

2

Hipersuperfícies Equivariantes Mínimas e com Curvatura Média Constante em \mathbb{S}^{n+1}

2.1

Hipersuperfícies Equivariantes em \mathbb{S}^{n+1}

Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco no hemisfério superior de \mathbb{S}^2 e k_ξ a sua curvatura. Considere a seguinte imersão:

$$\begin{aligned} X: I \times \mathbb{S}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} \\ (s, x) &\mapsto X(s, x) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \xi_3(s)x) \end{aligned}$$

Vamos chamar de Σ a hipersuperfície $X(I \times \mathbb{S}^{n-1})$ imersa em \mathbb{S}^{n+1} .

De fato temos $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$:

$$\langle X(s, x), X(s, x) \rangle = \xi_1^2(s) + \xi_2^2(s) + \xi_3^2(s)\|x\|^2 = 1$$

pois $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ e $\xi \in \mathbb{S}^2$.

Chamamos de $Gl(n, \mathbb{R})$ o grupo das matrizes reais $n \times n$ inversíveis. O grupo ortogonal $O(n)$ de \mathbb{R}^n é definido por:

$$O(n) = \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) / A \text{ é uma matriz ortogonal}\}$$

O grupo $O(n)$ é o grupo de simetria de \mathbb{S}^{n-1} , isto é, \mathbb{S}^{n-1} é invariante pela ação do grupo $O(n)$.

Seja $A \in O(n)$ e considere a matriz:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

Considere o grupo G formado pelas matrizes do tipo \bar{A} .

$$G = \{\bar{A}, \text{onde } A \in O(n)\}$$

Então G é um subgrupo de $O(n+2)$. E dado $X(s, x) \in \Sigma$ arbitrário, temos que:

$$\bar{A}(X(s, x)) = \bar{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 x) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 A(x)) = X(s, A(x))$$

Logo $\bar{A}(\Sigma) = \Sigma$, isto é, Σ é invariante pela ação do grupo G . Por esta razão, dizemos que Σ é uma hipersuperfície equivariante em \mathbb{S}^{n+1} .

Agora, vamos calcular a primeira e a segunda formas fundamentais de X .

Podemos escolher uma parametrização $\Phi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ em torno de x tal que o referencial adaptado $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ seja uma base ortonormal de $T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Sabemos que $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R} \times T_x \mathbb{S}^{n-1}$.

Então, identificando $\frac{\partial}{\partial x_i} \simeq (0, \frac{\partial}{\partial x_i})$ e colocando $\frac{\partial}{\partial s} = (1, 0)$, temos que $\left\{ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é base ortonormal de $T_{(s,x)}(I \times \mathbb{S}^{n-1})$.

Lembramos que

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\|^2 = 1\}$$

Então

$$T_x \mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n / \langle v, x \rangle = 0\} = x^\perp$$

Vamos calcular as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3 x) \\ \frac{\partial X}{\partial x_i} &= (0, 0, \xi_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2 \|x\|^2 = \|\xi'\|^2 = 1 \\ g_{1i} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle = \xi_3' \xi_3 \left\langle x, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = \xi_3^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \xi_3^2 \delta_{ij}$$

Logo, a matriz da primeira forma fundamental é dada por $I = [g_{ij}]$, onde

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 \\ g_{1i} &= 0 \\ g_{ij} &= \xi_3^2 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Um vetor normal unitário à imersão em \mathbb{S}^{n+1} é

$\vec{N}(s, x) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s)x)$, onde $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$ é um vetor normal unitário a ξ em \mathbb{S}^2 .

Seja D a conexão de \mathbb{R}^{n+2} com a métrica canônica, isto é D é a conexão plana, e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de S^{n+1} e Σ respectivamente com as métricas induzidas.

Seja $p \in \Sigma$. Dados $X, Y \in T_p \Sigma$, podemos estendê-los à $T_p \mathbb{S}^{n+1}$ e à $T_p \mathbb{R}^{n+2}$. Logo pela fórmula de Gauss temos que:

$$\begin{aligned} D_X Y &= \bar{\nabla}_X Y + (D_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y + \langle D_X Y, p \rangle p = \\ &\Rightarrow D_X Y = \nabla_X Y + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle N + \langle D_X Y, p \rangle p \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno da expressão acima com N , temos:

$$\begin{aligned} \langle D_X Y, N \rangle &= \langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle \langle N, N \rangle + \langle D_X Y, p \rangle \langle p, N \rangle \\ &\Rightarrow \langle D_X Y, N \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x_i} &= (0, 0, n_3 \frac{\partial}{\partial x_i}) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} &= (\xi_1'', \xi_2'', \xi_3'' x) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -\left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial s}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \left\langle N, D_{\frac{\partial X}{\partial s}} \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial s^2} \right\rangle = \langle n, \xi'' \rangle = k_\xi \\ h_{1i} &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial s} \right\rangle = -n_3 \xi_3' \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, x \right\rangle = 0 \\ h_{ij} &= \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial X}{\partial x_i}} N, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle = -n_3 \xi_3 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = -n_3 \xi_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

Logo, a matriz da segunda forma fundamental é dada por $II = [h_{ij}]$,

onde

$$\begin{aligned} h_{11} &= k_\xi \\ h_{1i} &= 0 \\ h_{ij} &= -\xi_3 n_3 \delta_{ij} \end{aligned}$$

A curvatura média de Σ é X é:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h_{ii}}{g_{ii}} = \frac{1}{n} \left(k_\xi - (n-1) \frac{n_3}{\xi_3} \right)$$

E a imersão X tem duas curvaturas principais diferentes, que são:

$$k_1 = k_\xi \text{ com multiplicidade } 1$$

$$k_2 = -\frac{n_3}{\xi_3} \text{ com multiplicidade } (n-1)$$

Vamos introduzir coordenadas esféricas em \mathbb{S}^2 :

Sejam $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ tais que

$$\xi(s) = (e^{i\theta(s)} \text{sen } \phi(s), \cos \phi(s))$$

$$\xi' = (i\theta' e^{i\theta} \text{sen } \phi + \phi' e^{i\theta} \cos \phi, -\phi' \text{sen } \phi) = \phi' (e^{i\theta} \cos \phi, -\text{sen } \phi) + \theta' \text{sen } \phi (ie^{i\theta}, 0)$$

Definindo $e_1 = \xi$, $e_2 = (e^{i\theta} \cos \phi, -\text{sen } \phi)$ e $e_3 = (ie^{i\theta}, 0)$, notamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ forma um referencial ortonormal. Isto é, a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta \text{sen } \phi & \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \phi & \text{sen } \theta \cos \phi & \cos \theta \\ \cos \phi & -\text{sen } \phi & 0 \end{bmatrix}$$

pertence a $SO(3)$.

Como ξ é parametrizada pelo comprimento de arco, temos $\|\xi'\| = 1$.

Logo, existe uma função $\alpha(s)$ tal que

$$\begin{cases} \phi' = \cos \alpha \\ \theta' \text{sen } \phi = \text{sen } \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi' = \cos \alpha e_2 + \text{sen } \alpha e_3$$

Então

$$\vec{n} = -\text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

é um vetor normal unitário a ξ em S^2 .

Observamos que $n_3 = \text{sen } \alpha \text{ sen } \phi$.

Vamos mostrar que a curvatura de ξ é:

$$k_\xi = \langle \xi'', \vec{n} \rangle = \alpha' + \theta' \cos \phi$$

$$\xi' = \cos \alpha e_2 + \text{sen } \alpha e_3$$

$$\xi'' = -\alpha' \text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_2' + \alpha' \cos \alpha e_3 + \text{sen } \alpha e_3'$$

$$\vec{n} = -\text{sen } \alpha e_2 + \cos \alpha e_3$$

$$\langle \xi'', \vec{n} \rangle = \alpha' \text{sen}^2 \alpha - \cos \alpha \text{sen } \alpha \langle e_2', e_2 \rangle + \cos^2 \alpha \langle e_2', e_3 \rangle + \alpha' \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \langle e_3', e_2 \rangle + \text{sen } \alpha \cos \alpha \langle e_3', e_3 \rangle$$

A matriz de Maurer-Cartan de M é a matriz antissimétrica:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}' = [\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j' \rangle]_{1 \leq i, j \leq 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi' & -\theta' \text{sen } \phi \\ \phi' & 0 & -\theta' \cos \phi \\ \theta' \text{sen } \phi & \theta' \cos \phi & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$k_\xi = \alpha' + \cos^2 \alpha (\theta' \cos \phi) + \text{sen}^2 \alpha (-\theta' \text{sen } \phi) = \alpha' + \theta' \cos \phi$$

Então, a curvatura média de Σ fica:

$$H = \frac{1}{n} \left(k_\xi - (n-1) \frac{n_3}{\xi_3} \right) = \frac{1}{n} (\alpha' + \theta' \cos \phi - (n-1) \text{sen } \alpha \tan \phi)$$

A curvatura de Gauss-Kronecker de Σ é:

$$K = k_1 \cdot k_2^{n-1} = k_\xi \left(\frac{-n_3}{\xi_3} \right)^{n-1} = (\alpha' + \theta' \cos \phi) (-\text{sen } \alpha \tan \phi)^{n-1}$$

No caso em que a curvatura de Gauss K é constante, temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = -\theta' \cos \phi + \frac{K}{(-\sin \alpha \tan \phi)^{n-1}} \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \end{cases}$$

Eliminando a variável θ , o sistema pode ser reduzido ao seguinte:

$$\begin{cases} \alpha' = -\sin \alpha \cot \phi + \frac{K}{(-\sin \alpha \tan \phi)^{n-1}} \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Neste trabalho, vamos estudar apenas as hipersuperfícies que têm curvatura média constante.

Portanto, temos que estudar o sistema:

$$\begin{cases} \alpha' = nH - \theta' \cos \phi + (n-1) \sin \alpha \tan \phi \\ \phi' = \cos \alpha \\ \theta' = \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \end{cases}$$

Eliminando a variável θ , o sistema pode ser reduzido ao seguinte:

$$\begin{cases} \alpha' = nH + \sin \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Acharemos uma integral primeira deste sistema, isto é, uma função $E(\alpha, \phi)$ que é constante sobre as curvas integrais. Mais precisamente, se $C(s) = (\alpha(s), \phi(s))$ é uma curva integral do sistema, teremos $E(C(s)) = \text{constante} = E_0$.

Devido à forma particular do sistema, procuraremos a integral primeira sob a forma $E(\alpha, \phi) = \sin \alpha f(\phi) + g(\phi)$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(C(s)) &= \alpha' \frac{\partial E}{\partial \alpha} + \phi' \frac{\partial E}{\partial \phi} = \\ &= \left(nH + \sin \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \right) (\cos \alpha f(\phi)) + \cos \alpha (\sin \alpha f'(\phi) + g'(\phi)) = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(f'(\phi) + ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) f(\phi) \right) + \cos \alpha (g'(\phi) + nH f(\phi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}E(C(s)) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} f'(\phi) = (\cot \phi - (n-1)\tan \phi)f(\phi) \\ g'(\phi) = -nHf(\phi) \end{cases} \\ &\Rightarrow \int \frac{f'(\phi)}{f(\phi)} d\phi = \int (\cot \phi - (n-1)\tan \phi) d\phi \\ &\Rightarrow f(\phi) = c \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \end{aligned}$$

Para $c = 1$, temos:

$$\begin{aligned} g'(\phi) &= -nH \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \\ g(\phi) &= H \cos^n \phi + c' \end{aligned}$$

Verifica-se então, que a seguinte função é uma integral primeira do sistema:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$$

2.2

O caso Mínimo

No caso mínimo, o sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = \operatorname{sen} \alpha ((n-1)\tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Este sistema tem, a menos de translações de vetores $v_k = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, um único ponto de equilíbrio:

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \phi_0) &= \left(\frac{\pi}{2}, \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} \right) \\ \Rightarrow \theta' &= \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \phi_0} = \frac{1}{\operatorname{sen} \phi_0} \end{aligned}$$

Mas

$$\operatorname{sen} \phi_0 = \operatorname{sen} \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{n} \\ \Rightarrow \theta(s) &= \sqrt{n}s + c \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $c = 0$.

Portanto, a curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio é um círculo

horizontal de raio $\text{sen } \phi_0$ e altura $\text{cos } \phi_0$:

$$\xi(s) = (e^{i\sqrt{n}s} \text{sen } \phi_0, \text{cos } \phi_0)$$

E a hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\text{sen } \phi_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\text{cos } \phi_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\sqrt{n}s} \text{sen } \phi_0, x \text{cos } \phi_0)$$

Como $\text{sen } \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\text{cos } \phi_0 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$, a hipersuperfície é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = \left(e^{i\sqrt{n}s} \frac{1}{\sqrt{n}}, x \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)$$

Se $n = 2$, a superfície é um mergulho do toro $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, chamado Toro de Clifford.

Uma conjectura famosa, conhecida como conjectura de Lawson, afirma que o Toro de Clifford é a única hipersuperfície mínima em \mathbb{S}^3 . Este é um problema em aberto há muitos anos.

Seja E_0 o nível de energia associado a esse ponto de equilíbrio.

A integral primeira no caso mínimo, fica:

$$E(\alpha, \phi) = \text{sen } \alpha \text{sen } \phi \text{cos}^{n-1} \phi$$

Se $E = 0$, então $\alpha \equiv 0 [\pi]$ ou $\phi \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Se $\alpha \equiv 0 [\pi]$, temos $\theta' = 0$, logo, $\theta = \text{constante} = \theta_0$.

A curva esférica correspondente a $E = 0$ é

$$\xi(s) = (e^{i\theta_0} \text{sen } \phi, \text{cos } \phi)$$

e a hipersuperfície é o mergulho em \mathbb{S}^{n+1} da hiperesfera:

$$X(s, x) = (e^{i\theta_0} \text{sen } \phi, x \text{cos } \phi)$$

A hiperesfera é totalmente geodésica pois:

$$k_1 = k_\xi = \alpha' + \theta' \text{cos } \phi = \text{sen } \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) + 0 = 0$$

$$k_2 = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = 0$$

Vamos analisar a integral primeira para ilustrar o diagrama de fase.

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi$$

Observação 1 As retas $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$ são as curvas integrais correspondentes ao nível de energia $E = 0$.

Observação 2 As curvas integrais são simétricas em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Basta notar que $E(\pi - \alpha, \phi) = E(\alpha, \phi)$.

Fixado \bar{E} , $0 < \bar{E} < E_0$, seja $C(\bar{E}) = (\alpha(s), \phi(s))$ a curva integral com nível de energia \bar{E} . Como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, precisamos analisar o comportamento da curva $C(\bar{E})$ apenas para $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Observação 3 Considere a equação algébrica

$$\frac{\bar{E}}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi$$

Existem valores de α , que denotaremos por $\alpha_-(\bar{E})$ e $\alpha_+(\bar{E})$, tais que para $\alpha \in [0, \alpha_-) \cup (\alpha_+, \pi]$, a equação algébrica não tem solução, para $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$, a equação algébrica tem duas soluções, e se $\alpha = \alpha_-$ ou $\alpha = \alpha_+$, então a equação tem exatamente uma solução.

Para entender a observação 3, faremos o estudo da seguinte função:

$$\begin{aligned} e: \quad (0, \frac{\pi}{2}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto e(\phi) = \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi \end{aligned}$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \operatorname{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = 0 \iff \cot \phi = \sqrt{n-1}$$

Portanto $\phi = \operatorname{arccot} \sqrt{n-1} = \phi_0$ é um ponto crítico.

Se $e'(\phi) < 0$, então $\cos^{n-2} \phi (\cos^2 \phi - (n-1) \operatorname{sen}^2 \phi) < 0$.

$$\Rightarrow \cot \phi < \sqrt{n-1}$$

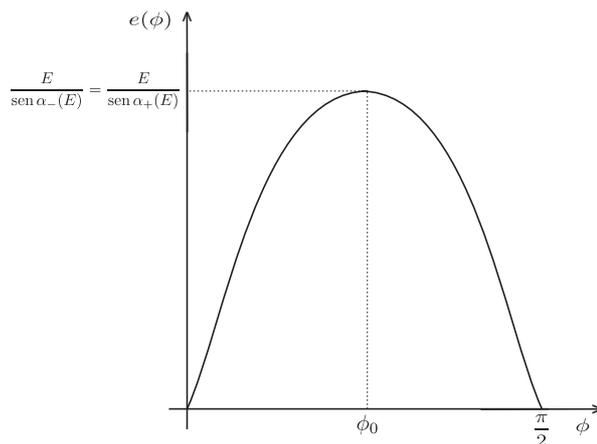


Figura 2.1: Gráfico da função $e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$

Como a função $\cot \phi$ é decrescente, temos:

$$\phi > \text{arccot } \sqrt{n-1} = \phi_0$$

Portanto a função e é decrescente para $\phi > \phi_0$.

Analogamente a função e é crescente para $\phi < \phi_0$.

Observe então, o esboço gráfico da função e na figura 2.1.

Consideremos apenas $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pois $C(\bar{E})$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Quando α tende a 0, temos $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha}$ tendendo a infinito. Portanto, existirá exatamente um valor de α , $\alpha_-(\bar{E})$, tal que $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha_-} = e(\phi_0)$. Além disso, para $\bar{\alpha} \in (\alpha_-, \frac{\pi}{2}]$, existirão dois valores de ϕ , ϕ_1 e ϕ_2 , tais que $e(\phi_1) = e(\phi_2) = \frac{\bar{E}}{\text{sen } \bar{\alpha}}$.

Definimos $\alpha_+(E)$ de maneira que $\frac{\bar{E}}{\text{sen } \alpha_+} = e(\phi_0)$, $\alpha_+ \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

Observação 4 A derivada parcial $\frac{\partial E}{\partial \alpha}$ anula-se para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, e a derivada parcial $\frac{\partial E}{\partial \phi}$ anula-se em ϕ_0 .

Portanto, utilizando as observações 1, 2, 3 e 4, concluímos que o diagrama de fase é análogo ao da figura 2.2, para qualquer valor de n .

Estamos interessados no caso em que ξ é fechada. Pois assim, a hipersuperfície associada a ξ será compacta.

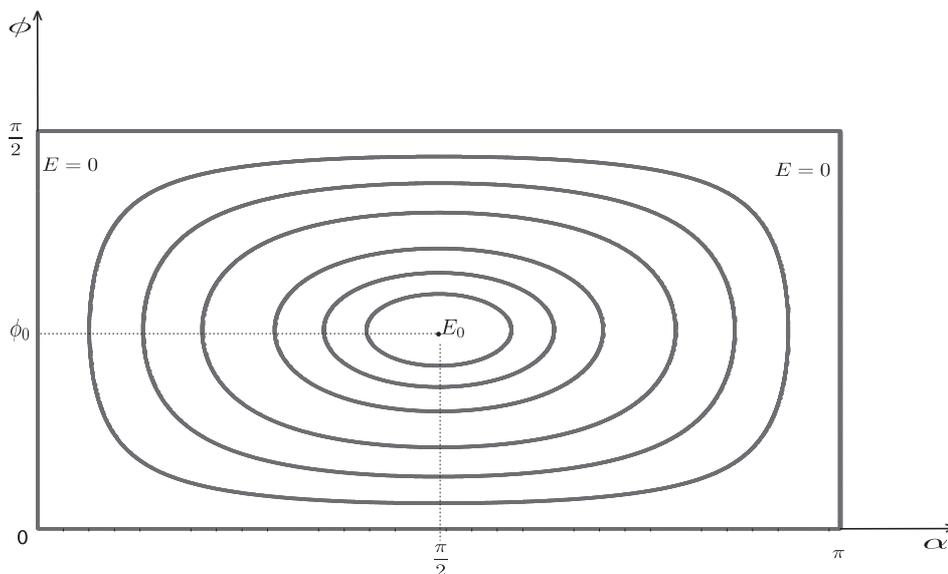


Figura 2.2: Diagrama de fase esférico no caso mínimo, $n = 2$

Lembramos que

$$\xi(s) = (e^{i\theta(s)} \text{sen } \phi(s), \text{cos } \phi(s))$$

A função $s \mapsto \phi(s)$ é periódica. Isto é, existe T tal que $\phi(s + T) = \phi(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Então, para a curva ξ ser fechada, temos que analisar se existe T' , com $\frac{T'}{T} \in \mathbb{Q}$ tal que $\theta(s + T') \equiv \theta(s) [2\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Considere a curva integral do sistema $C(E) = (\alpha(s), \phi(s))$ com nível de energia E .

Seja

$$\Theta(E) = \int_{C(E)} \theta' ds = \int_s^{s+T} \theta'(t) dt$$

Isto é, $\Theta(E)$ é a variação da função $s \mapsto \theta(s)$ ao longo da curva $C(E)$.

Basta então que $\Theta(E) = 2\pi \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Pois assim, dando q voltas em torno da curva integral $C(E)$, a curva ξ dará p voltas em \mathbb{S}^2 , ou seja, existirá $T' = qT$ tal que $\theta(s + T') \equiv \theta(s) [2\pi]$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Portanto, a curva ξ é fechada, se e somente se o número $\Theta(E) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Se $\Theta(E) = \frac{2\pi}{q}$, onde $q \in \mathbb{Z}^*$, isto é, se $p = 1$, então a curva ξ dará apenas uma volta em torno da esfera, sem auto-interseção. E portanto, caso isso ocorra, Σ será mergulhada.

Logo, temos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Seja $C(s) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva plana fechada no plano $\alpha\phi$, com $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Considere as seguintes funções:*

$$f(s) = \theta'_C(s) = \frac{\text{sen}(\alpha(s))}{\text{sen}(\phi(s))}$$

$$\Theta_C = \int_C f(s) ds$$

Considere a curva $\xi_C(s) = (e^{i\theta_C(s)} \text{sen} \phi(s), \cos \phi(s))$.

Então ξ_C é fechada se e somente se $\Theta_C \in 2\pi\mathbb{Q}$. Além disso, ξ_C é mergulhada se e somente se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\Theta_C = \frac{2\pi}{q}$.

Demonstraremos o:

Lema 2.2

$$(i) \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E) = \sqrt{2}\pi$$

$$(ii) \lim_{E \rightarrow 0} \Theta(E) = \pi$$

Observação 2.3 *Como a função $s \mapsto \Theta(s)$ é contínua, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário. Assim, para qualquer $\frac{p}{q} \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $p, q \in \mathbb{Z}$, como $2\pi\frac{p}{q} \in (\pi, \sqrt{2}\pi)$, existirá E tal que $\Theta(E) = 2\pi\frac{p}{q}$.*

Logo, teremos uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Portanto, como corolário do lema, temos o seguinte teorema:

Teorema 1 *Existe uma família enumerável \mathcal{F} de hipersuperfícies equivariantes mínimas compactas imersas em \mathbb{S}^{n+1} .*

Observação 2.4 *Não conseguimos demonstrar que a função $E \mapsto \Theta(E)$ é monótona. Isso implicaria a não existência de curvas esféricas mergulhadas a não ser nos casos extremos, onde as curvas integrais são $C(0)$ e $C(E_0)$. As hipersuperfícies associadas à essas curvas são respectivamente uma hiperesfera*

totalmente geodésica de \mathbb{S}^{n+1} e o produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$ (toro de Clifford quando $n = 2$).

Em [4], Fabiano Brito e Maria Luíza Leite demonstraram que as únicas hipersuperfícies compactas de \mathcal{F} mergulhadas em \mathbb{S}^{n+1} realmente são as hipersferas totalmente geodésicas e o produto $\mathbb{S}^1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)$.

Demonstração do Lema 2.1:

Sejam ϕ_- e ϕ_+ os valores mínimo e máximo respectivamente de $\phi(s)$ que a curva $C(E)$ assume.

Considere a função

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

Então, $E = \text{sen } \alpha e(\phi)$

Logo, como a curva é simétrica em relação a reta $\alpha = \pi/2$, temos

$$E = e(\phi_-) = e(\phi_+)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= \int_{C(E)} \theta' ds = \int_{C(E)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} + 2 \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_+)}\right)^2 - 1}} := 2\Theta_-(E) + 2\Theta_+(E) \end{aligned}$$

Demonstração do Lema 2.1 parte (i):

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_0 - \phi_-$, temos:

$$\Theta_-(E) = \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} = \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\text{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 - \varepsilon)}\right)^2 - 1}} dx$$

Pela fórmula de Taylor:

$$e(\phi) = e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

Temos que:

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \text{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = [\cot \phi - (n-1) \tan \phi] e(\phi)$$

$$\begin{aligned} e''(\phi) &= [\cot \phi - (n-1) \tan \phi]' e(\phi) + [\cot \phi - (n-1) \tan \phi]^2 e(\phi) \\ &= [-\text{csc}^2 \phi - (n-1) \text{sec}^2 \phi + \cot^2 \phi + (n-1)^2 \tan^2 \phi - 2(n-1)] e(\phi) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\cot \phi_0 = \sqrt{n-1}$$

$$\tan \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\text{sen } \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\cos \phi_0 = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

temos

$$e'(\phi_0) = \left(\sqrt{n-1} - (n-1) \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) e(\phi_0) = 0$$

$$\begin{aligned} e''(\phi_0) &= \left(-n - (n-1) \frac{n}{n-1} + n-1 + (n-1)^2 \frac{1}{n-1} - 2(n-1) \right) e(\phi) \\ &= -2ne(\phi_0) \end{aligned}$$

Então

$$e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2) = e(\phi_0)(1 - n(\varepsilon x)^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi_-) = e(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0) - \varepsilon e'(\phi_0) + \varepsilon^2 e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2) = e(\phi_0)(1 - n\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \frac{e(\phi)}{e(\phi_-)} = \frac{e(\phi_0)(1 - n(\varepsilon x)^2) + o(\varepsilon^2)}{e(\phi_0)(1 - n\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2)} = 1 + n\varepsilon^2(1 - x^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)} \right)^2 - 1 = 2n\varepsilon^2(1 - x^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Theta_-(E) &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} dx = \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{(\operatorname{sen} \phi_0 + o(1)) \sqrt{2n\varepsilon^2(1-x^2) + o(\varepsilon^2)}} dx \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\operatorname{sen} \phi_0 \sqrt{2n(1-x^2)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_+ - \phi_0$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta_+(E) &= \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\operatorname{sen} \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)}\right)^2 - 1}} = \int_0^1 \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 + \varepsilon)}\right)^2 - 1}} dx \\ \Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E) = 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E) + 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \sqrt{2}\pi$$

Demonstração do Lema 2.1 parte (ii):

Lembramos que

$$\alpha' = \operatorname{sen} \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi)$$

Sejam $\alpha_-(E)$ e $\alpha_+(E)$ os valores mínimo e máximo respectivamente de $\alpha(s)$ que a curva $C(E)$ assume.

Lembramos que para $\alpha \in (\alpha_-(s), \alpha_+(s))$, a equação $e(\phi) = \frac{E}{\sin \alpha}$ tem exatamente duas raízes. Denotaremos elas por $\phi_1(\alpha, E)$ e $\phi_2(\alpha, E)$

Temos:

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= \int_{C(E) \cap \{\phi > \phi_0\}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} ds + \int_{C(E) \cap \{\phi < \phi_0\}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} ds = \\ &= \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi_1} \frac{d\alpha}{ds} + \int_{\alpha_+}^{\alpha_-} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi_2} \frac{d\alpha}{ds} \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \phi_i} \frac{1}{ds} = \frac{1}{(n-1) \frac{\sin^2 \phi_i}{\cos \phi_i} - \cos \phi_i} = f_i(\alpha, E)$$

$$\Rightarrow \Theta(E) = \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} f_1(\alpha, E) d\alpha - \int_{\alpha_+}^{\alpha_-} f_2(\alpha, E) d\alpha$$

$$= \int_0^\pi \bar{f}_1(\alpha, \phi) d\alpha - \int_0^\pi \bar{f}_2(\alpha, \phi) d\alpha$$

onde

$$\bar{f}_i(\alpha, \phi) = \begin{cases} f_i(\alpha, E) & \text{se } \alpha \in (\alpha_-(E), \alpha_+(E)) \\ 0 & \text{se } \alpha \notin (\alpha_-(E), \alpha_+(E)) \end{cases}$$

Para cada intervalo $[a, b] \subset (0, \pi)$, existe E_1 tal que para todo $E < E_1$, $[a, b] \subset (\alpha_-(E), \alpha_+(E))$.

Então, quando E tende a 0, ϕ_1 converge uniformemente em $[a, b]$ a $\frac{\pi}{2}$ e ϕ_2 converge uniformemente em $[a, b]$ a 0. Portanto, $f_1(\alpha, E)$ e $f_2(\alpha, E)$ convergem uniformemente em $[a, b]$ a 0 e a -1 respectivamente.

Logo,

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Theta(E) = \int_0^\pi 0 d\alpha - \int_0^\pi (-1) d\alpha = \pi$$

2.3

O Caso Curvatura Média Constante

Nesta seção estudaremos o caso em que a curvatura média H é constante.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $H > 0$.

O sistema a ser estudado é:

$$\begin{cases} \alpha' = nH + \operatorname{sen} \alpha ((n-1) \tan \phi - \cot \phi) \\ \phi' = \cos \alpha \end{cases}$$

Lembramos que uma integral primeira desse sistema é:

$$E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$$

Este sistema tem, a menos de translações de vetores $v_k = (k2\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, dois pontos de equilíbrio: $p_0 = (\frac{\pi}{2}, \phi_0)$ e $p'_0 = (\frac{3\pi}{2}, \phi'_0)$ onde ϕ_0 e ϕ'_0 são respectivamente soluções das equações:

$$(n-1) \tan \phi - \cot \phi = -nH$$

$$(n-1) \tan \phi - \cot \phi = nH$$

Sejam E_0 e E'_0 os níveis de energia associados a p_0 e p'_0 respectivamente.

A curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio p_0 é um círculo horizontal e a hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\operatorname{sen} \phi_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\cos \phi_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\theta(s)} \operatorname{sen} \phi_0, x \cos \phi_0)$$

Por outro lado, a curva esférica correspondente ao ponto de equilíbrio p'_0 é também um círculo horizontal. A hipersuperfície associada é o mergulho do produto $\mathbb{S}^1(\operatorname{sen} \phi'_0) \times \mathbb{S}^{n-1}(\cos \phi'_0)$ em \mathbb{S}^{n+1} :

$$X(s, x) = (e^{i\theta(s)} \operatorname{sen} \phi'_0, x \cos \phi'_0)$$

Se $E = 0$ temos:

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = 0$$

$$\Rightarrow H = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Lembramos que as curvaturas principais de Σ são dadas por:

$$k_1 = k_\xi$$

$$k_2 = \frac{-n_3}{\xi_3} = -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Além disso,

$$nH = k_1 + (n-1)k_2 = k_\xi - (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi$$

Logo, se $E = 0$ temos:

$$\begin{aligned} k_\xi &= nH + (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = -n\operatorname{sen} \alpha \tan \phi + (n-1)\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha \tan \phi = H \\ &\Rightarrow k_\xi = k_2 = H \end{aligned}$$

Nesse caso então, como as curvaturas principais são iguais, a hipersuperfície é totalmente umbílica. Logo, ela está contida em uma hiperesfera de \mathbb{S}^{n+1} .

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left(k_\xi - \frac{n_3}{\xi_3} \right) = \frac{1}{2} (k_\xi - \operatorname{sen} \alpha \tan \phi) = \frac{1}{2} \left(k_\xi - \frac{E - H \cos^2 \phi}{\operatorname{sen} \phi \cos \phi} \tan \phi \right) \\ &\Rightarrow k_\xi = H + \frac{E}{\cos^2 \phi} \end{aligned}$$

Portanto, k_ξ é constante se e somente se $E = 0$ ou ϕ é constante. As superfícies associadas são respectivamente os mergulhos da esfera $\mathbb{S}^2(\frac{1}{H})$ e dos toros $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-a^2})$, onde a é uma solução da equação algébrica $2H = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$. Esses dois exemplos serão chamados de triviais em seguida.

Vamos agora usar a notação $\Theta(E, H)$ para designar a integral

$$\Theta(E, H) = \int_{C(E, H)} \theta' ds$$

associada ao nível E de energia e com curvatura média constante H .

Analisando a integral primeira $E(\alpha, \phi) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi$, percebemos que agora temos dois tipos de curvas integrais $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$, que iremos denominar de tipo *I* e tipo *II*.

As curvas integrais do tipo I são fechadas e têm $\alpha(s) \neq 0 [\pi]$ para todo s . Elas correspondem aos níveis de energia $E < 0$ e $E > H$.

Já as curvas integrais do tipo II têm $\alpha'(s) > 0$. Isto é, a função α é crescente. São curvas periódicas. Elas correspondem aos níveis de energia entre 0 e H .

Veja o diagrama de fase do caso CMC na figura 2.3.

Vamos analisar apenas as curvas do tipo I .

Demonstraremos o:

Lema 2.5

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = \frac{\pi \sqrt{2(n-1)}}{\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}} = - \lim_{E \rightarrow E'_0} \Theta(E, H)$$

Se $n = 2$, então:

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = - \lim_{E \rightarrow E'_0} \Theta(E, H) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{H^2 + 1} - H\sqrt{H^2 + 1}} = M(H)$$

Demonstração do Lema 2.4:

Demonstração do Lema 2.4 parte (i):

Seja $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva integral do tipo I tal que $\alpha(s) \in (0, \pi)$. Sejam ϕ_- e ϕ_+ os valores mínimo e máximo respectivamente que a curva $C(E, H)$ assume.

Considere novamente a função

$$e(\phi) = \sin \phi \cos^{n-1} \phi$$

Então, $E = \sin \alpha e(\phi) + H \cos^n \phi$

Como a curva $C(E, H)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, temos

$$E = \sin \alpha \sin \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = e(\phi_-) + H \cos^n \phi_- = e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+$$

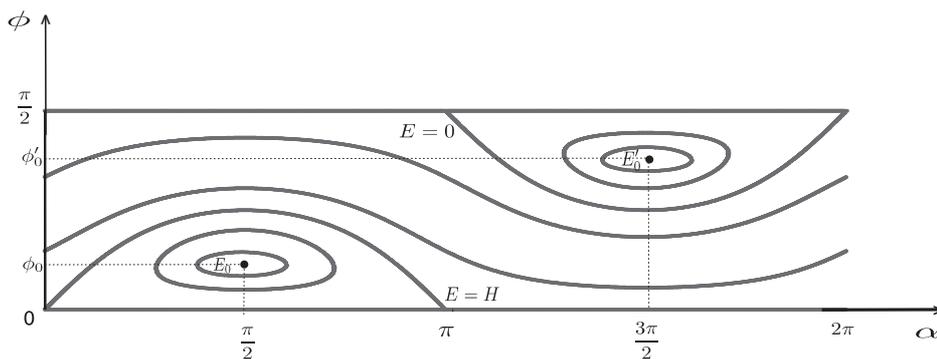


Figura 2.3: Diagrama de fase esférico no caso CMC, $H = 1$, $n = 2$

Portanto:

$$\begin{aligned} \Theta(E, H) &= \int_{C(E,H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = 2 \int_{\phi_-}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= 2 \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} + 2 \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{E-H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= 2\Theta_-(E, H) + 2\Theta_+(E, H) \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_0 - \phi_-$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta_-(E, H) &= \int_{\phi_-}^{\phi_0} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-)+H \cos^n \phi_- - H \cos^n \phi}\right)^2 - 1}} = \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{\text{sen}(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 - \varepsilon) + H(\cos^n(\phi_0 - \varepsilon) - \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x))}\right)^2 - 1}} dx \end{aligned}$$

Temos:

$$e(\phi) = e(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0) + \varepsilon x e'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi) = \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi$$

$$e'(\phi) = \cos^n \phi - (n-1) \text{sen}^2 \phi \cos^{n-2} \phi = (\cot \phi - (n-1) \tan \phi) e(\phi)$$

$$\begin{aligned} e''(\phi) &= -n \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi - 2(n-1) \text{sen } \phi \cos^{n-1} \phi + (n-1)(n-2) \text{sen}^3 \phi \cos^{n-3} \phi = \\ &= (-3n + 2 + (n-1)(n-2) \tan^2(\phi)) e(\phi) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$(n - 1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

temos

$$e'(\phi_0) = nHe(\phi_0)$$

$$e''(\phi_0) = (-3n + 2 + (n - 1)(n - 2) \tan^2(\phi_0))e(\phi_0)$$

Logo:

$$e(\phi) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

E temos:

$$e(\phi_-) = e(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0) - \varepsilon xe'(\phi_0) + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} e''(\phi_0) + o(\varepsilon^2)$$

$$e(\phi_-) = e(\phi_0) \left(1 - H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

Pela fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} \cos^n(\phi_0 - \varepsilon) &= \cos^n \phi_0 + \varepsilon n \operatorname{sen} \phi_0 \cos^{n-1} \phi_0 + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} (n(n - 1) \operatorname{sen}^2 \phi_0 \cos^{n-2} \phi_0 - n \cos^n \phi_0) + o(\varepsilon^2) = \\ &= e(\phi_0) \left(\cot \phi_0 + \varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} (n(n - 1) \tan \phi_0 - n \cot \phi_0) \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) &= \cos^n \phi_0 - \varepsilon xn \operatorname{sen} \phi_0 \cos^{n-1} \phi_0 + \\ &+ \frac{(\varepsilon x)^2}{2} (n(n - 1) \operatorname{sen}^2 \phi_0 \cos^{n-2} \phi_0 - n \cos^n \phi_0) + o(\varepsilon x)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(\cot \phi_0 - \varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2} (n(n - 1) \tan \phi_0 - n \cot \phi_0) \right) + o(\varepsilon x)^2 \end{aligned}$$

Mas

$$(n - 1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

Logo:

$$\cos^n(\phi_0 - \varepsilon) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 + \varepsilon n - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 - \varepsilon xn - H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) + o(\varepsilon x)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E - H \cos^n \phi &= e(\phi_-) + H(\cos^n \phi_- - \cos^n \phi) = \\ &= e(\phi_0) \left(1 - H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2)) + H((\cot \phi_0 + \varepsilon n - \right. \\ &\quad \left. - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2 - \cot \phi_0 + \varepsilon xn + H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) \right) + o(\varepsilon)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n - 1)(n - 2) \tan^2 \phi_0 - (3n - 2) + (Hn)^2(x^2 - 1)) \right) + \\ &+ o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} &= \frac{1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2)) + o(\varepsilon)^2}{1 + H\varepsilon xn + \frac{\varepsilon^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) + (nH)^2(x^2-1)) + o(\varepsilon^2)} \\ &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}(x^2-1)((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2) \\ \Rightarrow \left(\frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} \right)^2 - 1 &= \varepsilon^2(x^2-1)((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Theta_-(E) = \int_{-1}^0 \frac{\varepsilon}{(\sin(\phi_0) + o(1)) \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_-) - H \cos^n \phi} \right)^2 - 1}} dx =$$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) = \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{(3n-2) + (nH)^2 - (n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{(3n-2) + (\cot \phi - (n-1)\tan \phi)^2 - (n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sin \phi_0 \sqrt{n + (n-1)\tan^2 \phi_0 + \cot^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n \sin^2 \phi_0 + (n-1)\sin^2 \phi_0 \tan^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0}} \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) = \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1)\tan^2 \phi_0 + 1}}$$

Analogamente, fazendo a troca de variáveis $\phi = \phi_0 + \varepsilon x$, onde $\varepsilon = \phi_+ - \phi_0$:

$$\begin{aligned} \Theta_+(E, H) &= \int_{\phi_0}^{\phi_+} \frac{d\phi}{\sin \phi \sqrt{\left(\frac{e(\phi)}{e(\phi_+) + H(\cos^n \phi_+ - \cos^n \phi)} \right)^2 - 1}} = \\ &= \int_0^1 \frac{d\phi}{\sin(\phi_0 + \varepsilon x) \sqrt{\left(\frac{e(\phi_0 + \varepsilon x)}{e(\phi_0 + \varepsilon) + H(\cos^n(\phi_0 + \varepsilon) - \cos^n(\phi_0 + \varepsilon x))} \right)^2 - 1}} \end{aligned}$$

Temos:

$$e(\phi) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon xn + \frac{(\varepsilon x)^2}{2}((n-1)(n-2)\tan^2 \phi_0 - (3n-2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

E:

$$e(\phi_+) = e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2)) \right) + o(\varepsilon)^2$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 - \varepsilon n - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\cos^n(\phi_0 + \varepsilon x) = e(\phi_0)(\cot \phi_0 - \varepsilon x n - H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) + o(\varepsilon x)^2$$

$$\begin{aligned} E - H \cos^n \phi &= e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+ - H \cos^n \phi = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2)) + H(\cot \phi_0 - \varepsilon n - \right. \\ &\quad \left. - H \frac{\varepsilon^2}{2} n^2 - \cot \phi_0 + \varepsilon x n + H \frac{(\varepsilon x)^2}{2} n^2) \right) + o(\varepsilon)^2 = \\ &= e(\phi_0) \left(1 + H\varepsilon x n + \frac{\varepsilon^2}{2} ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2) + (Hn)^2(x^2 - 1)) \right) + \\ &\quad + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{e(\phi)}{E - H \cos^n \phi} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (x^2 - 1) ((n-1)(n-2) \tan^2 \phi_0 - (3n-2) - (nH)^2) + o(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E, H) = \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}}$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) &= 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_-(E, H) + 2 \lim_{E \rightarrow E_0} \Theta_+(E, H) = \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} + 2 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(n-1) \tan^2 \phi_0 + 1}} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$(n-1) \tan \phi_0 - \cot \phi_0 = -nH$$

Logo,

$$(n-1) \tan \phi_0 + nH - \frac{1}{\tan \phi_0} = 0$$

$$\Rightarrow (n-1) \tan^2 \phi_0 + nH \tan \phi_0 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan \phi_0 = \frac{-nH \pm \sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

Mas $0 < \phi_0 < \pi/2$, logo, $\tan \phi_0 > 0$.

$$\Rightarrow \tan \phi_0 = \frac{-nH + \sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \phi_0 = \frac{2(nH)^2 + 4(n-1) - 2nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{4(n-1)^2}$$

$$\Rightarrow (n-1)\tan^2 \phi_0 + 1 = \frac{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}$$

Finalmente,

$$\lim_{E \rightarrow E_0} \Theta(E, H) = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1) - nH\sqrt{(nH)^2 + 4(n-1)}}}$$

Demonstração do Lema 2.4 parte (ii):

Consideramos agora $C(E, H) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva do tipo I tal que $\alpha(s) \in (\pi, 2\pi)$. A demonstração é análoga à demonstração de (i). Basta apenas observar que nesse caso temos $\sin \alpha < 0$ e temos que a curva $C(E, H)$ é simétrica em relação a reta $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. Logo:

$$E = \sin \alpha \sin \phi \cos^{n-1} \phi + H \cos^n \phi = -e(\phi_-) + H \cos^n \phi_- = -e(\phi_+) + H \cos^n \phi_+$$

A partir de agora, vamos nos restringir ao estudo para $n = 2$.

Novamente estamos interessados no caso em que ξ é fechada para conseguirmos toros equivariantes CMC de \mathbb{S}^3 .

Então, vamos analisar a função $\Theta(E, H)$. Queremos que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Se $\Theta(E, H) = \frac{2\pi}{q}$, com $q \in \mathbb{Z}^*$, então ξ será mergulhada e portanto, Σ será mergulhada.

Demonstraremos o:

Lema 2.6

$$(i) \lim_{E \rightarrow H_+} \Theta(E, H) = \pi + 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1+\frac{t^2}{H^2}}} = F(H)$$

$$(ii) \lim_{E \rightarrow 0_-} \Theta(E, H) = \arctan\left(\frac{H^2-1}{2H}\right) - \frac{\pi}{2} = G(H)$$

O integrando aparecendo na fórmula de $F(H)$ é uma função elíptica completa de primeiro tipo.

Lembramos que os limites da função $\Theta(E, H)$ com E tendendo aos níveis E_0 e E'_0 associados aos pontos de equilíbrios são dados por $M(H)$ e $-M(H)$ respectivamente, onde

$$M(H) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\sqrt{H^2+1} - H\sqrt{H^2+1}}$$

Fazendo um estudo das funções $F(H)$ e $M(H)$ concluímos que as funções $F(H)$ e $M(H)$ são crescentes. Temos que:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} M(H) = \pi$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} F(H) = \pi$$

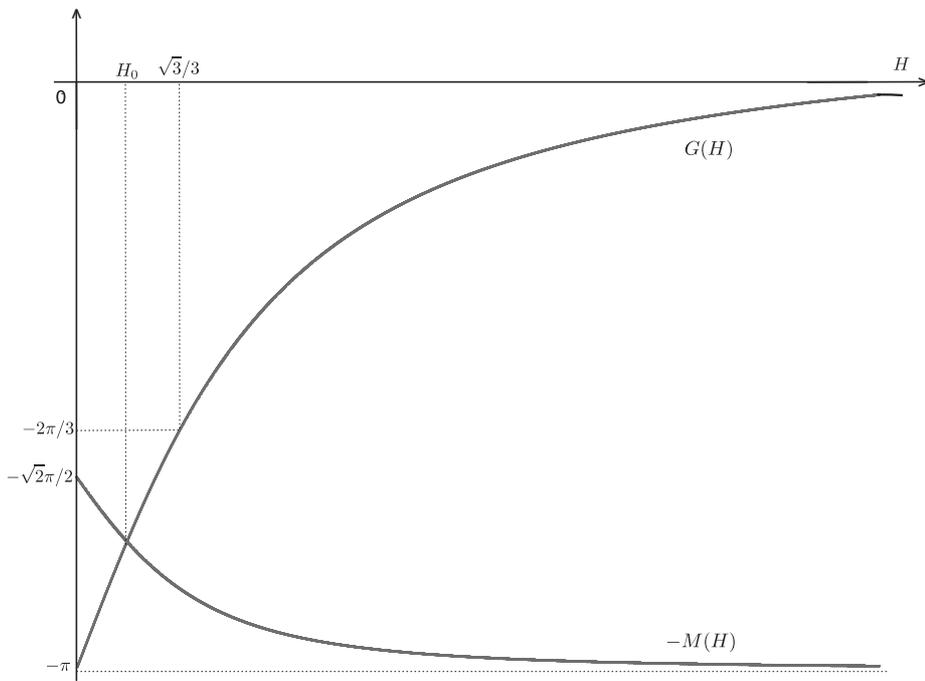
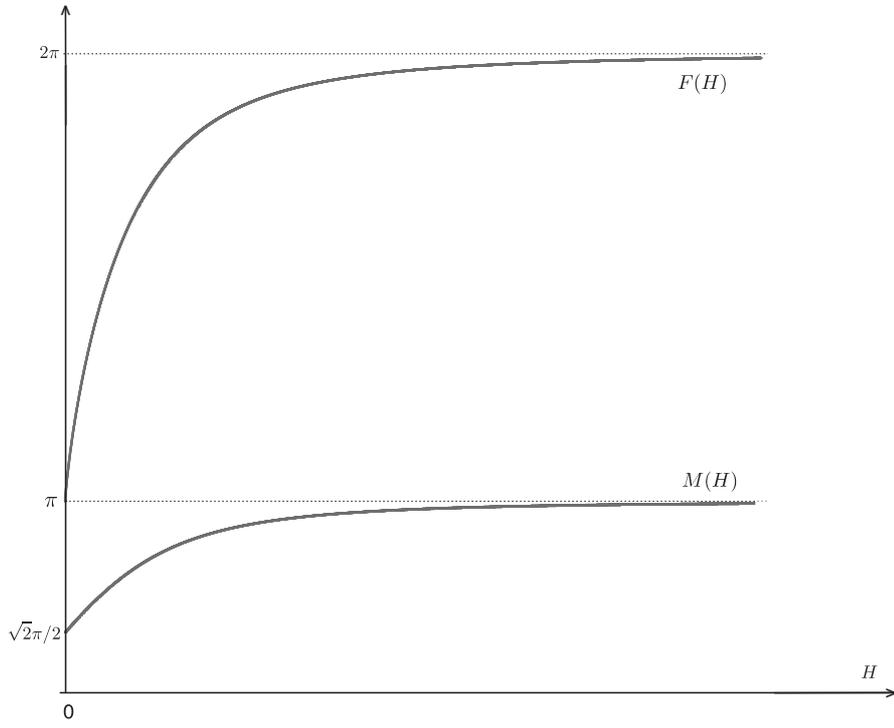
Veja a figura na página seguinte.

Fixando um valor de H , notamos que $M(H) \neq F(H)$. Logo, aplicando o teorema do valor intermediário, podemos concluir que existirá uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$. Isto é, pelo lema 2.1, existirá uma quantidade infinita e enumerável de curvas ξ fechadas, logo, de toros com curvatura média constante H .

Além disso, como $\pi \in (M(H), F(H))$, existirá E tal que $\Theta(E, H) = \pi = \frac{2\pi}{2}$. Ou seja, para cada $H > 0$, temos um toro não trivial equivariante com curvatura média constante H mergulhado em \mathbb{S}^3 .

Analogamente estudando a função $G(H)$, concluímos que a função é crescente e que:

$$\lim_{H \rightarrow 0} G(H) = -\pi$$



$$\lim_{H \rightarrow \infty} G(H) = 0$$

Observamos que existe apenas um valor de H , H_0 , tal que $M(H_0) = G(H_0)$. Portanto, para qualquer $H \neq H_0$, existirá uma quantidade infinita e enumerável de valores de E tais que $\Theta(E, H) \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Iremos agora discutir a questão do mergulho.

Observe que para cada H tal que $G(H) > \frac{-2\pi}{3}$, temos $\frac{-2\pi}{3} \in (-M(H), G(H))$. Então nesse caso, existirá E tal que $\Theta(E, H) = \frac{-2\pi}{3}$, isto é, pelo lema 2.1, teremos um mergulho compacto não trivial.

Mas

$$G(H) > \frac{-2\pi}{3} \iff H > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Além disso, como $\lim_{H \rightarrow \infty} G(H) = 0$, para cada $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, existe H_N tal que para todo $H > H_N$, temos $\{\frac{-2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{4}, \dots, \frac{-2\pi}{N}\} \subset (-M(H), G(H))$. Portanto, para todo $H > H_N$ temos ao menos $N - 2$ toros mergulhados todos distintos com curvatura média constante H .

Portanto, como corolário dos lemas 2.5 e 2.6, temos o seguinte teorema:

Teorema 2 *Dado $H > 0$, existe uma família enumerável \mathcal{F}_H de toros equivariantes com curvatura média constante H imersos em \mathbb{S}^3 , e além dos toros planos, existe ao menos um outro toro de \mathcal{F}_H mergulhado em \mathbb{S}^3 .*

Se $H > \frac{\sqrt{3}}{3}$, então existem ao menos dois toros em \mathcal{F}_H mergulhados além dos toros planos. E quanto maior for o valor de H , mais mergulhos teremos em \mathcal{F}_H .

Demonstração do Lema 2.5:

Demonstração de (i):

Como E está tendendo a H com $E > H$, as curvas $C(E)$ são nesse caso curvas do tipo I e temos $0 < \alpha < \pi$.

Quando E tende a H , com $E > H$, uma parte da curva $C(E)$ tende à curva especial $C(H, H)$ e na outra parte, temos ϕ convergindo uniformemente para 0 (com $\alpha \in (0, \pi)$). Então:

$$\lim_{E \rightarrow H^+} \Theta(E, H) = \Theta(H, H) + \lim_{\phi \rightarrow 0} \Theta(E, H)$$

Se $\alpha \in (0, \pi)$, temos:

$$\begin{aligned} \Theta(E, H) &= \int_{C(E, H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = \int_{\pi}^0 \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} \frac{d\alpha}{\alpha'} = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{-\text{sen } \alpha}{nH \text{sen } \phi + \text{sen } \alpha \left((n-1) \frac{\text{sen}^2 \phi}{\cos \phi} - \cos \phi \right)} d\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow 0} \Theta(E, H) = \int_0^{\pi} d\alpha = \pi$$

Agora, vamos calcular $\Theta(H, H)$:

$$E = H \Rightarrow \text{sen } \alpha \text{sen } \phi \cos \phi + H \cos^2 \phi = H$$

$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = H \tan \phi$$

Seja ϕ_1 o valor máximo de $\phi(s)$ que a curva $C(H, H)$ assume.

$$\begin{aligned} \Theta(H, H) &= \int_{C(E, H)} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi} ds = 2 \int_0^{\phi_1} \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2 \alpha} - 1}} = 2 \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{\cot^2 \phi}{H^2} - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\tan \phi = \frac{x}{H}$, temos:

$$\Theta(H, H) = 2 \int_0^1 \frac{\frac{1}{H} \cos^2 \phi}{\text{sen } \phi \sqrt{\frac{\cot^2 \phi}{H^2} - 1}} dx = 2 \int_0^1 \frac{\cot \phi \cos \phi}{\sqrt{\cot^2 \phi - H^2}} dx$$

Mas

$$\tan \phi = \frac{x}{H} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} = \frac{x}{H}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos \phi &= \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}} \\ \Rightarrow \Theta(H, H) &= 2 \int_0^1 \frac{\frac{H^2}{x\sqrt{x^2+H^2}}}{\sqrt{\frac{H^2}{x^2} - H^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{H^2}{(\sqrt{x^2 + H^2})(\sqrt{H^2 - x^2 H^2})} dx = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{H^2} + 1}\right)(\sqrt{1 - x^2})} = 2Z\left(\frac{1}{H}\right) \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\lim_{E \rightarrow H_+} \Theta(E, H) = \pi + 2Z\left(\frac{1}{H}\right) = F(H)$$

Demonstração de (ii):

Como E está tendendo a 0 com $E < 0$, as curvas $C(E)$ são nesse caso curvas do tipo I e temos $\pi < \alpha < 2\pi$.

Quando E tende a 0, com $E < 0$, uma parte da curva $C(E)$ tende à curva especial $C(0, H)$ e na outra parte, temos ϕ convergindo uniformemente para $\frac{\pi}{2}$ (com $\alpha \in (\pi, 2\pi)$). Então:

$$\lim_{E \rightarrow 0_-} \Theta(E, H) = \Theta(0, H) + \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Theta(E, H)$$

Se $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, temos:

$$\Theta(E, H) = \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{nH \sin \phi + \sin \alpha \left((n-1) \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} - \cos \phi \right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}} \Theta(E, H) = 0$$

Agora, vamos calcular $\Theta(0, H)$:

$$E = 0 \Rightarrow \sin \alpha \sin \phi \cos \phi + H \cos^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -H \cot \phi$$

Seja ϕ'_1 o valor mínimo de $\phi(s)$ que a curva $C(0, H)$ assume.

Observe que $\sin \alpha < 0$. Então:

$$\begin{aligned} \Theta(H, H) &= 2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \alpha}{\sin \phi \cos \alpha} d\phi = \\ &= 2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin \phi \left(-\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} \right)} = -2 \int_{\phi'_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sin \phi \sqrt{\frac{\tan^2 \phi}{H^2} - 1}} \end{aligned}$$

Fazendo a troca de variáveis $\cot \phi = \frac{x}{H}$, temos:

$$\Theta(0, H) = -2 \int_{-1}^0 \frac{\frac{-1}{H} \sin^2 \phi}{\sin \phi \sqrt{\frac{\tan^2 \phi - H^2}{H^2}}} dx = -2 \int_0^1 \frac{\sin \phi}{\sqrt{\tan^2 \phi - H^2}} dx$$

Mas

$$\begin{aligned} \cot \phi &= \frac{x}{H} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \phi}}{\sin \phi} = \frac{x}{H} \\ &\Rightarrow \sin \phi = \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}} \\ \Rightarrow \Theta(0, H) &= -2 \int_0^1 \frac{\frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}}}{\sqrt{\frac{H^2}{x^2} - H^2}} dx = -2 \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2} \sqrt{1 - x^2}} dx = \\ &= \arctan \left(\frac{H^2 - 1}{2H} \right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, temos:

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta(E, H) = \arctan \left(\frac{-1 + H^2}{2H} \right) - \frac{\pi}{2} = G(H)$$