

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Pierre Alexandre Charles Burban

**Apreçamento de opções exóticas: Uma
abordagem pela simulação de Monte-Carlo**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Finanças.

Orientador: Carlos Patrício Samanez

Rio de Janeiro
Abril de 2008



Pierre-Alexandre Charles Burban

**Apreçamento de opções exóticas: uma abordagem pela
simulação de Monte-Carlo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Industrial da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Patrício Samanez

Orientador

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Soto Costa

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. Fernando Antonio de Lucena Aiube

Depto. De Engenharia Industrial – PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de abril 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

Pierre Alexandre Charles Burban

Graduado em Física na Escola Superior de Engenharia de Marselha (Centrale Marseille, France) em 2005. Realizou intercâmbio na Escola Politécnica de Montreal no Canadá. Participou de cursos relacionados às áreas de mercado de capitais e finanças.

Ficha Catalográfica

Burban, Pierre Alexandre Charles

Apreçamento de opções exóticas: uma abordagem pela simulação de Monte-Carlo / Pierre-Alexandre Charles Burban; orientador: Carlos Patrício Samanez. – 2008.

163 f. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Engenharia Industrial – Teses. 2. Simulação de Monte-Carlo. 3. Opções exóticas. 4. Opção européia. 5. Método de Longstaff–Schwartz para opções americanas. I. Samanez, Carlos Patrício. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

A minha família, pelo apoio e confiança

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Professor Carlos Patrício Samanez, pelo apoio e confiança depositada durante estes dois anos de PUC.
- A todos os professores do Departamento de Engenharia Industrial da PUC - Rio.
- A minha família.
- Ao CAPES, pelo auxílio financeiro.
- A todos os alunos da turma de 2006 e 2007 pelo apoio.
- Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

Resumo

Burban, Pierre Alexandre Charles; Samanez, Carlos Patrício. **Apreçamento de opções exóticas: Uma abordagem pela simulação de Monte-Carlo.** Rio de Janeiro, 2008. 163p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

As opções financeiras são instrumentos derivativos cada dia mais usados na gestão de risco de mercado das empresas e dos investidores. Dependendo do tipo e das características da opção escolhida, geralmente não existem soluções analíticas ao problema de apreçamento do instrumento. A simulação de Monte-Carlo é um método que, aplicado ao problema de apreçamento, possibilita uma grande flexibilidade na integração das variáveis de cálculo e uma precisão que depende do número de simulações efetuadas. As opções exóticas têm características especiais e seus valores podem ser estimados com precisão aplicando as técnicas de simulação. Esta dissertação propõe uma abordagem e aplica técnicas de cálculo no apreçamento das opções exóticas mais freqüentemente encontradas nos mercados de capitais. Os algoritmos desenvolvidos podem ser usados no estudo e valoração de casos reais.

Palavras-Chaves

Simulação de Monte-Carlo. Opções Exóticas. Opção Européia. Método de Longstaff – Schwartz para opções americanas.

Abstract

Burban, PierreAlexandre Charles; Samanez, Carlos Patricio. **Pricing of exotics options using Monte-Carlo simulation.** Rio de Janeiro, 2008. 163p. MSc. Dissertation – Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Financial options are derivatives tools each day more and more used in market and enterprise risk control systems. Depending on the option type used, it doesn't have an analytical solution for the pricing problem. A Monte-Carlo simulation is a very flexible method, which applied to the pricing problem, allows very-easy new variable implementation and accuracy increase with the number of simulation done. Exotics options have special features and pricing them by this method gives accurate results. Thus, this study explores a pricing solution and applied techniques of quite common exotics options traded on the market. The algorithms developed can be used for pricing real cases.

Key-Words

Monte-Carlo simulation. Exotics options. European option. Longstaff-Schwartz method for American option.

Sumário

1. Introdução	14
1.1 Introdução	14
1.2 Relevância do trabalho	14
1.3 Posicionamento da dissertação	15
2. Opção financeira	17
2.1 Definição clássica da opção de compra e de venda	17
2.2 Características das opções financeiras	17
2.3 Exemplo de utilização	17
2.4 Parâmetros envolvidos na definição do prêmio da opção	18
2.5 Exemplo numérico de uma opção européia	19
2.6 O modelo de Black-Scholes	22
3. Método de Monte-Carlo	23
3.1 Introdução	23
3.2 Monte-Carlo, Quase Monte-Carlo	24
3.3 Técnicas de redução de variância	24
3.3.1 Variáveis antitéticas	24
3.3.2 Variável de controle	25
3.4 Método de Monte-Carlo para opções financeiras	25
3.5 Simulação dos preços	26
3.5.1 Exemplo	26
3.5.2 Exemplo numérico	27
4. Simulação de Monte-Carlo: o caso da opção européia	29
4.1 Definição do método de Monte-Carlo	29
4.2 Exemplo de simulação da opção européia	30
4.3 Análise de sensibilidade	32
4.3.1 Sensibilidade em relação ao número de simulações	32
4.3.2 Sensibilidade em relação ao preço de exercício	33
4.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	34
4.3.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	35
5. Método dos mínimos quadrados de Monte-Carlo	36
5.1 Introdução	36
5.2 Apreçamento das opções americanas	37
5.3 Exemplo numérico dos "Mínimos Quadrados"	37
5.4 Análise de sensibilidade	45
5.4.1 Análise de sensibilidade no grau polinomial	46
5.4.2 Análise de sensibilidade no número de simulações	47
5.4.3 Análise de sensibilidade no número de datas de exercício	48

6. Opção asset-or-nothing	49
6.1 Definição	49
6.2 Exemplo numérico	50
6.3 Análise de sensibilidade	52
6.3.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	52
6.3.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	53
6.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	54
6.3.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	55
7. Opção cash-or-nothing	56
7.1 Definição	56
7.2 Exemplo numérico	57
7.3 Formula exata de cálculo	59
7.4 Análise de sensibilidade	60
7.4.1 Sensibilidade em mudança no numero de simulações	60
7.4.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	61
7.4.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	62
7.4.4 Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	63
8. Opção lookback	64
8.1 Definição	64
8.1.1 Fixed strike	64
8.1.2 Floating Strike	65
8.2 Exemplo numérico	65
8.3 Análise de sensibilidade: "fixed strike"	67
8.3.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	68
8.3.2 Sensibilidade em mudança no preço do strike	69
8.3.3 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	70
8.3.4 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco	71
8.4 Análise de sensibilidade: "floating strike"	72
8.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	72
8.4.2 Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	73
8.4.3 Sensibilidade em relação à mudança na taxa livre de risco	74
9. Opção asiática	75
9.1 Definição	75
9.2 Formula exata: forma geométrica	76
9.3 Exemplo numérico	77
9.4 Análise de sensibilidade	78
9.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	78
9.4.2 Sensibilidade em mudança no valor do strike	79
9.4.3 Sensibilidade em mudança na volatilidade	80
9.4.4 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco	81

10. Opção Chooser	82
10.1 Definição	82
10.2 Cálculo teórico (Rubinstein)	83
10.3 Método de Monte-Carlo	84
10.4 Análise de sensibilidade	85
10.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	85
10.4.2 Sensibilidade em mudança no tempo de escolha	86
10.4.3 Sensibilidade em mudança no preço do strike	87
10.4.4 Sensibilidade em mudança na volatilidade	88
10.4.5 Sensibilidade em mudança na taxa livre de risco	89
11. Opção europeia com barreira	90
11.1 Definição	90
11.2 Exemplo numérico	91
11.2.1 Simulação de um caminho válido para o exercício	92
11.2.2 Simulação dum caminho não válido para o exercício	93
11.3 Regra da paridade "in-out"	94
11.4 Análise de sensibilidade: call Down & Out	95
11.4.1 Sensibilidade em mudança no número de simulações	95
11.4.2 Sensibilidade em mudança no valor da barreira	96
12. Conclusão	97
13. Referências Bibliográficas	98
Apêndice 1: Cálculo Estocástico	99
Apêndice 2: Demonstração Black-Scholes	106
Apêndice 3: Gráficos de sensibilidade	113
Apêndice 4: Apresentação dos programas	136
Apêndice 5: Método de Monte-Carlo. Código "Matlab" dos programas	146
Apêndice 6: Opção americana sem dividendos. Modelo de Cox-Ross	159

Lista de figuras

Figura 1 – Payoff da opção de compra em função do preço do ativo objeto	20
Figura 2 – Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto	20
Figura 3 – Payoff da opção de venda em função do preço do ativo objeto	21
Figura 4 – Ganho do comprador em função do preço do ativo objeto	21
Figura 5 – Exemplo numérico de simulação dos preços	28
Figura 6 – Gráfico de sensibilidade das opções em relação ao preço de exercício	33
Figura 7 – Regressão polinomial no tempo 2	41
Figura 8 – Regressão polinomial no tempo 1	44
Figura 9 – Payoff da opção de compra “asset-or-nothing”	51
Figura 10 – Payoff da opção de venda “asset-or-nothing”	51
Figura 11 – Payoff da opção de compra “cash-or-nothing”	58
Figura 12 – Payoff da opção de venda “cash-or-nothing”	58
Figura 13 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano	66
Figura 14 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a média	77
Figura 15 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho valido	92
Figura 16 – Gráfico de simulação do preço do ativo objeto no ano e a barreira – Caminho não valido	93

Lista de tabelas

Tabela 1 – Valores numéricos de simulação dos preços	28
Tabela 2 – Valores numéricos de simulação dos preços	31
Tabela 3 – Valores numéricos do payoff	31
Tabela 4 – Valores numéricos da média dos payoffs	31
Tabela 5 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	32
Tabela 6 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao preço de exercício	33
Tabela 7 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	34
Tabela 8 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	35
Tabela 9 – Tabela dos preços do ativo nos 3 períodos – Payoff no tempo 3	38
Tabela 10 – Caminhos “in-the-money” e exercício imediato no tempo 2	39
Tabela 11 – Vetores da primeira regressão no tempo 2	39
Tabela 12 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação	40
Tabela 13 – Payoff da opção no tempo 2	40
Tabela 14 – Caminhos “in-the-money” e exercício imediato no tempo 1	42
Tabela 15 – Vetores da segunda regressão no tempo 1	42
Tabela 16 – Comparação dos valores de exercício imediato e de continuação	43
Tabela 17 – Payoff da opção no tempo 1	43
Tabela 18 – Valores das opções – Sensibilidade em grau polinomial	46
Tabela 19 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	47
Tabela 20 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de datas de exercício	48
Tabela 21 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	52
Tabela 22 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	53
Tabela 23 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	54
Tabela 24 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	55
Tabela 25 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	60
Tabela 26 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	61
Tabela 27 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	62
Tabela 28 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	63
Tabela 29 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações	68
Tabela 30 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	68

Tabela 31 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	69
Tabela 32 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	70
Tabela 33 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	71
Tabela 34 – Valores das opções – Convergência com o aumento de número de simulações	72
Tabela 35 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	73
Tabela 36 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	73
Tabela 37 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	74
Tabela 38 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	78
Tabela 39 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	79
Tabela 40 – Valores das opções européias com mesmos parâmetros	79
Tabela 41 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	80
Tabela 42 – Valores das opções européias com mesmos parâmetros	80
Tabela 43 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	81
Tabela 44 – Valores das opções européias com mesmos parâmetros	81
Tabela 45 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao número de simulações	85
Tabela 46 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças no tempo de escolha	86
Tabela 47 – Valores das opções – Sensibilidade em relação ao valor do preço de exercício	87
Tabela 48 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na volatilidade	88
Tabela 49 – Valores das opções – Sensibilidade em relação a mudanças na taxa livre de risco	89
Tabela 50 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no número de simulações	95
Tabela 51 – Valores das opções – Sensibilidade em mudanças no valor da barreira	96