

1

Preliminares

1.1

Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1 Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M , munido de aplicações injetoras $\Phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, com $i \in I$, e U_i aberto de \mathbb{R}^n que satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\bigcup_{i \in I} \Phi_i(U_i) = M$
(ii) Se $W = \Phi_i(U_i) \cap \Phi_j(U_j) \neq \emptyset$, então $\Phi_i^{-1}(W)$ e $\Phi_j^{-1}(W)$ são abertos e a aplicação $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i : \Phi_i^{-1}(W) \rightarrow \Phi_j^{-1}(W)$ é diferenciável.

Chamamos cada aplicação Φ_i de parametrização local de M . A família $A = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ é chamada de atlas de M .

A dimensão de M é o número n e indicaremos M por M^n .

Definição 1.2 Uma aplicação entre variedades $F : M^m \rightarrow N^n$ é dita diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização local (V, Ψ) de $F(p)$ em N , existe uma carta (U, Φ) de p em M tal que $F(\Phi(U)) \subset \Psi(V)$ e a aplicação $\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ é diferenciável em $\Phi^{-1}(p)$.

F é dita diferenciável se o é para todo $p \in M$. Se F é diferenciável e inversível e sua inversa F^{-1} é diferenciável, dizemos que F é um difeomorfismo.

Definição 1.3 Seja M uma variedade diferenciável. Uma curva diferenciável em M é uma aplicação $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ diferenciável. Suponha que $\alpha(0) = p$. O vetor tangente à α em $t = 0$ é definido como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha'(0): \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D} = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é diferenciável em } p\}$.

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$.

O espaço tangente à M em p é o conjunto de todos os vetores tangentes à M em p . Este espaço é denotado por T_pM .

Teorema 1.4 T_pM é um espaço vetorial de dimensão n .

Dem: Considere uma parametrização local $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em torno de p tal que $\Phi(0) = p$.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $\Phi(U)$. Isto é, $f \circ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Expressando a função f na parametrização Φ , temos:

$$f \circ \Phi(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \text{onde } q = (x_1, \dots, x_n)$$

Suponha que $\Phi^{-1}(\alpha(t)) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ e que $\alpha(0) = p$.

Portanto, restringindo f a α , obteremos:

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(f \circ \Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \right) (t) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))) (t) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \\ &\Rightarrow \alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (*) \end{aligned}$$

Observe que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é o vetor tangente em p à curva coordenada

$$x_i \rightarrow \Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$$

Pela equação (*), notamos que o conjunto T_pM com as operações usuais de funções é um espaço vetorial de dimensão n e o conjunto de vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ associados à parametrização Φ forma uma base deste espaço.

Definição 1.5 Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dado $p \in M$ e $v \in T_pM$, considere uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Seja $\beta = F \circ \alpha$. Então a diferencial de F no ponto p é definida por:

$$\begin{aligned} dF_p : T_pM &\rightarrow T_{F(p)}N \\ v &\mapsto dF_p(v) = \beta'(0) \end{aligned}$$

Observação 1.6 dF_p é uma aplicação linear que não depende da escolha da curva α .

Definição 1.7 Uma aplicação diferenciável entre variedades $F : M^n \rightarrow N^m$ é dita uma imersão se $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ é injetora para todo $p \in M$. A imersão F é um mergulho se $F : M \rightarrow F(M)$ é um homeomorfismo (com $F(M)$ tendo a topologia induzida por N).

Se $F : M^n \rightarrow N^m$ é uma imersão, então $n < m$. A diferença $m - n$ é chamada de codimensão da imersão.

Neste trabalho, estamos interessados no caso em que a codimensão $m - n$ é igual a 1. Isto é, $F : M^n \rightarrow N^{n+1}$.

1.2

Variedades Riemannianas

Definição 1.8 Considere o conjunto $L^2(T_pM, \mathbb{R}) = \{\alpha : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R} / \alpha \text{ é bilinear}\}$.

Seja M^n uma variedade diferenciável. Dado $p \in M$, seja $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização local de uma vizinhança de p e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ o referencial adaptado associado a Φ .

Uma métrica pseudo-riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear simétrica $g_p \in L^2(T_pM, \mathbb{R})$. Isto é, g_p satisfaz as seguintes condições:

- (i) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$ para todos $X, Y \in T_pM$
- (ii) As funções $g_{ij}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ são funções diferenciáveis em $\Phi(U)$.
- (iii) Se $g_p(X, Y) = 0$ para todo $Y \in T_pM$, então $X = 0$.

Observação 1.9 Se além disso, a forma bilinear simétrica g_p é positiva definida, então dizemos que g é uma métrica.

Isto é, uma métrica riemanniana g em M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, uma forma bilinear $g_p \in L^2(T_pM, \mathbb{R})$ que satisfaz as condições (i) e (ii) e que também satisfaz a seguinte condição:

- (iii') $g_p(X, X) > 0$ para todo $X \in T_pM, X \neq 0$.

Note que (iii') \Rightarrow (iii).

Definição 1.10 O par (M, g) é chamado de variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana).

As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica riemanniana (ou pseudo-riemanniana) no sistema de coordenadas (U, Φ) .

Observação 1.11 Também usaremos a notação $\langle X, Y \rangle_p$ para expressar $g_p(X, Y)$.

Definição 1.12 *Sejam M e N variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado de isometria se para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$ temos:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

Definição 1.13 *Seja $(\overline{M}^{n+k}, \overline{g})$ uma variedade riemanniana. Suponha que M^n é uma variedade diferenciável e que $f : M \hookrightarrow \overline{M}$ é uma imersão. Então, fica definida uma métrica g em M da seguinte maneira:*

Dados $p \in M$ e $u, v \in T_p M$,

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$$

A métrica g de M é dita métrica induzida por f pela variedade riemanniana \overline{M} , e é também chamada de primeira forma fundamental de f .

A aplicação $f : (M, g) \rightarrow (\overline{M}, \overline{g})$ é chamada de imersão isométrica.

Dizemos que M é uma variedade riemanniana imersa em \overline{M} .

Observação 1.14 *Analogamente define-se pseudo-métrica induzida e variedade pseudo-riemanniana imersa em uma variedade ambiente pseudo-riemanniana \overline{M} .*

1.3

Conexão Riemanniana

Definição 1.15 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$, um vetor $X(p) \in T_p M$.*

Sejam $\Phi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ uma parametrização local de M em torno de um ponto $p \in M$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ o referencial associado à Φ . Então existem funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que:

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Vamos dizer que o campo X é diferenciável se as funções a_i são diferenciáveis e denotar por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto de campos de vetores diferenciáveis em M . Essa definição não depende da parametrização escolhida Φ .

Então podemos associar a cada função $f \in \mathcal{D}$, a derivada direcional de f na direção do vetor $X(p)$, que é dada pela função:

$$\begin{aligned} Xf: \quad M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto Xf(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

O campo X é diferenciável se e só se $Xf \in \mathcal{D}$.

Logo, podemos pensar em um campo de vetores diferenciável como um operador:

$$\begin{aligned} X: \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ f &\mapsto Xf \end{aligned}$$

Definição 1.16 *Seja M uma variedade diferenciável. Dados dois campos de vetores X e Y em M , existe um único campo de vetores de M , denotado por $[X, Y]$ e chamado colchete de Lie, tal que para todo $f \in \mathcal{D}$ temos $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$.*

Observação 1.17 *O colchete de Lie tem as seguintes propriedades: ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)*

- (i) $[\alpha X + \beta Y, Z] = [\alpha X, Z] + [\beta Y, Z]$;
- (ii) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Está última é chamada de Identidade de Jacobi.

Definição 1.18 *Uma conexão afim, é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as propriedades:

- (i) $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- (ii) $\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

Definição 1.19 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana) (M, g) é dita uma conexão de Levi-Civita se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *compatibilidade com a métrica (ou pseudo-métrica):*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

- (ii) *simetria:*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Teorema 1.20 *Dada uma variedade riemanniana (ou pseudo-riemanniana) (M, g) , existe uma única conexão de Levi-Civita em (M, g) (associada a métrica g).*

Teorema 1.21 *Seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M em uma variedade riemanniana $(\overline{M}, \overline{\nabla})$. Suponha que M tem métrica induzida g pela imersão. Seja ∇ a conexão de (M, g) . Dados X, Y campos locais de vetores em $f(M)$, podemos estender esses campos a \overline{M} .*

Então:

$$(\overline{\nabla}_Y X)^T = \nabla_Y X$$

onde $(\overline{\nabla}_Y X)^T$ é a parte tangente de $\overline{\nabla}_Y X$.

Logo:

$$\overline{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + (\overline{\nabla}_Y X)^\perp \quad (\text{Fórmula de Gauss})$$

onde $(\overline{\nabla}_Y X)^\perp$ é a parte normal de $\overline{\nabla}_Y X$.

1.4

A Segunda Forma Fundamental de uma imersão de codimensão 1

Definição 1.22 *Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão de codimensão 1.*

Dado $p \in M$, considere um vetor unitário $N(p)$ normal à p .

Temos $N(p) \in T_p \overline{M}$, e $T_p \overline{M} = T_p M + N(p)\mathbb{R}$.

Dado $X \in T_p M$ podemos estendê-lo a $\overline{X} \in T_p \overline{M}$.

O operador de Weingarten é definido por:

$$\begin{aligned} A = -\overline{\nabla}N: \quad T_p M &\rightarrow T_p M \\ X &\mapsto A(X) = -\overline{\nabla}_X N \end{aligned}$$

Para todos $X, Y \in T_p M$ temos $\langle AX, Y \rangle = \langle AY, X \rangle$, isto é, o operador de Weingarten é auto-adjunto. Logo, é possível determinar uma base ortonormal e_1, \dots, e_n de $T_p M$ tal que $A(e_i) = k_i e_i$. Os números k_1, \dots, k_n são chamados curvaturas principais da imersão no ponto p .

A segunda forma fundamental da imersão (de codimensão 1) é dada por:

$$\begin{aligned} II: \quad \mathfrak{X}(\overline{M}) \times \mathfrak{X}(\overline{M}) &\rightarrow \mathfrak{X}(\overline{M}) \\ (X, Y) &\mapsto II(X, Y) = \langle \overline{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle -\overline{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle AX, Y \rangle \end{aligned}$$

Definição 1.23 *Uma imersão isométrica $f : M \rightarrow \overline{M}$ é dita totalmente geodésica se $II = 0$. Nesse caso, dizemos que M é totalmente geodésica.*

Definição 1.24 *Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é dita totalmente umbílica se as curvaturas principais são iguais em todos os pontos.*

Definição 1.25 Considere novamente a imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. A curvatura média de M em \overline{M} no ponto p é $H(p) = \frac{1}{n}(k_1 + \dots + k_n)$, onde k_1, \dots, k_n são as curvaturas principais de M em p .

Observação 1.26 Em coordenadas locais, a curvatura média é expressa da seguinte maneira:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}(II \cdot I^{-1})$$

onde I e II são as matrizes da primeira e da segunda forma fundamental respectivamente.

De fato:

Considere a imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ entre as variedades Riemannianas (M, g) e $(\overline{M}, \overline{g})$ onde g é a métrica induzida por f . Seja Σ a hipersuperfície $f(M) \subset \overline{M}$. Sejam $\overline{\nabla}$ e ∇ as conexões riemannianas de M e Σ respectivamente.

Dada uma parametrização $\Phi : U \rightarrow \Sigma$ em torno de um ponto $p \in \Sigma$, seja $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ a base de $T_p \Sigma$ associada a Φ . Podemos estender localmente os vetores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à M .

Seja $N(p)$ um vetor normal unitário a p . $N(p) \in T_p M$.

Temos então a matriz da primeira forma fundamental, que é uma matriz simétrica positiva definida cujas entradas são $(g_{ij}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$.

Temos também a matriz da segunda forma fundamental, que é uma matriz simétrica cujas entradas são $(b_{ij}) = \left\langle A \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$.

Como o vetor $A \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = -\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} N$ está em $T_p M$, temos

$$A \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1-1}$$

A matriz cujas entradas são (a_{ij}) é a matriz do operador A relativamente à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ que denotaremos por $[A]$.

Então:

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}[A] = \frac{1}{n} \text{traço}[a_{ij}]$$

Fazendo o produto interno com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ na equação (1-1), temos:

$$b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} g_{ij}$$

que na forma matricial fica:

$$II = [A].I$$

$$\Rightarrow [A] = II.I^{-1}$$

Portanto,

$$H = \frac{1}{n} \text{traço}([A]) = \frac{1}{n} \text{traço}(II.I^{-1})$$

Definição 1.27 Considere uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$. A hipersuperfície $f(M)$ de \overline{M} é chamada mínima se a curvatura média de M em \overline{M} é identicamente nula.

A hipersuperfície $f(M)$ é chamada hipersuperfície de curvatura média constante e denotada por hipersuperfície CMC se a curvatura média de M em \overline{M} é constante. Em geral, dizemos que uma hipersuperfície é CMC se a curvatura média é constante e diferente de 0.

Exemplo 1 Uma hipersuperfície totalmente geodésica é mínima.

Exemplo 2 Chamamos de superfície de revolução a superfície obtida quando giramos uma curva regular plana α em torno do eixo L ortogonal ao plano da curva. Tal curva é chamada de curva geratriz e L é o eixo de rotação.

Seja α uma curva contida no plano xz que é localmente um gráfico de uma função diferenciável na forma $z \mapsto F(z)$. Uma parametrização local para α é:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto \alpha(u) = (F(u), 0, u) \end{aligned} \quad \text{com } F(u) > 0$$

E uma parametrização local para a superfície de revolução S gerada por α é dada por:

$$\begin{aligned} X: (a, b) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (F(u) \cos v, F(u) \sin v, u) \end{aligned}$$

Vamos calcular a curvatura média de S :

Calculando as derivadas parciais:

$$X_u = (F' \cos v, F' \sin v, 1)$$

$$X_v = (-F \sin v, F \cos v, 0)$$

Logo, a matriz I da primeira forma fundamental é:

$$\begin{bmatrix} F'^2 + 1 & 0 \\ 0 & F^2 \end{bmatrix}$$

Calculando as segundas derivadas parciais:

$$X_{uu} = (F'' \cos v, F'' \sin v, 0)$$

$$X_{uv} = (-F' \sin v, F' \cos v, 0)$$

$$X_{vv} = (-F \cos v, -F \sin v, 0)$$

Um vetor normal a imersão em \mathbb{R}^3 é dado por:

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, F')}{\sqrt{1 + F'^2}}$$

Logo, a matriz II da segunda forma fundamental é:

$$\begin{bmatrix} \frac{-F''}{\sqrt{1+F'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{F}{\sqrt{1+F'^2}} \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \text{traço}(II \cdot I^{-1}) = \frac{1}{2} \text{traço} \begin{bmatrix} \frac{-F''}{\sqrt{1+(F')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{F}{\sqrt{1+(F')^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(F')^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{F^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{traço} \begin{bmatrix} \frac{-F''F}{F^2(1+(F')^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1+(F')^2}{F^2(1+(F')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix} = \frac{-F''F + 1 + (F')^2}{2F^2(1 + (F')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Se $H = 0$, temos:

$$\begin{aligned} FF'' &= 1 + (F')^2 \\ \Rightarrow \frac{F'F''}{1 + (F')^2} &= \frac{F'}{F} \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int \frac{F'F''}{1 + (F')^2} &= \int \frac{F'}{F} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + (F')^2) &= \ln(F) + c \\ \Rightarrow \sqrt{1 + (F')^2} &= e^c F = c'F \\ \Rightarrow (F')^2 &= (c'F)^2 - 1 \\ \Rightarrow F(u) &= \frac{1}{c'} \cosh(c'u) \end{aligned}$$

Assim,

$$X(u, v) = \left(\frac{1}{c'} \cosh(c'u) \cos v, \frac{1}{c'} \cosh(c'u) \sin v, u \right)$$

Essa superfície é chamada de catenóide. Ela foi descoberta em 1776 por Meusnier. A curva geratriz do catenóide chama-se catenária.

O catenóide é a única superfície de revolução que é mínima.

Exemplo 3 *O matemático C. Delaunay classificou as superfícies de revolução CMC. Ele demonstrou que existem apenas três tipos de superfícies CMC ou mínimas de revolução em \mathbb{R}^3 . São elas: o catenóide, o ondulóide e o nodóide.*

A curva geratriz do catenóide (que é mínima) é a trajetória do foco de uma parábola que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

A curva geratriz do ondulóide é a trajetória do foco de uma elipse que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

A curva geratriz do nodóide é a trajetória do foco de uma hipérbole que se desloca sem escorregar ao longo de uma reta.

Tais superfícies são chamadas superfícies de Delaunay.

1.5

O espaço hiperbólico

Definição 1.28 *Definimos o espaço de Minkowski ou espaço de Lorentz \mathbb{R}_1^n , como o espaço \mathbb{R}^n com a pseudo-métrica $g_1 = \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, onde g_1 é definida da seguinte maneira:*

$$\langle X, Y \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n$$

onde $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.29 *A conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_1^n é a mesma que a de \mathbb{R}^n (a conexão plana).*

Definição 1.30 *Um vetor X é chamado:*

- (i) tipo-espaço, se $\langle X, X \rangle_1 > 0$*
- (ii) tipo-tempo, se $\langle X, X \rangle_1 < 0$*
- (iii) tipo-luz, se $\langle X, X \rangle_1 = 0$ com $X \neq 0$*

Definição 1.31 *O espaço hiperbólico \mathbb{H}^n é definido como:*

$$\mathbb{H}^n = \{X \in \mathbb{R}_1^{n+1} / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Em particular, fazendo $n = 2$, temos o plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \{X \in \mathbb{R}_1^3 / \langle X, X \rangle_1 = -1\}$$

Teorema 1.32 *A pseudo-métrica induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n é positiva definida.*

Portanto, $(\mathbb{H}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ é uma variedade Riemanniana.

1.6

As formas espaciais

Definição 1.33 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, uma aplicação $R(X, Y)$ definida da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} R(X, Y): \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ Z &\mapsto R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned}$$

Observação 1.34 *Usaremos a notação $R(X, Y, Z, T)$ para designar o número real $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$.*

E indicaremos por $\|X \wedge Y\|$ a expressão $\sqrt{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$.

Definição 1.35 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Dados $p \in M$ e $\sigma \subset T_p M$ um subespaço de dimensão 2 de $T_p M$ gerado pelos vetores linearmente independentes $X, Y \in T_p M$, definimos a curvatura seccional de σ em p , como sendo o número real*

$$\frac{R(X, Y, X, Y)}{\|X \wedge Y\|^2}$$

Observação 1.36 *A curvatura seccional de σ não depende dos vetores X e Y .*

Definição 1.37 *Considere uma variedade Riemanniana M e seja $p \in M$. Dizemos que M é completa se uma das seguintes afirmações equivalentes é satisfeita:*

- (i) *M é completa como espaço métrico.*
- (ii) *Os limitados e fechados de M são compactos.*
- (iii) *Existe uma sucessão de compactos de $K_n \subset M, K_n \subset K_{n+1}$ e $\cup K_n = M$, tais que se $q_n \notin K_n$, então a distância entre p e q_n tende a infinito.*
- (iv) *O comprimento de uma curva divergente é infinito.*

Teorema 1.38 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa de curvatura seccional constante c . Então M é isométrica a:*

- (i) \mathbb{R}^n se $c = 0$.
- (ii) \mathbb{S}^n se $c = 1$.

(iii) \mathbb{H}^n se $c = -1$.

A seguir, introduzimos alguns fatos sobre hipersuperfícies nas formas espaciais.

Teorema 1.39 *Uma hipersuperfície totalmente umbílica de um espaço com curvatura seccional constante tem curvatura média constante.*

Teorema 1.40 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão totalmente geodésica. Então, $f(M)$ é um aberto contido em um hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} . Se f é totalmente umbílica, mas não totalmente geodésica, então $f(M)$ é um aberto contido em uma hiperesfera de \mathbb{R}^{n+1} .*

Teorema 1.41 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão totalmente geodésica. Então, $f(M)$ é um aberto contido em $\mathbb{S}^{n+1} \cap F$, onde F é um hiperplano de \mathbb{R}^{n+2} passando pela origem. Se f é totalmente umbílica, mas não totalmente geodésica, então $f(M)$ é um aberto contido em $\mathbb{S}^{n+1} \cap F$, onde F é um hiperplano afim de \mathbb{R}^{n+2} .*