

## 4

### Proposta Metodológica para o CEP

Devido a não existirem valores de referência para a média de cada bico (pois como já foi visto, há diferença de um dia para o outro, e não é prático ficar re-estimando parâmetros com muita frequência), o que se propõe é estabelecer limites que garantam que o esquema de controle irá sinalizar quando a média de algum bico se afastar do alvo de tal forma que a proporção de unidades não conformes aumentaria além de um valor especificado. A idéia adotada é semelhante à idéia de “limites de controle modificados” (Montgomery, 2004, seção 9-2.1), dos “limites de controle de aceitação” (Montgomery, 2004, seção 9-2.2) ou dos “limites com base na capacidade do processo” propostos por Guimarães (2001). Todos esses limites são de uma ou outra maneira, baseados na dispersão do processo e nas especificações.

O controle envolverá dados coletados de todos os bicos, que serão lançados numa “*group chart*” com limites de aceitação (note-se que isso é uma das propostas de extensão do trabalho de Passos, 2005). O modelo proposto é descrito a seguir.

Visando tornar o controle mais eficiente na detecção de causas especiais que afetem a todos os bicos, serão adotados mais dois gráficos, a serem utilizados em paralelo com a *group chart* com limites de aceitação: um gráfico da série de observações do nível-base e ainda um gráfico de MR para o nível-base.

#### Estimando a Variância

Para elaborar-se um gráfico de controle de aceitação, primeiramente deve-se dispor de uma boa estimativa do desvio-padrão do processo, pois tais limites são baseados neste desvio-padrão e nas especificações para o processo. Caso a variabilidade do processo se modifique, então os limites de controle de aceitação não são adequados. Esta suposição já foi verificada no capítulo 3, onde se testou a homogeneidade de variâncias entre os conjuntos de amostras pelo teste de Levene. No teste foram utilizados somente os dados “filtrados”, lembrando:

- **Conjunto 1 de amostras: As 15 primeiras amostras foram consideradas;**
- **Conjunto 2 de amostras: O conjunto 2 de amostras foi completamente descartado.**

- **Conjunto 3 de amostras:** Descartaram-se as 13 primeiras amostras;
- **Conjunto 4 de amostras:** Descartaram-se somente as primeiras amostras;
- **Conjunto 5 de amostras:** Consideraram-se somente as 9 primeiras amostras;
- **Conjunto 6 de amostras:** Descartaram-se as 3 primeiras amostras considerando as 13 seguintes, sendo então denominados de sub-conjunto 6.1; consideram-se também deste conjunto de amostras as nove últimas observações, denominando-se de sub-conjunto 6.2. Desta forma o conjunto 6 de amostras foram sub-divididos em dois sub-conjuntos provenientes de duas populações distintas.

As hipóteses testadas foram:

**H<sub>0</sub>:** Um mesmo bico possui variância estatisticamente semelhante nos diversos conjuntos de amostras; ou seja, a variabilidade do processo não se modifica.

**H<sub>1</sub>:** A variância do bico em pelo menos um conjunto de amostras é diferente da sua variância nos demais conjuntos de amostras.

Os resultados estão na Tabela 49, lembrando que é uma reprodução da Tabela 32 do capítulo 3.

**Tabela 44 – Teste de homogeneidade de variâncias entre os conjuntos 1, 3, 4, 5, 6.1, 6.2 de amostras**

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
Bico1	1,363	5	108	,244
Bico2	,874	5	108	,501
Bico3	,622	5	108	,683
Bico4	,517	5	108	,763
Bico5	,635	5	108	,673
Bico6	2,153	5	108	,065
Bico7	1,404	5	108	,229
Bico8	,699	5	108	,625

Analisando os níveis de significância da Tabela 49, com  $\alpha = 5\%$ , o teste falha em rejeitar a hipótese nula. Na verdade, excetuando o bico 6, os p-valores (significativos) são bastante altos, indo de 0,23 a 0,76. Logo não se pode concluir que a variância do processo se modifique, sendo, então satisfeita a premissa de variabilidade constante requerida pelo esquema de limites de controle modificados.

Foi visto no capítulo anterior que os bicos possuem variâncias semelhantes num mesmo conjunto de amostras, sendo possível a utilização de uma única variância para todos os bicos. Um possível estimador é o desvio-padrão combinado; no entanto, para empregá-lo, é necessário avaliar a premissa de variâncias iguais em todos os bicos e conjuntos de amostras, através do mesmo teste utilizado anteriormente; apenas, agora as hipóteses a serem testadas são:

**H<sub>0</sub>: Os bicos possuem variâncias estatisticamente semelhantes nos diversos conjuntos de amostras, ou seja, a variabilidade do processo não se modifica.**

**H<sub>1</sub>: Pelo menos um bico possui variâncias diferentes entre os diversos conjuntos de amostras consideradas.**

**Tabela 45 – Teste de homogeneidade de variância entre todos os bicos e conjuntos de amostras**

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
1,108	47	864	,290

O p-valor é de 29%, portanto não há evidência suficiente para rejeitar hipótese nula.

Como o teste não rejeitou a hipótese de que os bicos possuíssem variâncias iguais, adotar-se-á uma mesma variância para os limites de controle modificados. Pode-se utilizar o método do estimador combinado (*pooled estimator*) de  $\sigma^2$ , definido a seguir:

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6.2} \sum_{j=1}^8 (n_i - 1) S_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{6.2} \sum_{j=1}^8 (n_i - 1)} = \frac{\sum_{i=1}^{6.2} \sum_{j=1}^8 (n_i - 1) S_{ij}^2}{\sum_{i=1}^{6.2} 8(n_i - 1)}$$

onde  $i$  = índice do conjunto de amostras válidos ( $i = 1, 3, 4, 5, 6.1$  e  $6.2$ , representando os 6 conjuntos de amostras válidos),  $j$  = número do bico,  $n_i$  = número de amostras do conjunto  $i$  e  $S_{ij}^2$  é a variância amostral das  $n_i$  observações do bico  $j$  no conjunto de amostras  $i$ .

Estimou-se o desvio-padrão combinado com a utilização do Minitab. A saída está abaixo.

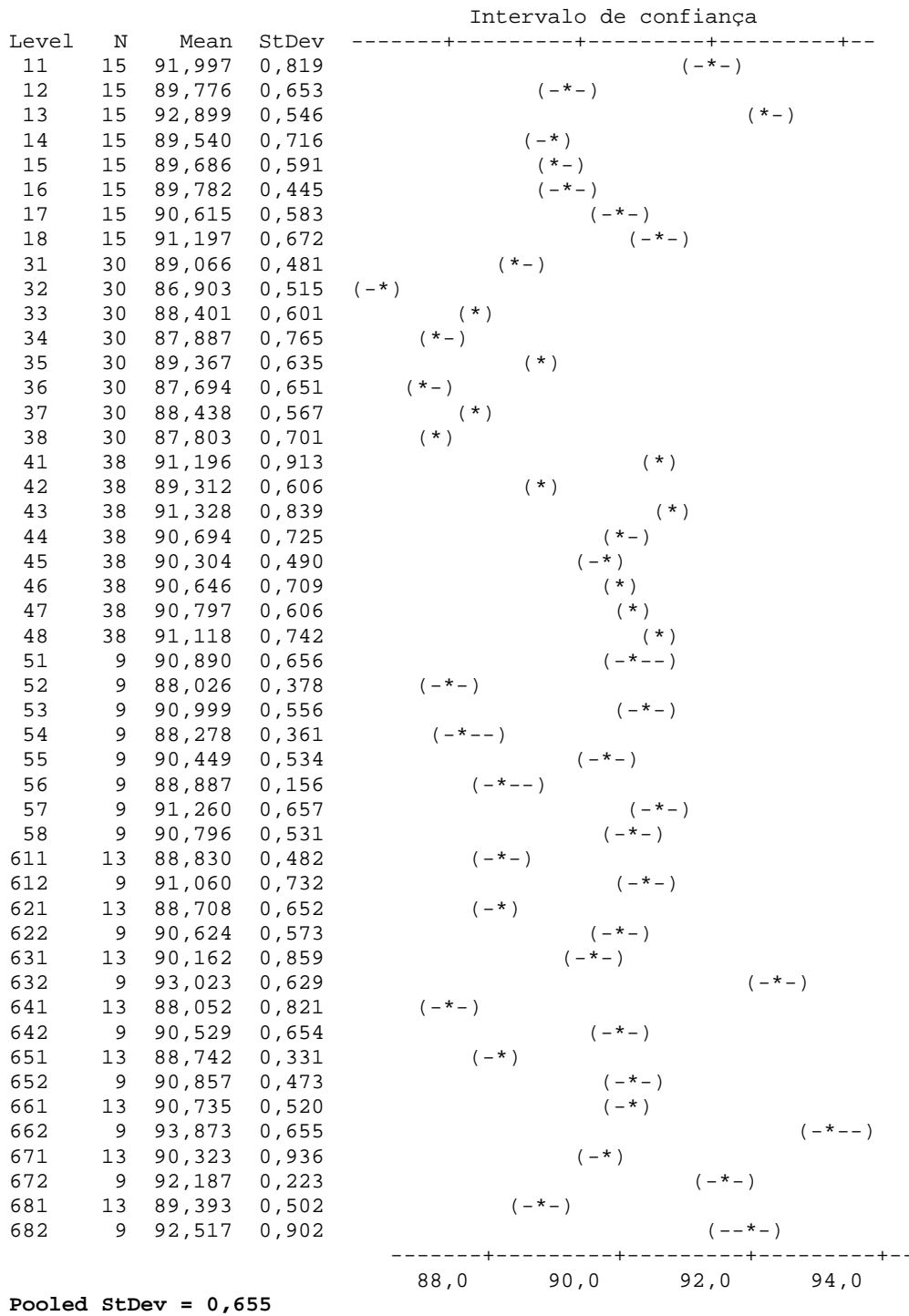


Figura 47 – Cálculo do desvio-padrão combinado: saída do MINITAB

Na Figura 48 será apresentado a média do peso para cada bico e conjunto de amostras, indicado por dois números, o primeiro número correspondendo ao conjunto de amostras, e o segundo, ao bico. Como o conjunto 6 de amostras foi dividido em dois subconjuntos, o segundo número indica o subconjunto e o terceiro número indica o bico.

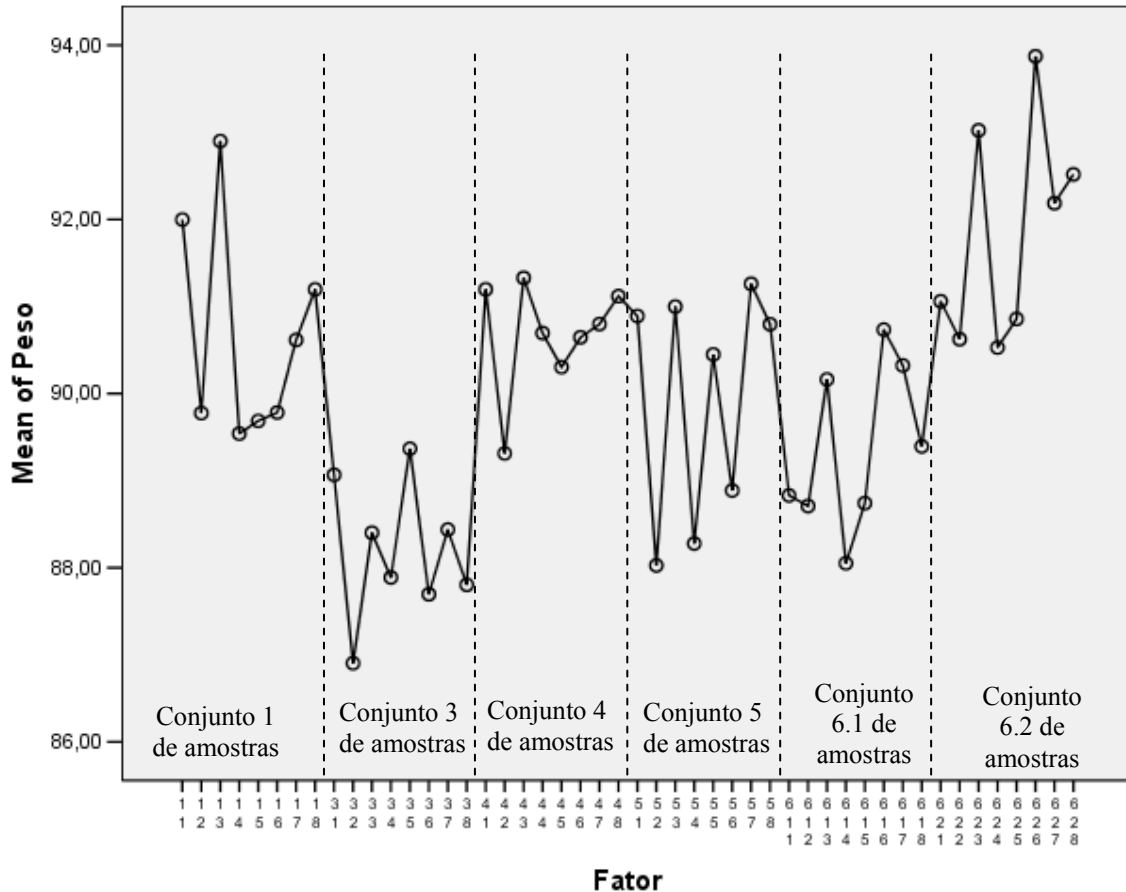


Figura 48 – Plotagem das médias dos bicos em cada conjunto de amostras

Agora com a estimativa do desvio-padrão assim calculado, pode-se proceder à determinação dos limites do gráfico de controle. Antes, porém, para melhor entendimento, é útil descrever brevemente os procedimentos de limites de controle modificados e limites de controle de aceitação. Para uma descrição mais detalhada, consultar Montgomery, 2004, seções 9-2.1 e 9-2.2.

#### 4.1

##### Limites de Controle Modificados

No gráfico de controle modificado o interesse está apenas em detectar se a verdadeira média do processo  $\mu$  está localizada de tal forma que o processo esteja produzindo uma fração não-conforme acima de determinado valor especificado  $\delta$ . Com frações não conformes menores que  $\delta$ , não se deseja intervir no processo, e não se quer que o gráfico sinalize. Assim, é considerado aceitável que  $\mu$  varie dentro de um intervalo  $\mu_l \leq \mu \leq \mu_s$ , onde  $\mu_l$  e

$\mu_s$  são escolhidos como o maior e o menor valores permissíveis de  $\mu$ , respectivamente, consistentes com a produção de um fração não conforme no máximo igual a  $\delta$ .

Tal tipo de gráfico foi concebido para processos nos quais naturalmente a média não possui um valor fixo, mas varie ou oscile dentro de uma faixa limitada de variação, porém, e em torno de um valor constante, i.e., não cresça ou diminua indefinidamente.

Para especificar os limites de controle para um gráfico  $\bar{x}$  modificado, admite-se que o processo tenha distribuição normal. Assim, os valores de  $\mu_l$  e  $\mu_s$  que resultam em uma fração não conforme menor do que  $\delta$ , são:

$$\mu_l = LIE + Z_\delta \sigma \quad 4.1.1$$

e

$$\mu_s = LSE - Z_\delta \sigma \quad 4.1.2$$

Onde, sendo  $\Phi$  a distribuição normal padrão acumulada,  $Z_\xi = \Phi^{-1}(1 - \xi)$ . Agora, especificando uma probabilidade de alarme falso  $\alpha$ , os limites de controle superior e inferior são

$$LSC = \mu_s + \frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} \quad 4.1.3$$

e

$$LIC = \mu_l - \frac{Z_{\alpha/2} \sigma}{\sqrt{n}} \quad 4.1.4$$

## 4.2

### Gráficos de Controle de Aceitação

A segunda abordagem para a utilização de um gráfico  $\bar{x}$  para monitorar a fração de não-conformes é chamada gráfico de controle de aceitação. A idéia que está por trás deste gráfico é semelhante ao gráfico com limites modificados, exceto pelo fato que no gráfico de controle de aceitação é planejado considerando-se o risco de aceitar um processo que esteja

operando a um nível insatisfatório (risco  $\beta$ ). Os limites de controle para o gráfico são determinados com base num tamanho de amostra  $n$  especificado e em uma fração não conforme,  $\gamma$ , para a qual o gráfico teria um poder especificado. Neste caso, os limites de controle são

$$LSC = \mu_s - \frac{Z_\beta \sigma}{\sqrt{n}} = LSE - Z_\gamma \sigma - \frac{Z_\beta \sigma}{\sqrt{n}} \quad 4.2.1$$

e

$$LIC = \mu_i + \frac{Z_\beta \sigma}{\sqrt{n}} = LIE + Z_\gamma \sigma + \frac{Z_\beta \sigma}{\sqrt{n}} \quad 4.2.2$$

É possível também, dadas uma fração não conforme “aceitável”  $\delta$  e uma fração não conforme inaceitável  $\gamma$ , escolher um tamanho de amostra para um gráfico de controle de aceitação que tenha risco de erro tipo I e de tipo II, associados respectivamente a  $\delta$  e a  $\gamma$ , iguais a  $\alpha$  e  $\beta$  especificados. Tal procedimento equivale a determinação de um plano de amostragem simples por dois pontos, ( $\delta$  e  $1-\alpha$ ) e ( $\gamma$  e  $\beta$ ), da curva característica de operação. Igualando as equações 4.2.1 e 4.1.3 e substituindo na equação 4.1.3 a equação 4.1.2, obtém-se

$$n = \left( \frac{Z_\alpha + Z_\beta}{Z_\delta - Z_\gamma} \right)^2 \quad 4.2.3$$

### 4.3

#### Determinando os Limites de Controle para o Processo em Análise

Os limites de especificação para o volume são:

$$LIE_v = 75\text{ml}$$

$$LSE_v = 80\text{ml}$$

Substituindo tais valores nas equações (4.2.1) e (4.2.2),

$$\mu_s = 80 - Z_\gamma \sigma_v \quad 4.4.1$$

e

$$\mu_I = 75 + Z_\gamma \sigma_v \quad 4.4.2$$

onde  $\sigma_v$  é o desvio-padrão do volume. Nota-se porém que, enquanto as especificações são para o volume, a variável controlada é o peso. Mais ainda, trata-se do peso bruto (PB), que é a soma do peso do líquido (PL) e do peso do frasco (PF). Então:

$$PB = PF + PL = PF + D \times V \quad 4.4.3$$

onde D é a densidade do produto, previamente conhecida e, V o volume do frasco.

As expressões (4.4.1) e (4.4.2) para os limites devem então ficar em função do peso bruto (PB), visto que este será a variável controlada, e não o volume. Então de (4.4.3), fica-se:

$$E(PB) = E(PL) + E(PF) = D \times E(V) + E(PF) \quad 4.4.4$$

E

$$\sigma_{PB}^2 = \sigma_{PL}^2 + \sigma_{PF}^2 = D^2 \sigma_v^2 + \sigma_{PF}^2 \quad 4.4.5$$

Denotando  $E(V)$  por  $\mu_v$ , a equação (4.4.4) pode ser escrita como:

$$E(PB) = E(PF) + D \times \mu_v \quad 4.4.6$$

Para determinar o valor inferior  $\mu_I$  em termos do peso bruto, ou seja,  $E_I(PB)$ , pode-se substituir  $\mu_v$  em (4.4.6) pela expressão (4.4.2), que fornece o valor inferior para a média do volume. Chega-se desta forma a:

$$E_I(PB) = E(PF) + D(75 + Z_\gamma \sigma_v) \quad 4.4.7$$

Como, de (4.4.5) o desvio-padrão do volume é

---

<sup>1</sup> O valor de  $\sigma_{PF}$  é 0,365 que foi calculado com base em uma amostra de 30 frascos.



$$\sigma_v = \frac{\sqrt{\sigma_{PB}^2 - \sigma_{PF}^2}}{D} \quad 4.4.8$$

então, substituindo (4.4.8) em (4.4.7), chega-se finalmente a:

$$E_I(PB) = E(PF) + D \times 75 + Z_\gamma \times \sqrt{\sigma_{PB}^2 - \sigma_{PF}^2} \quad 4.4.9$$

Utilizando um raciocínio análogo, obtém-se o valor esperado do peso bruto superior  $E_S(PB)$

$$E_S(PB) = E(PF) + D(80 - Z_\gamma \sigma_v)$$

$$E_S(PB) = E(PF) + D \times 80 - Z_\gamma \times \sqrt{\sigma_{PB}^2 - \sigma_{PF}^2}$$

Substituindo os valores esperados superiores e inferiores, respectivamente nas equações (4.2.1) e (4.2.2), obtêm-se os limites de controle:

$$LSC = E(PF) + 80 \times D - Z_\gamma \times \sqrt{(\sigma_{PB}^2 - \sigma_{PF}^2)} - \frac{Z_\beta}{\sqrt{n}} \sigma_{PB} \quad 4.4.10$$

e

$$LIC = E(PF) + 75 \times D + Z_\gamma \times \sqrt{(\sigma_{PB}^2 - \sigma_{PF}^2)} + \frac{Z_\beta}{\sqrt{n}} \sigma_{PB} \quad 4.4.11$$

Foram experimentadas algumas combinações de  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_{global}^2$  e  $\delta$  que parecessem “razoáveis”, obtendo-se através da equação (4.3.3) o tamanho da amostra para cada uma delas. O julgamento do que seriam valores razoáveis para  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_{global}$  e  $\delta$  é subjetivo; por isso foram testadas várias combinações de valores. Os resultados estão ilustrados na Tabela 46.

---

<sup>2</sup> $\alpha_{global} = 8 \times \alpha_{individual}$  é na verdade aproximação de  $(1 - \alpha_{individual}) = \sqrt[8]{1 - \alpha_{global}}$

Tabela 46 – Tamanho de amostras para  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , e  $\delta$  especificados

Fração def. inaceit. ( $\gamma$ )	0,001	0,005	0,005	0,01	0,01	0,02
$Z_\gamma$	3,09	2,58	2,58	2,33	2,33	2,05
Fração def. aceit. ( $\delta$ )	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
$Z_\delta$	3,29	3,29	3,29	3,29	3,29	3,29
$\beta$	0,2	0,2	0,5	0,5	0,6	0,6
$Z_\beta$	0,84	0,84	0,00	0,00	-0,25	-0,25
$Z_{\alpha/2}$ individual	3,84	3,84	3,42	3,42	3,23	3,23
$\alpha_{\text{individual}}$	0,000125	0,000125	0,000625	0,000625	0,001250	0,001250
$\alpha_{\text{global}}$	0,001	0,001	0,005	0,005	0,01	0,01
Tamanho n da amostra	545	43	23	13	10	6

Observando a Tabela anterior, fica evidente a impossibilidade de adotar qualquer uma das configurações utilizadas. Mesmo na configuração mais relaxada (última coluna), em que se aceita 2 % de defeituosos, com  $\beta = 60\%$  e  $\alpha_{\text{global}} = 1\%$ , será necessário um tamanho de amostra  $n = 6$ . Tal tamanho de amostra por bico é inviável para o processo em questão, pois o processo é composto por 8 bicos, o que resultaria numa amostra no instante  $t$  formada por 48 observações.

Esta abordagem é, portanto, impraticável para o processo em questão, que só admite amostras com 1 observação por bico. Neste caso, não será possível forçar a curva característica de operação do gráfico a passar por dois pontos especificados ( $\delta$ ,  $1 - \alpha$ ) e ( $\gamma$ ,  $\beta$ ). O único parâmetro que pode variar é a posição dos limites de controle, e com isso só se pode fazer a curva passar por um dos pontos: A solução adotada, então, será trabalhar com “limites de aceitação”, definindo um par ( $\gamma$ ,  $\beta$ ) e obtendo  $\mu_1$  pela equação (4.4.9) e LIC por (4.4.11). Com isso, a probabilidade de alarme falso,  $\alpha$ , quando o processo estiver centrado no valor nominal poderá (dependendo do valor nominal, do LIC e da dispersão do processo), ser muito alta. Para manter a probabilidade de alarme falso em nível baixo, aceitável, pode então ser necessário centrar o processo acima do ponto médio das especificações, o que de fato já é feito na prática. Na verdade o que ocorre na empresa é um aumento do peso de enchimento para cada bico de forma desordenada, isto é uma solução proposta pelos operadores como forma de se evitar constantes paradas na máquina devido ao peso abaixo do limite inferior de especificação. Dentre os dois limites de especificação, é o limite inferior que é crítico, pois produtos com pesos inferiores a este limite acarretarão multa para a empresa, bem como o dano irreparável de perda de consumidores. Já no caso em que o peso exceda o limite superior, o único inconveniente será o desperdício de produto. Desta forma, a solução será a

obtenção de um limite superior de controle “relaxado”, que permitirá ao processo a produção de produtos acima do LSE.

A solução proposta será obtida da seguinte forma:

1. **Define-se uma fração defeituosa inaceitável ( $\gamma$ ) e um valor para  $\beta$ ;**
2. **Calcula-se LIC através da equação 4.4.11;**
3. **Escolhe-se um  $\alpha_{\text{global}}$ , determina-se  $\alpha_{\text{individual}} = \alpha_{\text{global}}/8$ , e em seguida  $Z_{\alpha_{\text{individual}}/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_{\text{individual}}/2)$ ;**
4. **Calcula-se o valor-alvo para a média, por: alvo = LIC +  $Z_{\alpha_{\text{individual}}/2} \times \sigma$  (no caso de  $n > 1$ , substituir  $\sigma$  por  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ );**
5. **Por simetria em relação ao alvo calcula-se o LSC, que será:**  

$$\text{LSC} = 2 \times \text{alvo} - \text{LIC}$$

A Tabela 47 ilustra várias combinações de  $\mu_i$  inaceitável,  $\beta$  e  $\alpha_{\text{global}}$ .

Tabela 47 – Diversas possibilidades para o gráfico sugerido

Fração def. inaceit. ( $\gamma$ )	0,001	0,005	0,005	0,01	0,01	0,02
$Z_{\gamma}$	3,09	2,58	2,58	2,33	2,33	2,05
$\mu_{ii}$	84,46	84,18	84,18	84,04	84,04	83,89
$\beta$	0,2	0,2	0,5	0,5	0,6	0,6
$Z_{\beta}$	0,84	0,84	0,00	0,00	-0,25	-0,25
LIC	85,01	84,73	84,18	84,04	83,88	83,73
$\alpha_{\text{global}}$	0,001	0,001	0,005	0,005	0,01	0,01
$\alpha_{\text{individual}}$	0,000125	0,000125	0,000625	0,000625	0,001250	0,001250
$Z_{\alpha/2}$ individual	3,84	3,84	3,42	3,42	3,23	3,23
PB <sub>ALVO</sub>	87,52	87,24	86,42	86,28	85,99	85,84
LSC	90,03	89,75	88,66	88,52	88,10	87,96

Obs. Os cálculos dos limites foram obtidos utilizando  $n$  igual a 1

O gráfico de controle constituído pelos parâmetros indicados pela coluna tracejada na Tabela 47 poderia ser adotado, no entanto sabe-se que é extremamente difícil ajustar os pesos para todos os bicos no valor-alvo. Assim, o gráfico adotado produziria demasiados pontos fora dos limites, indicando uma situação de descontrole, o que seria uma indicação errônea. Para solucionar este problema estimou-se a amplitude média ( $\bar{R}$ ) das médias dos bicos considerando todos os conjuntos de amostras válidos e então somou-se essa amplitude

média ao alvo e ao LSC especificado na Tabela 47. Com isto, garantir-se-á um  $\alpha_{\text{global}}$  no máximo igual ao estabelecido na Tabela 47. O cálculo da amplitude média foi realizado assim:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{6,2} \sum_t (X_{ti \text{máx}} - X_{ti \text{min}})}{n_i}$$

fazendo denotar t o número da amostra (  $t = 1$  a  $n_i$ ), i o índice do conjunto de amostras válido (  $i = 1$  a 6.2) e  $n_i$  o número de amostras do conjunto i.

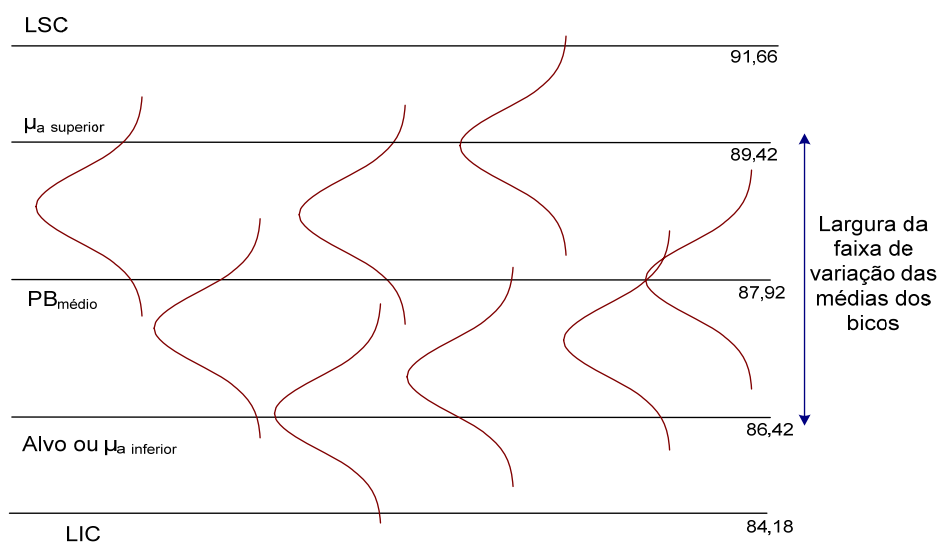


Figura 49 – Distribuição ilustrativa dos bicos

Sendo assim, somou-se ao alvo (que foi denominado  $\mu_a$  inferior) o valor de 3 gramas ( $\bar{R}$ ), encontrando  $\mu_a$  superior (média aceitável superior); conseqüentemente o limite superior de controle foi deslocado para cima do mesmo valor de 3 gramas. O que se está denominando aqui de “média aceitável” não está ligado ao conceito descrito anteriormente quando se abordaram os limites de controle modificados. Aqui a média aceitável é a média em que um bico pode estar para produzir determinado número de alarmes falsos, enquanto que nos limites de controle modificados, ela está definida como a média que resultará na produção de determinada fração não-conforme.

Utilizando os parâmetros estabelecidos na coluna demarcada da Tabela 47, os parâmetros do gráfico de controle serão:

$$\mathbf{LSC = 91,66}$$

$$\mathbf{\mu_a superior = 89,42}$$

$$\mathbf{PB_{m\u00e9dio} = 87,92}$$

$$\mathbf{Alvo ou \mu_a inferior = 86,42}$$

$$\mathbf{LIC = 84,18}$$