 \eta_1 \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = -n_3 \eta_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} h_{00} &= k_\eta \\ h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\eta_3 n_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média da superfície é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_3}{\eta_3} \right]$$

Lembrando que:

$$\eta(s) = (e^{i\theta(s)} \sinh \phi(s), \cosh \phi(s))$$

$$\begin{cases} e_2 = (e^{i\theta} \cosh \phi, \sinh \phi) \\ e_3 = (ie^{i\theta}, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

$$\eta' = \cos \alpha e_2 + \sin \alpha e_3$$

$$\vec{n} = -\sin \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

$$k_\eta = \langle \eta'', \vec{n} \rangle = \alpha' + \theta' \cosh \phi$$

Temos que $n_3 = -\sin \alpha \sinh \phi$.

Então, a curvatura média da hipersuperfície fica:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n} \left[k_\eta - (n-1) \frac{n_3}{\eta_3} \right] = \frac{1}{n} \left[\alpha' + \theta' \cosh \phi - (n-1) \left(\frac{-\sin \alpha \sinh \phi}{\cosh \phi} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [\alpha' + \theta' \cosh \phi + (n-1)(\sin \alpha \tanh \phi)] \end{aligned}$$

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cosh \phi - (n-1) \sin \alpha \tanh \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} \end{cases}$$

que pode ser reduzido ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \sin \alpha (\coth \phi + (n-1) \tanh \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Para achar uma integral primeira deste sistema, basta supor que $E(\alpha, \phi) = \sin \alpha f(\phi) + g(\phi)$. E como foi feito no caso esférico, encontraremos a seguinte integral primeira:

$$E(\alpha, \phi) = \sin \alpha \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi - H \cosh^n \phi$$

3.2

O caso Mínimo

No caso mínimo, o sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = -\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{coth} \phi + (n-1) \operatorname{tanh} \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

A integral primeira no caso mínimo, fica:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Vamos estudar a existência de pontos de equilíbrio desse sistema.

$$\begin{aligned} \phi' = 0 &\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \operatorname{coth} \phi = -(n-1) \operatorname{tanh} \phi \\ &\Rightarrow (e^\phi + e^{-\phi})^2 + (n-1)(e^\phi - e^{-\phi})^2 = 0 \\ &\Rightarrow 2 \frac{(e^{2\phi} + e^{-2\phi})}{2} = \frac{2n-4}{n} \\ &\Rightarrow \cosh 2\phi = \frac{n-2}{n} \end{aligned}$$

Logo, como $\cosh 2\phi \in [1, \infty)$ e $\frac{n-2}{n} < 1$, o sistema não tem pontos de equilíbrio.

Vamos analisar a integral primeira para ilustrar o diagrama de fase.

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{senh} \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Observação 1 As retas $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ são as curvas integrais correspondentes ao nível de energia $E = 0$.

Se $E = 0$, temos $\operatorname{sen} \alpha = 0$, $\operatorname{senh} \phi = 0$ ou $\cosh \phi = 0$. Como $\cosh \phi \geq 1$, e $\phi > 0$, temos apenas $\alpha = 0 [\pi]$.

Observação 2 As curvas integrais são simétricas em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Basta notar que $E(\pi - \alpha, \phi) = E(\alpha, \phi)$.

Fixado \bar{E} , seja $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ a curva integral com nível de energia \bar{E} . Como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, precisamos analisar o comportamento da curva $C(\bar{E})$ apenas para $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Observação 3 A curva $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ é um gráfico diferenciável da forma $(\alpha, \phi(\alpha))$.

Para entender a observação 3, vamos estudar a equação algébrica

$$\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Logo, faremos o estudo da seguinte função:

$$\begin{aligned} e: (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ \phi &\mapsto e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi \end{aligned}$$

Temos que:

$$e'(\phi) = \cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi > 0$$

Como $e'(\phi) > 0$ para todo $\phi \in (0, \infty)$, a função é crescente em $(0, \infty)$.

Além disso:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} e(\phi) = 0$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} e(\phi) = \infty$$

Concluimos então que a função e é uma bijeção, portanto, possui inversa.

Observe o esboço do gráfico da função e na figura 3.1.

Como e é uma bijeção, temos:

$$e(\phi) = \frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} \Rightarrow \phi = e^{-1} \left(\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha} \right)$$

Consideremos apenas $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pois $C(\bar{E})$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Quando α tende a 0, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a ∞ e quando α tende a $\frac{\pi}{2}$, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a \bar{E} .

Portanto, a curva $C(\bar{E})$ representa um gráfico diferenciável da forma $(\alpha, \phi(\alpha))$ onde o ponto de mínimo é em $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Utilizando as observações 1, 2 e 3, concluímos que o diagrama de fase é análogo ao da figura 3.2, para qualquer valor de n .

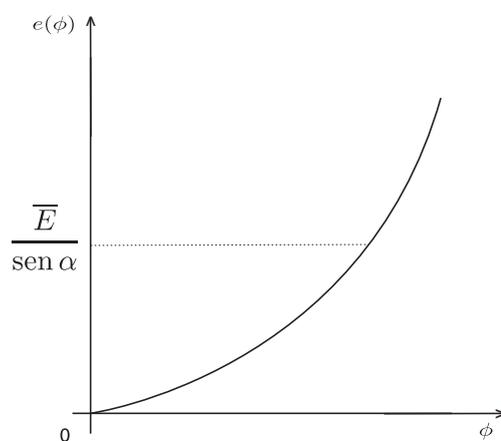


Figura 3.1: Gráfico da função $e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0610737/CA

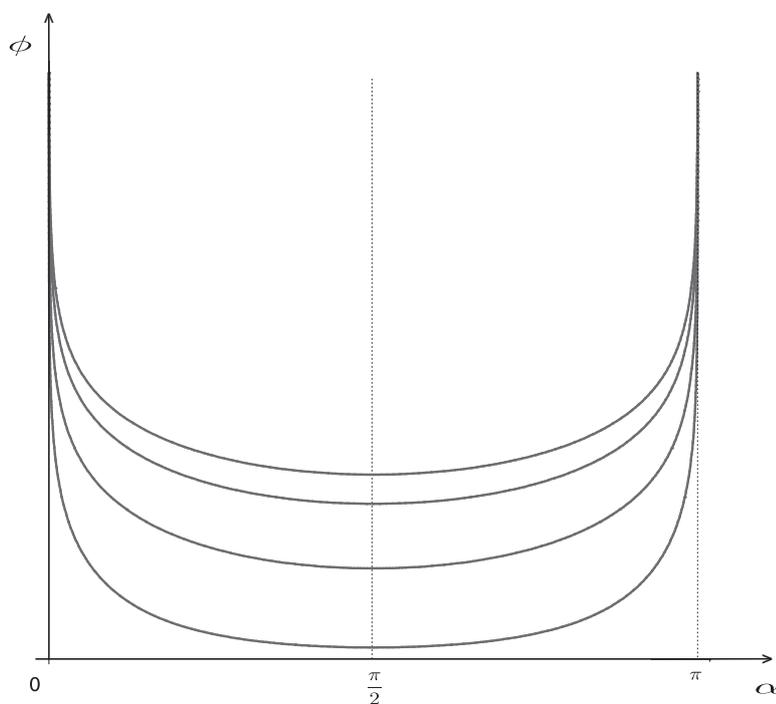


Figura 3.2: Diagrama de fase hiperbólico no caso mínimo, $n = 4$

No caso hiperbólico, as curvas integrais não são limitadas, portanto estamos interessados apenas em saber quando a curva η é mergulhada. Pois se η for mergulhada, a imersão X será um mergulho.

Seja $\phi_0 = \phi_0(E)$ o valor mínimo de $\phi(s)$ que a curva $C(E) = (\alpha(s), \phi(s))$ assume.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\phi(0) = \phi_0$. Como a curva $C(E)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \pi/2$, temos

$$\phi(s) = \phi(-s)$$

para todo $s \in I$.

Logo, a questão é saber, se existe $s \in I$ tal que $\theta(s) = \theta(-s) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Se existir tal s , então a curva η não será mergulhada.

Analisaremos então a função:

$$\Theta(\phi_0, s) = \int_{-s}^s \theta'(t) dt = \theta(s) - \theta(-s)$$

Se para todo $s \in I$, tivermos $\Theta(\phi_0, s) \leq 2\pi$, então a curva será mergulhada.

Como $\theta' = \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi}$ e $0 < \alpha < \pi$, $0 < \phi < \pi/2$, temos que $\theta' > 0$.

Logo a função $s \mapsto \Theta(\phi_0, s)$ é crescente.

Portanto, basta verificar se

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Theta(\phi_0, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(s) ds := \Theta(\phi_0) < 2\pi$$

Vamos demonstrar o:

Lema 3.1

$$(i) \lim_{\phi_0 \rightarrow 0} \Theta(\phi_0) = \pi$$

Portanto do lema deduzimos o seguinte teorema:

Teorema 3 *Existe uma família \mathcal{F} , a um parâmetro real, de hipersuperfícies mínimas equivariantes mergulhadas em \mathbb{H}^{n+1} .*

Demonstração de Lema 3.1:

Considere a função

$$e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

Então, $E = \sin \alpha e(\phi)$

Logo, como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos

$$E = e(\phi_0)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(\phi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(s) ds = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi} ds = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\sinh \phi \cos \alpha} d\phi \\ &= 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{d\phi}{\sinh \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E}\right)^2 - 1}} = 2 \int_{\phi_0}^{\infty} \frac{d\phi}{\sinh \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_0)}\right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 x$, temos:

$$\Theta(\phi_0) = 2 \int_1^{\infty} \frac{\phi_0}{\sinh(\phi_0 x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 x)}{e(\phi_0)}\right)^2 - 1}} dx$$

Pela fórmula de Taylor:

$$e(\phi_0 x) = e(0) + \phi_0 x e'(0) + \frac{(\phi_0 x)^2}{2} e''(0) + \frac{(\phi_0 x)^3}{6} e'''(0) + o(\phi_0^3)$$

$$e(\phi_0) = e(0) + \phi_0 e'(0) + \frac{\phi_0^2}{2} e''(0) + \frac{\phi_0^3}{6} e'''(0) + o(\phi_0^3)$$

Temos que:

$$e(\phi) = \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi$$

$$e''(\phi) = n \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi + 2(n-1) \sinh \phi \cosh^{n-1} \phi + (n-1)(n-2) \sinh^3 \phi \cosh^{n-3} \phi$$

$$e'''(\phi) = (3n-2)[\cosh^n \phi + (n-1) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi] + 3(n-1)(n-2) \sinh^2 \phi \cosh^{n-2} \phi +$$

$$+(n-1)(n-2)(n-3) \sinh^4 \phi \cosh^{n-4} \phi$$

Como $\sinh 0 = 0$ e $\cosh 0 = 1$, temos:

$$e(0) = 0$$

$$e'(0) = 1$$

$$e''(0) = 0$$

$$e'''(0) = 3n - 2$$

Logo:

$$e(\phi_0 x) = \phi_0 x + (3n-2) \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$e(\phi_0) = \phi_0 + (3n-2) \frac{\phi_0^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$\Rightarrow \frac{e(\phi)}{e(\phi_0)} = \frac{\phi_0 x + (3n-2) \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)}{\phi_0 + (3n-2) \frac{\phi_0^3}{6} + o(\phi_0^3)} = x + \frac{\phi_0^2 x}{6} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_0)} \right)^2 - 1 = x^2 - 1 + \frac{\phi_0^2 x}{3} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)$$

Também pela fórmula de Taylor:

$$\sinh(\phi_0 x) = \phi_0 x + \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)$$

$$\Rightarrow \Theta(\phi_0) = 2 \int_1^\infty \frac{\phi_0}{\sinh(\phi_0 x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 x)}{e(\phi_0)} \right)^2 - 1}} dx =$$

$$= 2 \int_1^\infty \frac{\phi_0}{(\phi_0 x - \frac{(\phi_0 x)^3}{6} + o(\phi_0^3)) \sqrt{x^2 - 1 + \frac{\phi_0^2 x}{3} (x^2 - 1)(3n-2) + o(\phi_0^2)}} dx$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi_0 \rightarrow 0} \Theta(\phi_0) = \int_1^\infty \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \pi$$