3
Esquema de pré-distorção

O objetivo do presente trabalho, conforme foi exposto anteriormente, é a redução dos efeitos causados pelos produtos de intermodulação gerados pela não-linearidade. Para atingir este objetivo, propõe-se a inserção de um circuito sistema de pré-distorção, conforme ilustrado na Figura 3.1.

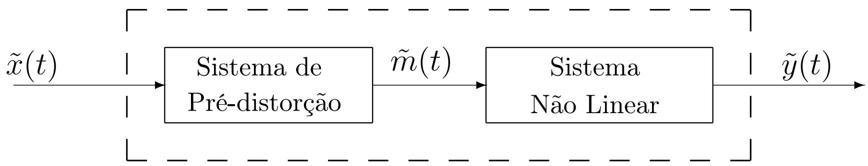

Figura 3.1: Diagrama geral do sistema composto, o sistema de pré-distorção e o sistema não linear.

Considera-se aqui, que o sistema não linear tem memória e é adequadamente modelado conforme ilustrado no diagrama da Figura 3.2.

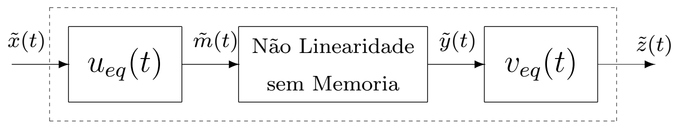

Figura 3.2: Diagrama de blocos de um dispositivo não-linear com memória

Assim, o diagrama da Figura 3.1 pode ser detalhado conforme apresentado na Figura 3.3, onde o sistema de pré-distorção é constituído de uma não-linearidade sem memória seguido de um filtro linear.

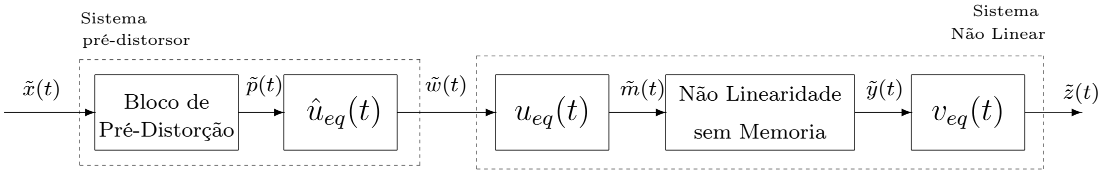

Figura 3.3: Diagrama geral do sistema de pré-distorção com o sistema não linear

Conforme já mencionamos a não-linearidade do sistema de pré-distorção da Figura 3.3, tem um esquema descrito através de uma relação análoga a (2-5), ou seja

$$\tilde{p}(t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{2\ell+1} \tilde{x}^{\ell+1}(t) \tilde{x}^{*^{\ell}}(t)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{2\ell+1} \left|\tilde{x}(t)\right|^{2\ell} \tilde{x}(t) \qquad (3\text{-}1)$$

De modo a facilitar o desenvolvimento. Considera-se, idealmente, que o filtro $u_{eq}(t)$ é o inverso do filtro $\hat{u}_{eq}(t)$, ou seja,

$$\hat{u}_{eq}(t) * u_{eq}(t) = \delta(t) \qquad (3\text{-}2)$$

e conseqüentemente

$$\tilde{m}(t) = \tilde{p}(t) * \hat{u}_{eq}(t) * u_{eq}(t)$$
$$= \tilde{p}(t) * \delta(t)$$
$$= \tilde{p}(t) \qquad (3\text{-}3)$$

Então, considerando a relação (3-3), vai-se obter o esquema apresentado na Figura 3.4, o qual vai ser o diagrama de referência de trabalho para fazer o analises entre as envoltórias complexas $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$.

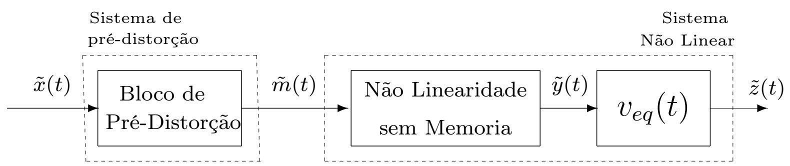

Figura 3.4: Diagrama do sistema de pré-distorção e o sistema não linear

A continuação, considere-se o diagrama de blocos de um dispositivo não linear sem memória descrito na Figura 2.3 dentro do diagrama da Figura 3.4 para obter um diagrama de referência mais detalhado, (Veja-se a Figura 3.5).

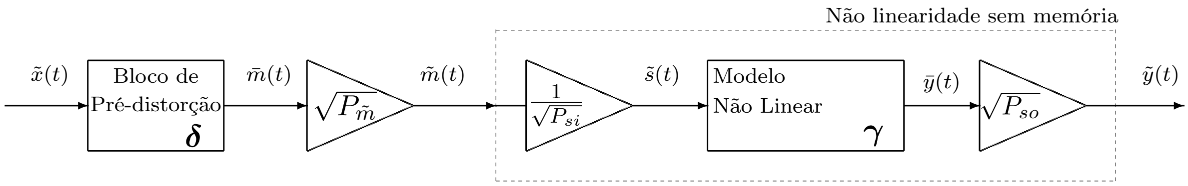

Figura 3.5: Diagrama do sistema de pré-distorção e o sistema não linear detalhado

considerando a equação descrita em (2-8), a relação entre a envoltória complexa normalizada $\bar{m}(t)$ e a envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ vai-se definir como

$$\tilde{s}(t) = \sqrt{2\ b_{in}}\ \bar{m}(t) \tag{3-4}$$

Conhecida a relação (3-4), o diagrama de referência respeito ao qual se vão desenvolver as relações entre $\tilde{x}(t)$ e $\bar{y}(t)$ é apresentado na Figura 3.6. Nesta Figura, refere-se ao combinado sistema de pré-distorção/sistema não-linear chamado *sistema composto*

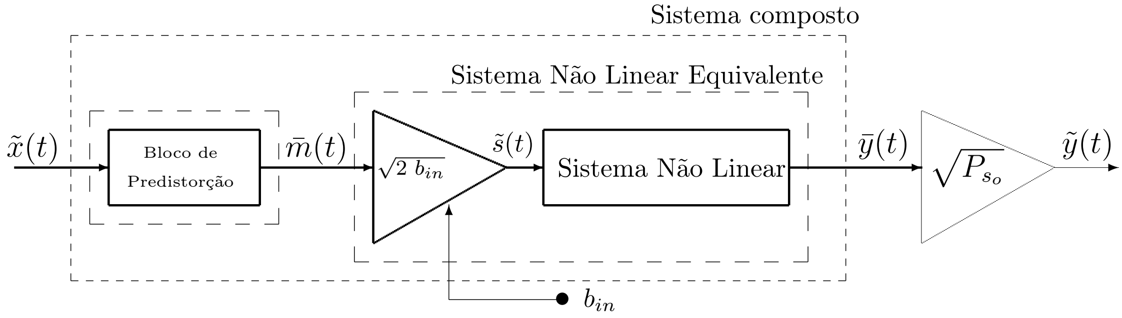

Figura 3.6: Diagrama do *sistema composto* com parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$, composto pelo sistema de pré-distorção com parâmetro $\boldsymbol{\delta}$ e o sistema não linear equivalente com parâmetro $\boldsymbol{\gamma}'$.

Da Figura 3.6, é importante ressaltar que se vai considerar um novo bloco chamado *Sistema não linear equivalente* o qual vai estar modelado, como os casos anteriores, pela relação descrita em (2-5), isto para facilitar a determinação dos parâmetros do sistema chamado: *sistema composto* na sub-seção seguinte.

3.1 Caracterização do sistema composto

Nesta sub-secção procura-se determinar a relação entre o parâmetro vetorial $\boldsymbol{\alpha}$ do *sistema composto* em função do parâmetro vetorial $\boldsymbol{\delta}$ do sistema de pré-distorção e do parâmetro vetorial $\boldsymbol{\gamma}'$ do sistema não linear equivalente. É importante ressaltar que, para facilitar a utilização do modelo desenvolvido em [13, 14], vai-se utilizar como referência do *sistema composto* o diagrama descrito na Figura 3.6.

3.1.1 Sistema não Linear equivalente

O diagrama do sistema não linear equivalente é mostrado na Figura 3.7, o sinal $\bar{m}(t)$ é a entrada deste sistema, este sinal vai ter sempre potência média

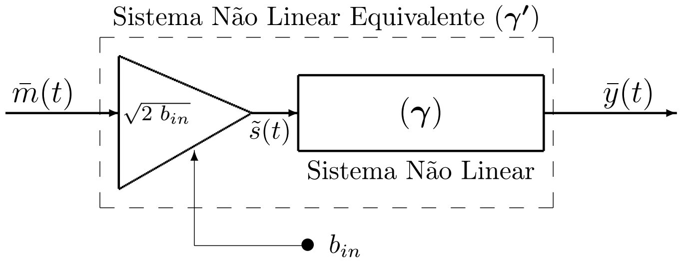

Figura 3.7: Sistema Não Linear Equivalente

igual a um, por tratar-se de uma envoltória complexa normalizada, ou seja

$$P_{\bar{m}(t)} = 1 \tag{3-5}$$

Na mesma figura, é fácil distinguir a relação entre os parâmetros $\boldsymbol{\gamma'}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ tendo, como referência a relação descrita em (2-5), assim

$$\gamma'_{2\ell+1} = \gamma_{2\ell+1} \left(\sqrt{2\ b_{in}}\right)^{2\ell+1} \tag{3-6}$$

considerando a relação (3-6), mostra-se um diagrama mais compacto do sistema não linear equivalente na Figura 3.8

Figura 3.8: Sistema Não Linear Equivalente com seus respectivos sinais de entrada e saída

então o relacionamento entre $\bar{m}(t)$ e $\bar{y}(t)$ vai ser descrito por:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma'_{2\ell+1}\ \bar{m}^{\ell+1}(t)\ \bar{m}^{*^{\ell}}(t) \\ &= \bar{m}(t) \sum_{\ell=0}^{\infty} \gamma'_{2\ell+1} \left(|\bar{m}(t)|^2\right)^{\ell} \end{aligned} \tag{3-7}$$

note que a relação (3-7) pode ainda ser escrita deforma mais compacta como

$$\bar{y}(t) = \bar{m}(t)\ \boldsymbol{\gamma'}^T \boldsymbol{M} \tag{3-8}$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma'} = \begin{pmatrix} \gamma'_1 & \gamma'_3 & \gamma'_5 & \cdots \end{pmatrix}^T \tag{3-9}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & (|\bar{m}(t)|^2) & (|\bar{m}(t)|^2)^2 & (|\bar{m}(t)|^2)^3 & \cdots \end{pmatrix}^T \tag{3-10}$$

A equação (3-8) é a expressão vetorial entre a sinal $\bar{m}(t)$ e $\bar{y}(t)$.

3.1.2
Sistema de pré-distorção

A partir do diagrama exposto na Figura 3.6, considera-se o bloco de pré-distorção apresentado na Figura 3.9, caracterizado pelo parâmetro $\boldsymbol{\delta}$.

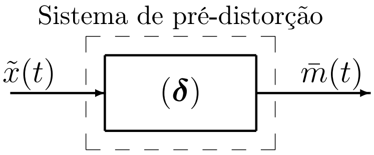

Figura 3.9: Sistema de pré-distorção com parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$

Sendo o sistema de pré-distorção um sistema não linear sem memória então é valido utilizar a relação descrita em (2-5) considerando que o sinal $\tilde{x}(t)$ é a entrada do sistema de pré-distorção e o sinal $\bar{m}(t)$ é a saída do mesmo sistema. É importante lembrar que a potência media da sinal $\bar{m}(t)$ terá que ser sempre igual a um.

Considerando o anteriormente exposto, tem-se as seguintes relações a partir do sistema de pré-distorção.

$$\begin{aligned} \bar{m}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{2\ell+1}\ \tilde{x}^{\ell+1}(t)\ \tilde{x}^{*^{\ell}}(t) \\ &= \tilde{x}(t) \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{2\ell+1} \left(|\tilde{x}(t)|^2\right)^{\ell} \end{aligned} \tag{3-11}$$

A relação (3-11) pode ainda ser escrita de forma mais compacta como

$$\bar{m}(t) = \tilde{x}(t)\ \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{X} \tag{3-12}$$

onde

$$\boldsymbol{\delta}^T = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_3 & \delta_5 & \cdots \end{pmatrix} \tag{3-13}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & (|\tilde{x}(t)|^2) & (|\tilde{x}(t)|^2)^2 & (|\tilde{x}(t)|^2)^3 & \cdots \end{pmatrix}^T \tag{3-14}$$

A equação (3-12) é a expressão vetorial entre a envoltória complexa $\tilde{x}(t)$ e a envoltória complexa normalizada $\bar{m}(t)$.

3.1.3 Sistema Composto

Na Figura 3.10, mostra-se o diagrama do *sistema composto*. Considerando que o sistema não linear e o sistema de pré-distorção estão modelados por relações polinomiais como a descrita em (2-5), então o *sistema composto* também vai ser gerado a partir de uma relação polinomial que vai ser descrita também pela relação (2-5), neste caso com parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$.

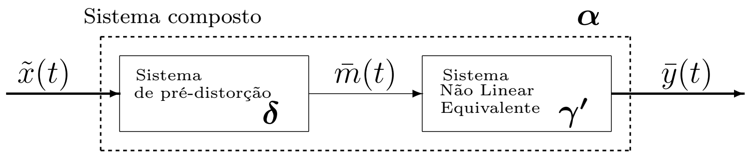

Figura 3.10: Sistema geral do sistema composto

Sabendo que o *sistema composto* é, como nos casos anteriores, um sistema não linear sem memória, a relação entre os sinais $\bar{y}(t)$ e $\tilde{x}(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{2\ell+1}\ \tilde{x}^{\ell+1}(t)\ \tilde{x}^{*^{\ell}}(t) \\ &= \tilde{x}(t) \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_{2\ell+1} \left(|\tilde{x}(t)|^2\right)^{\ell}\end{aligned} \tag{3-15}$$

a relação (3-15) pode ser descrita de uma forma mais compacta, assim

$$\bar{y}(t) = \tilde{x}(t)\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{X} \tag{3-16}$$

onde

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \cdots\end{pmatrix} \tag{3-17}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix}1 & (|\tilde{x}(t)|^2) & (|\tilde{x}(t)|^2)^2 & (|\tilde{x}(t)|^2)^3 & \cdots\end{pmatrix}^T \tag{3-18}$$

Obtidas as relações a partir do sistema não linear equivalente, o sistema de pré-distorção, e o *sistema composto*, vai-se proceder a relacionar as equações descritas em (3-8), (3-12), e (3-16) respeito ao diagrama da Figura 3.10. Antes é importante considerar algumas relações prévias como a equação (3-12), a partir da qual pode-se derivar o seguinte

$$
\begin{aligned}
|\bar{m}(t)|^2 &= \bar{m}(t)\ \bar{m}^*(t) \\
&= [\tilde{x}(t)\ \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}]\ [\tilde{x}(t)\ \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}]^* \\
&= |\tilde{x}(t)|^2\ |\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2
\end{aligned} \tag{3-19}
$$

generalizando para qualquer valor de ℓ, tem-se

$$
\left(|\bar{m}(t)|^2\right)^\ell = \left(|\tilde{x}(t)|^2\right)^\ell\ \left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right)^\ell \tag{3-20}
$$

considerando a equação (3-20) e substituindo a expressão (3-12) na equação (3-8), temos que

$$
\begin{aligned}
\bar{y}(t) &= \bar{m}(t)\sum_{\ell=0}^{\infty}\ \gamma'_{2\ell+1}\left(|\bar{m}(t)|^2\right)^\ell \\
&= \tilde{x}(t)\ \left(\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\gamma'_{2\ell+1}\left(|\tilde{x}(t)|^2\right)^\ell\left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right)^\ell
\end{aligned} \tag{3-21}
$$

a partir da relação (3-21) se vai considerar que

$$
\boldsymbol{\gamma'} = \begin{pmatrix}\gamma'_1 & \gamma'_3 & \gamma'_5\cdots\end{pmatrix}^T
$$

$$
\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix}
1 \\
(|\tilde{x}(t)|^2)\ \left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right) \\
(|\tilde{x}(t)|^2)^2\ \left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right)^2 \\
(|\tilde{x}(t)|^2)^3\ \left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right)^3 \\
\vdots
\end{pmatrix} \tag{3-22}
$$

então uma forma mais compacta da relação (3-21) é

$$
\bar{y}(t) = \tilde{x}(t)\ \left\{\left(\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}\right)\boldsymbol{\gamma}'^T\boldsymbol{R}\right\} \tag{3-23}
$$

Considerando que as relações (3-16) e (3-23) são exatamente iguais, pode-se afirmar que

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^T\ \boldsymbol{X} &= \underbrace{\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}}\ \underbrace{\boldsymbol{\gamma}'^T\boldsymbol{R}} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\delta_{2i+1}|\tilde{x}(t)|^{2i}\ \sum_{j=0}^{\infty}\gamma'_{2j+1}\ |\tilde{x}(t)|^{2j}\ \left(|\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{X}|^2\right)^j \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\delta_{2i+1}|\tilde{x}(t)|^{2i}\ \sum_{j=0}^{\infty}\gamma'_{2j+1}\ |\tilde{x}(t)|^{2j}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\delta_{2k+1}\ \delta^*_{2\ell+1}\ |\tilde{x}(t)|^{2k}\ |\tilde{x}(t)|^{2\ell}\right)^j \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\delta_{2i+1}|\tilde{x}(t)|^{2i}\ \sum_{j=0}^{\infty}\gamma'_{2j+1}\ \left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\delta_{2k+1}\ \delta^*_{2\ell+1}\ |\tilde{x}(t)|^{2k+2\ell+2}\right)^j
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}24)
$$

Observe que se o número de parâmetros $\boldsymbol{\gamma'}$ e o número de parâmetros $\boldsymbol{\delta}$ são finitos e respectivamente iguais a $N_{\gamma'}$ e N_δ, o grau do polinomio descrito por (3-24) é determinado pela seguinte relação

$$N_\alpha = (2\ N_{\boldsymbol{\delta}}\ +\ 1)\ N_{\gamma'}\ +\ N_{\boldsymbol{\delta}} \qquad (3\text{-}25)$$

observe que seria ideal que se pudesse definir valores dos parâmetros $\boldsymbol{\delta}$ tais que parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ correspondessem a um *sistema composto* linear, ou seja $\alpha_0 = 1,\ \alpha_i = 0\quad i \neq 0$. Entretanto, o sistema de equações a ser resolvido, dado por (3-24) não possui solução exata uma vez que o número de equações não lineares $N_{\boldsymbol{\alpha}}$ é usualmente bem maior do que o número de incógnitas $N_{\boldsymbol{\delta}}$. O presente trabalho incluiu o desenvolvimento de um método computacional para obter expressões que relacionam analiticamente, os parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$ aos parâmetros $\boldsymbol{\gamma'}$ e $\boldsymbol{\delta}$. Os resultados deste método computacional são apresentados no apêndice A para o caso particular no qual os parâmetros $\boldsymbol{\delta}$ e $\boldsymbol{\gamma'}$ tem 4 elementos respectivamente.

3.2
Intermodulação produzida pelo Sistema Composto

Determinado o parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$ do *sistema composto* em função dos parâmetros $\boldsymbol{\gamma'}$ e $\boldsymbol{\delta}$ que são parâmetros do sistema não linear equivalente e o sistema de pré-distorção respectivamente, e considerando que o *sistema composto* é também um sistema não linear sem memória modelado matematicamente pela relação (2-5), vai-se utilizar os resultados descritos no Capítulo 2 para obter a autocorrelação da sinal de saída $\bar{y}(t)$ do diagrama descrito na Figura 3.11 quando é aplicado um sinal cuja envoltória complexa é $\tilde{x}(t)$. Considerando-se que o *sistema composto* não está constituído por potências de saturação de entrada (P_{s_o}) e tampouco por potências de saturação de saída (P_{s_i}), então elas vão ter o valor de 1.

Figura 3.11: Diagrama do *sistema composto* com parâmetro $\boldsymbol{\alpha}$

assim, obtém-se, a partir de (2-6) o seguinte

$$R_{\bar{y}}(\tau) \;\; = \;\; P_{\tilde{x}} \; \bar{R}_{\tilde{x}}(\tau) \; \sum_{\ell=0}^{\infty} \left| \bar{R}_{\tilde{x}}(\tau) \right|^{2\ell} \; \left| \mathbf{a}_\ell^T \mathbf{g}_\alpha \right|^2 \tag{3-26}$$

onde

$$\bar{R}_{\tilde{x}}(\tau) = \frac{R_{\tilde{x}}(\tau)}{P_{\tilde{x}}} = \frac{\mathbb{E}\left[\tilde{x}(t_1)\tilde{x}^*(t_2)\right]}{\mathbb{E}\left[|\tilde{x}(t)|^2\right]} \tag{3-27}$$

e

$$\mathbf{g}_\alpha = \begin{pmatrix} (P_{\tilde{x}})^0 \; \alpha_1 \\ (P_{\tilde{x}})^1 \; \alpha_3 \\ (P_{\tilde{x}})^2 \; \alpha_5 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3-28}$$

Ainda em (3-26), os vetores $\mathbf{a}_\ell$ são dados por

$$\mathbf{a}_\ell = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{0\ell} \\ \bar{\sigma}_{1\ell} \\ \bar{\sigma}_{2\ell} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3-29}$$

com

$$\bar{\sigma}_{i\ell} = \begin{cases} \sigma_{i\ell} & ; \; i \geq \ell \\ 0 & ; \; i < \ell \end{cases} \tag{3-30}$$

onde σ_ℓ é definido por

$$\sigma_{i\ell} = \frac{1}{\sqrt{\ell+1}} \, \frac{(i+1)! \;\; i!}{(i-\ell)! \;\; \ell!} \tag{3-31}$$

É importante ressaltar que (3-26) indica que: Se $\tilde{x}(t)$ é estacionário no sentido amplo, $\bar{y}(t)$ é também estacionário no sentido amplo. Neste caso $R_{\bar{y}}(\tau)$ é função da diferença $\tau = t_2 - t_1$ e a sua Transformada de Fourier correspondente à

Densidade Espectral de Potência de $\bar{y}(t)$, o qual é dado por

$$S_{\bar{y}}(f) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \, \bar{S}_\ell(f) \tag{3-32}$$

onde

$$B_\ell = P_{\tilde{x}} \left| \mathbf{a}_\ell^T \mathbf{g}_\alpha \right|^2 \tag{3-33}$$

$$= h_\ell \left(\boldsymbol{\delta}, P_{\tilde{x}} \right) \tag{3-34}$$

e

$$\bar{S}_\ell(f) = \mathcal{F} \left[\bar{R}_{\tilde{x}}(\tau) \left| \bar{R}_{\tilde{x}}(\tau) \right|^{2\ell} \right] \tag{3-35}$$

Note que as funções $\bar{S}_\ell(f)$ em (3-35) são determinadas através da convolução das Densidades Espectrais de Potências normalizadas de $\tilde{x}(t)$, ou seja,

$$\bar{S}_\ell(f) = \underbrace{\bar{S}_{\tilde{x}}(f) * \ldots * \bar{S}_{\tilde{x}}(f)}_{\ell+1} * \underbrace{\bar{S}_{\tilde{x}}(-f) * \ldots * \bar{S}_{\tilde{x}}(-f)}_{\ell} \tag{3-36}$$

onde $\bar{S}_{\tilde{x}(f)}$ é dada por (B-24).

A relação (3-34) ressalta o fato de que B_ℓ depende de $\boldsymbol{\delta}$ e $P_{\tilde{x}}$ como consequência de (3-28). Também é importante notar que no somatório em (3-32), o ℓ-ésimo termino corresponde à Densidade Espectral de Potência associada aos produtos de intermodulação de ordem $2\ell + 1$ do *sistema composto*. A parcela correspondente a $\ell = 0$ representa a Densidade Espectral de Potência do sinal desejado também do *sistema composto*.

Se normalizamos a Densidade Espectral de Potência dado em (3-32) para que a potência média da envoltória complexa do sinal desejado na saída do *sistema composto* seja unitária, resultando

$$\bar{S}_{\bar{y}}(f) = \frac{S_{\bar{y}}(f)}{B_0} = \bar{S}_{\tilde{x}}(f) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{B_\ell}{B_0} \bar{S}_\ell(f) \tag{3-37}$$