

5 Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo

5.1 Introdução

Um método desenvolvido por "*Longstaff Schwartz*" (2001) permite estimar o valor de continuação da opção americana usando uma regressão "*cross-section*" que utiliza os mínimos quadrados. Esse método é conhecido como "*Least Squares Monte Carlo*".

Opções americanas são mais flexíveis que as européias. **Uma opção americana pode ser exercida em qualquer tempo antes do vencimento da opção**, se tornando mais valiosa que a européia. Procedendo *backwards*, em cada tempo antes da expiração, podemos exercer a opção. Mas qual é a regra de decisão ótima? Para sabê-la devemos avaliar em cada tempo duas coisas:

- O valor do exercício imediato
- O valor de espera, ou seja, o valor de continuação.

Assim, comparando os dois valores, podemos escolher qual é a decisão ótima. Se o valor de exercício imediato for maior que o valor de continuação estimado, a opção deveria ser exercida. Se for o caso de esperar, deveríamos avaliar esses valores de novo num tempo anterior.

Na simulação, a avaliação da opção é feita do final para o início. Praticamente, os preços no período inteiro e em cada data de exercício são simulados. Analisando *backwards* do vencimento até o início do período, podemos em cada momento tomar a decisão ótima.

A velocidade de convergência desse método depende de vários parâmetros: a função usada para realizar a regressão e achar o valor de continuação, ou a seleção dos caminhos usados na regressão por exemplo.

Através de um exemplo simples podemos ver o funcionamento desse método e os melhoramentos que foram implementados no programa computacional.

5.2 Apreçamento das opções americanas

O problema quando queremos avaliar uma opção americana é que essa opção pode ser exercida em todos os momentos até o vencimento. De fato devemos decidir em cada momento se a opção é exercida ou não.

Podemos agora ver que a precisão do cálculo depende do número de datas simuladas para cada caminho. Para simular eficientemente a propriedade da opção americana a ser exercida em qualquer momento, devemos ter o valor do ativo em cada momento. Mas numericamente no computador, o processo no tempo contínuo deve ser discretizado. Então, quanto menor for o intervalo de discretização, maior será a precisão do cálculo da opção americana.

Para tomar a decisão ótima no tempo "t-1", o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo usa uma regressão dos payoffs da opção do período "t" descontados no período "t-1", sobre os preços do período "t-1".

5.3 Exemplo numérico dos "Mínimos Quadrados"

No exemplo consideramos uma opção de compra (uma call). O ativo objeto não paga dividendos e tem as seguintes características:

Preço do ativo no início	$S=10$
Strike da opção	$k=10.5$
Tempo à expiração (ano)	$T=1$
Taxa livre de risco	$r=5\%$
Volatilidade do ativo	$v=20\%$
Dividend Yield	$y=0$

Para entender o funcionamento desse método, o tempo de 1 ano da opção será dividido em 3 períodos, sejam cada 4 meses. 3 é o número de datas de exercício simuladas no período total. Os preços são simulados usando o mesmo método que no capítulo 3 usando um movimento geométrico browniano escrito na medida de Martingale. Simulando 10 caminhos:

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	Payoff em t = 3
1	10	8,2452	7,7990	8,1615	0
2	10	9,5905	7,6580	8,4797	0
3	10	10,4917	9,3992	7,6605	0
4	10	9,7570	10,4250	10,3200	0
5	10	11,4015	11,3580	10,6652	0,1652
6	10	12,3116	13,2126	12,8167	2,3167
7	10	10,5845	13,4559	12,3357	1,8357
8	10	10,6203	10,9632	13,6547	3,1547
9	10	10,4040	9,4321	10,1360	0
10	10	8,9034	9,0725	9,8078	0

Tabela 9 – Tabela dos preços do ativo nos 3 períodos – Payoff no tempo 3

Tempo 3

A análise da decisão ótima começa no tempo final. Dependendo do valor do ativo, temos na última coluna o payoff da opção de compra com valor de preço de exercício de 10.5.

Tempo 2

Agora devemos saber no tempo 2 se o exercício da opção é ótimo. O exercício somente ocorre quando a opção está "*in-the-money*" no tempo 2, e que o valor imediato é maior que o valor de esperar.

Os caminhos "in-the-money" ITM, no momento 2 são os "5-8":

Caminho	t = 0	t = 1	t = 2	Exercício imediato t = 2
1	10	8,2452	7,7990	0
2	10	9,5905	7,6580	0
3	10	10,4917	9,3992	0
4	10	9,7570	10,4250	0
5	10	11,4015	11,3580	0,8580
6	10	12,3116	13,2126	2,7126
7	10	10,5845	13,4559	2,9559
8	10	10,6203	10,9632	0,4632
9	10	10,4040	9,4321	0
10	10	8,9034	9,0725	0

Tabela 10 – Caminhos "in-the-money" e exercício imediato no tempo 2

Para cada caminho ITM temos que calcular o valor de continuação. Só os valores dos caminhos ITM são selecionados para calcular os valores de continuação e achar os parâmetros da regressão.

- X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 2.
- Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3) descontado ao período presente, se a opção não for exercida.

O desconto é de $e^{-0.05*(1/3)}$ e é feito sobre um terço do ano.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0,1652 \times e^{-0.05*(1/3)}$	11,3580
$2,3167 \times e^{-0.05*(1/3)}$	13,2126
$1,8357 \times e^{-0.05*(1/3)}$	13,4559
$3,1547 \times e^{-0.05*(1/3)}$	10,9632
-	-
-	-

Tabela 11 – Vetores da primeira regressão no tempo 2

O valor de continuação é estimado por meio de uma regressão do vetor Y sobre uma constante, o vetor X e X^2 da seguinte forma: $E[Y/X] = a.X^2 + b.X + c$ (O segundo grau foi usado aqui para simplificar o exemplo, mas qualquer grau maior pode ser usado). Usando o método dos Mínimos Quadrados de Monte-Carlo, e os dados acima para estimar os parâmetros "a,b,c":

$$E[Y/X] = 2,2474.X^2 - 54,9253.X + 334,7113$$

E finalmente os valores de continuação são calculados com a fórmula acima e o vetor X :

$E[Y/X]$	Exercício imediato $t = 2$	Decisão ótima
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,7854	0,8580	<i>Exercer</i>
1,3354	2,7126	<i>Exercer</i>
2,5577	2,9559	<i>Exercer</i>
2,6703	0,4632	<i>Esperar</i>
-	-	-
-	-	-

Tabela 12 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 2

Os valores do payoff da opção no tempo 2 são:

Payoff em $t = 2$
0
0
0
0
0,8580
2,7126
2,9559
$3,1547 \times e^{-0,05 \cdot (1/3)}$
0
0

Tabela 13 – Payoff da opção no tempo 2

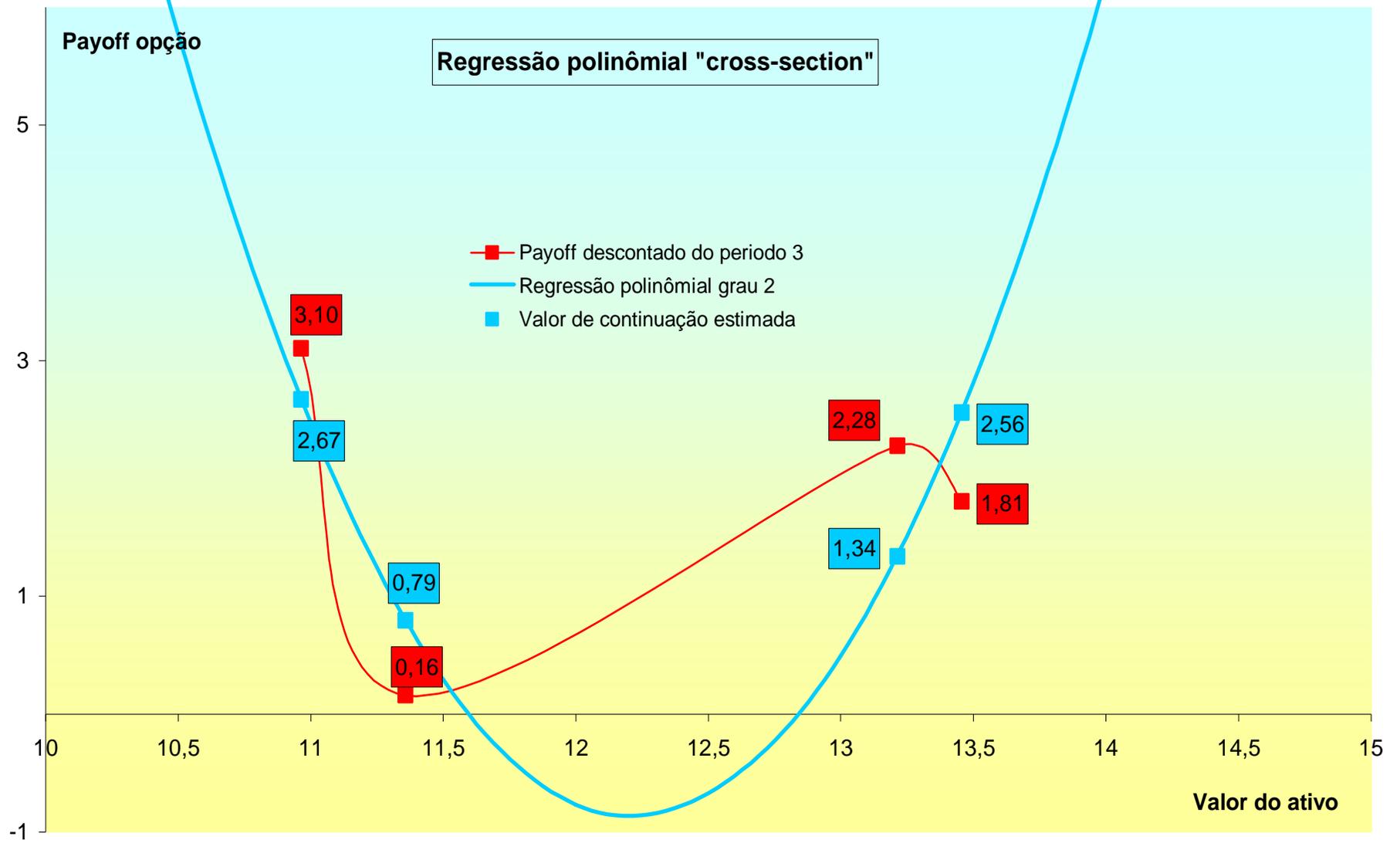


Figura 7 – Regressão polinomial no tempo 2

Tempo 1

Da mesma forma devemos escolher os caminhos ITM no momento 1 para realizar o cálculo dos valores estimados.

Caminho	t = 0	t = 1	Exercício imediato t = 1
1	10	8,2452	0
2	10	9,5905	0
3	10	10,4917	0
4	10	9,7570	0
5	10	11,4015	0,9015
6	10	12,3116	1,8116
7	10	10,5845	0,0845
8	10	10,6203	0,6203
9	10	10,4040	0
10	10	8,9034	0

Tabela 14 – Caminhos “*in-the-money*” e exercício imediato no tempo 1

X representa o vetor dos preços do título no momento do estudo, ou seja, no período 1.

Y representa o vetor dos valores do payoff futuro (período 3 e 2) descontado ao período presente, se a opção não for exercida. O desconto de $e^{-0.05*(1/3)}$ é feito sobre um terço do ano, e de $e^{-0.05*(2/3)}$ para o caminho 8, porque o valor deve ser descontado sobre 2 períodos consecutivos.

Y	X
-	-
-	-
-	-
-	-
$0,8580 \times e^{-0.05*(1/3)}$	11,4015
$2,7126 \times e^{-0.05*(1/3)}$	12,3116
$2,9559 \times e^{-0.05*(1/3)}$	10,5845
$3,15457 \times e^{-0.05*(2/3)}$	10,6203
-	-
-	-

Tabela 15 – Vetores da segunda regressão no tempo 1

Realizando de novo a estimação do valor de Y esperado $E[Y/X]$ para uma regressão polinomial de grau 2:

$$E[Y/X] = 2,6911.X^2 - 61,8534.X + 356,2609$$

Com os seguintes resultados:

$E[Y/X]$	Exercício imediato t = 1	Decisão ótima
-	-	-
-	-	-
-	-	-
-	-	-
0,8567	0,9015	<i>Exercer</i>
2,6650	1,8116	<i>Esperar</i>
3,0586	0,0845	<i>Esperar</i>
2,8895	0,6203	<i>Esperar</i>
-	-	-
-	-	-

Tabela 16 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação. Decisão ótima no tempo 1

Os valores do payoff da opção no tempo 1, e o instante de exercício são:

Payoff a t = 1	Período de exercício
0	-
0	-
0	-
0	-
0,9015	1
$2,7126 \times e^{-0.05 \cdot (1/3)}$	2
$2,9559 \times e^{-0.05 \cdot (1/3)}$	2
$3,1547 \times e^{-0.05 \cdot (2/3)}$	3
0	-
0	-

Tabela 17 – Payoff da opção no tempo 1

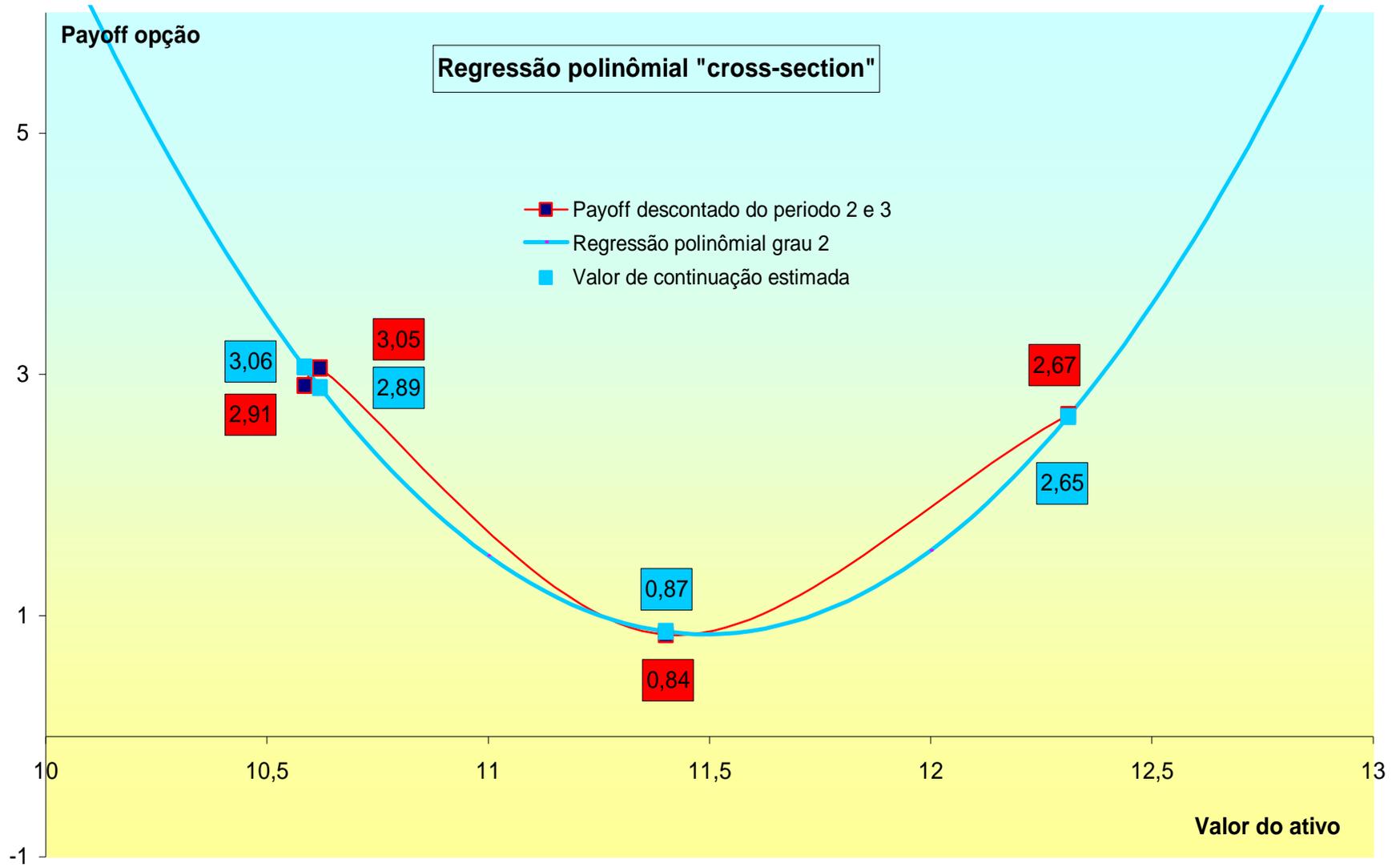


Figura 8 – Regressão polinomial no tempo I

Finalmente podemos obter o valor da opção descontando os valores dos payoff para cada caminho até o instante 0 e calcular a média sobre todos os caminhos simulados. Nesse exemplo, calculando a média dos valores dos payoffs da tabela 16:

$$\text{ValorCall} = 2,3425$$

Para uma opção americana, a precisão desse método depende do número de datas de exercício simulado, para simular eficientemente a possibilidade de exercer uma opção americana no qualquer momento. O número de caminhos simulados, como em cada simulação de Monte-Carlo, entra em consideração.

5.4 Análise de sensibilidade

O uso das funções polinomiais é muito intuitivo para aproximar com precisão uma função *a priori* não conhecida. Podemos entender que um grau muito grande no polinômio aumenta o tempo de cálculo e a precisão da aproximação. Os números manipulados são do tamanho 100^j com j sendo o grau escolhido. O melhor compromisso, no conjunto precisão-tempo computacional, é obtido com os graus entre 3 e 5.

Para conferir os valores numéricos, uma call sem dividendos será usada. Sabemos que uma opção de compra americana sem dividendos tem o mesmo valor que uma opção de compra européia, porque nunca é ótimo o seu exercício antecipado. Ao contrário, o valor da opção de venda americana sem dividendos é maior que a opção de venda européia.

Usando a definição da opção (call) e do título objeto seguinte e com os parâmetros padrões:

Preço do ativo no início	S=100
Strike da opção	k=105
Tempo à expiração (ano)	T=1
Taxa livre de risco	r=5%
Volatilidade do ativo	v=20%
Dividend Yield	y=0
Número de datas de exercício	m=100
Grau polinomial	g=2

5.4.1 Análise de sensibilidade no grau polinomial

O ano de exercício da opção foi dividido em 50 datas diferentes de exercício para o cálculo. A média e o desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Call Grau polinomial	Número de simulações Número de datas de exercício	10	100	1000	2000	5000
		10	50	50	50	50
2	μ	9,9365	8,5305	8,0952	8,0264	8,0121
	σ	3,0217	0,6224	0,3667	0,2761	0,1266
3	μ	10,5401	9,2395	7,9133	7,9442	7,9845
	σ	2,4399	0,9143	0,2541	0,1223	0,0767
4	μ	9,8056	8,8637	8,2256	8,0576	8,0098
	σ	2,2185	1,0053	0,2519	0,1228	0,0643
5	μ	10,8438	9,2781	8,0201	7,9595	8,0078
	σ	2,3660	0,5943	0,2522	0,1365	0,0621

Tabela 18 – Valores das opções – Sensibilidade em grau polinomial

Geralmente, o desvio-padrão cai com o aumento do grau polinomial da regressão. Uma regressão polinomial com alto grau aumenta a precisão do cálculo do valor da opção, mas aumenta também o tempo computacional.

No retângulo marcado foi encontrado problemas de aproximação no cálculo. Esses parâmetros para a simulação não permitem uma regressão precisa, as matrizes são quase singulares (números aproximados da ordem 10^{-6}). O grau 2 pode ser usado assim como o grau 3, sem problemas de aproximação nem grande tempo computacional. O grau 2 será usado nos outros cálculos, seguindo ao método original de "Longstaff Schwartz" (2001).

O preço da opção de compra americana obtida pelo método binomial é de 0,80207, e da opção de compra europeia sem dividendos (do mesmo valor) dado pela fórmula de *Black-Scholes* é de 0,80213, a comparar com os resultados da tabela acima.

5.4.2 Análise de sensibilidade no número de simulações

O ano foi dividido em 100 datas de exercício, ou seja, um valor do ativo simulado a cada 3 dias aproximadamente.

A média e desvio-padrão são calculados sobre 10 valores calculados pelo programa computacional:

Número de simulações	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
500	7,9957	0,5607	8,8880	0,2495
1000	8,1697	0,3114	8,8533	0,1817
5000	7,9348	0,1859	8,7373	0,0796
10000	7,9865	0,0455	8,7354	0,0332
20000	8,0187	0,0104	8,7397	0,0123

Tabela 19 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações

Com 100 datas de exercícios simuladas, a discretização escolhida permite aproximar com precisão a característica da opção americana de ser exercida em qualquer momento. Assim, em média, o valor calculado fica próximo do valor real.

Aumentando o número de simulações, o desvio-padrão cai, tornando a simulação mais precisa, até encontrar o valor teórico com 20 000 simulações. Usando um computador com grande capacidade de cálculo, esse algoritmo pode ser usado com 50000 simulações e 365 datas de exercícios proporcionando um resultado muito preciso.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.4.

5.4.3 Análise de sensibilidade no número de datas de exercício

Efetuada 5000 simulações para conservar a precisão do cálculo, podemos estudar a convergência da simulação com o número de datas de exercício variando de 10 a 150. A média e desvio-padrão são estimados sobre 10 valores calculados pelo programa:

Número de datas de exercício	Opção de compra		Opção de venda	
	μ	σ	μ	σ
10	7,3912	0,1946	8,5059	0,0648
20	7,7398	0,1552	8,6237	0,0319
50	7,9418	0,1623	8,6936	0,0698
100	7,9855	0,1476	8,7022	0,0556
150	8,0254	0,1245	8,7276	0,0678

Tabela 20 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de datas de exercício simuladas

Variando somente o número de datas de exercício, podemos ver a convergência da simulação para o valor teórico da opção americana. Usando um número de datas de exercício baixo, 10 e 20, os valores da opção de compra e de venda são subestimados. A característica da opção de poder ser exercida em qualquer momento é mal simulada. Logo, a opção assim simulada se torna menos valiosa. Aumentando esse número, a simulação se aproxima em média do valor real da opção americana, o exercício antecipado é simulado de uma forma mais próxima da realidade.

Os parâmetros básicos que funcionam sem aproximação de cálculo e que realizam uma boa estimativa do valor da opção são: "10000 simulações, 150 datas de exercícios, grau 2" para $T=1$, seja um ano. Quanto maior for o número de simulações e o número de datas de exercício, maior será a precisão do resultado.

O gráfico pode ser visto no anexo 3.5.